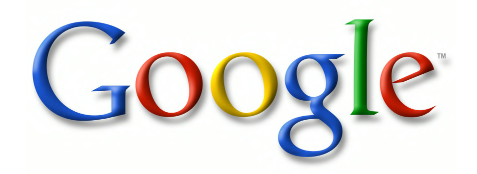



CHRISTO ET ECCLESIÆ
SIGILLUM ACADEMIÆ HARVARDIANÆ IN NOV: ANG:



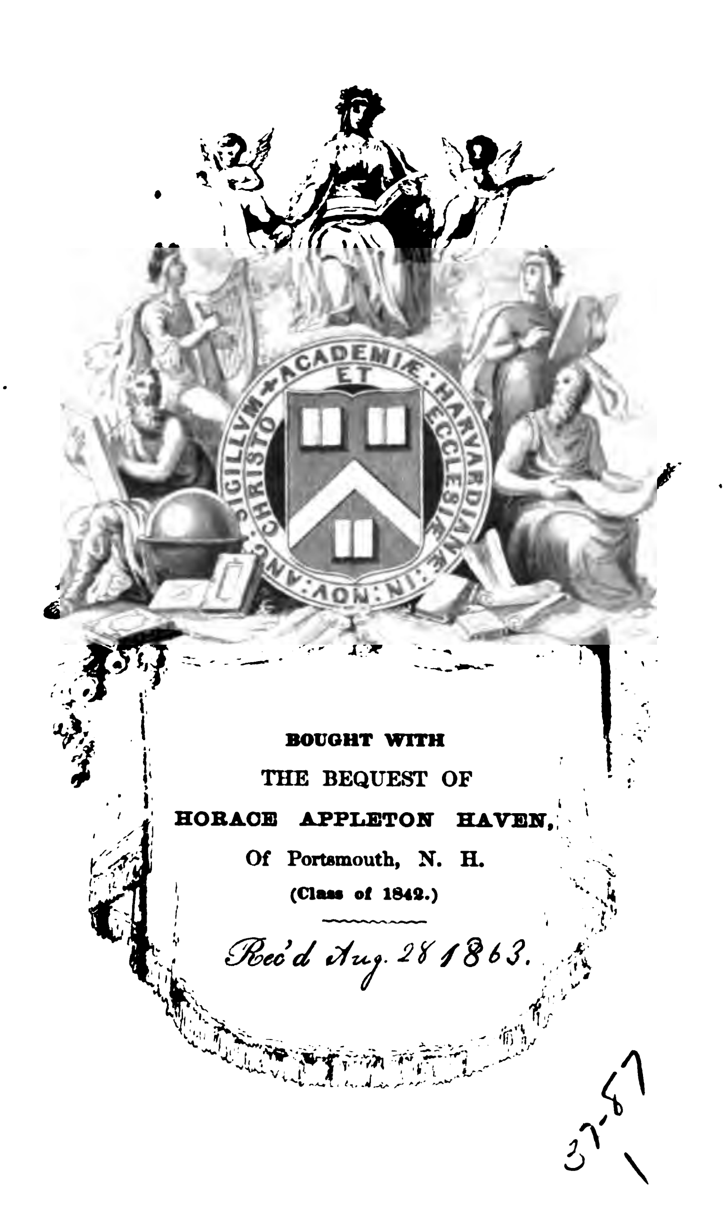


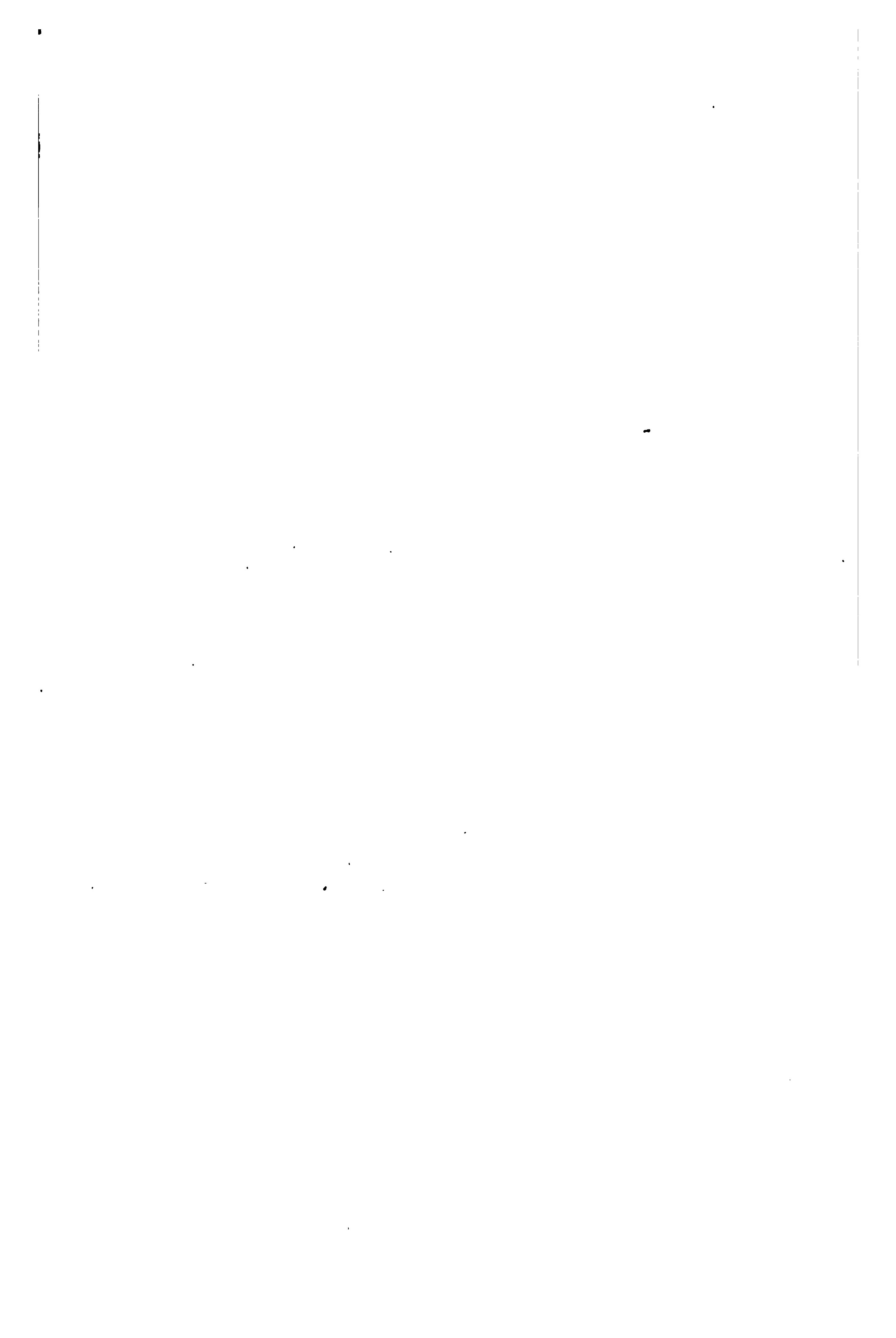


# ABHANDLUNGEN

SECHSTER BAND.




ACADEMIÆ HARVARDIANÆ
SIGILLVM CHRISTO ET ECCLESIÆ
IN NOV: ANG:



# ABHANDLUNGEN

SECHSTER BAND.

# ABHANDLUNGEN

## DER KÖNIGLICH SÄCHSISCHEN

# GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN.



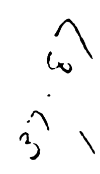

SECHSTER BAND.

MIT NEUNUNDZWANZIG TAFELN.

LEIPZIG

BEI S. HIRZEL.

1859.



# ABHANDLUNGEN

## DER MATHEMATISCH-PHYSISCHEN CLASSE

## DER KÖNIGLICH SÄCHSISCHEN

# GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN.




VIERTER BAND.

MIT NEUNUNDZWANZIG TAFELN.

LEIPZIG

BEI S. HIRZEL.

1859.

# INHALT.

Indem die mathematisch-physische Classe der Königlich Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften den vierten Band ihrer Abhandlungen herausgiebt, ist sie verpflichtet mit Dank der kräftigen Unterstützung der Fürstlich Jablonowskischen Gesellschaft zu gedenken, ohne welche es ihr nicht möglich gewesen sein würde innerhalb des Zeitraums, in welchem es geschehen ist, die erschienenen Bände zu veröffentlichen.

---

# AUSEINANDERSETZUNG

## EINER ZWECKMÄSSIGEN METHODE

ZUR

# BERECHNUNG DER ABSOLUTEN STÖRUNGEN

DER

# KLEINEN PLANETEN.

VON

P. A. HANSEN.

---

ZWEITE ABHANDLUNG.

Da ich in der Einleitung zur vorhergehenden Abhandlung gleicher Ueberschrift mich über das zu behandelnde Thema ausführlich ausgesprochen habe, und diese zweite Abhandlung sich unmittelbar an die erste anschliesst, so habe ich geglaubt, dass ich mich würde begnügen können, dieser Abhandlung diese wenigen Worte vorzusetzen. Allein ein unterdess eingetretener Zwischenfall veranlasst mich die allgemeinen, einfachen Principien, von welchen ich ausgegangen bin, und von welchen ich sonst glaubte, dass sie jedem Astronomen bekannt seien, hier anzuführen.

Diese Veranlassung giebt der von Neuem über einen Gegenstand, den ich für längst abgemacht halten musste, in dem Berliner astronomischen Jahrbuche für 1859 von Herrn Prof. Encke veröffentlichte Aufsatz. Es muss freilich anerkannt werden, dass er darin (auf der ersten Seite) einräumt, dass er nicht im Stande gewesen ist, auf die Sache mit der angemessenen Ruhe einzugehen, wer aber daraus auf den übrigen Inhalt dieses Aufsatzes schliessen wollte, würde sich wahrscheinlich irren, denn von der dritten Zeile an ist derselbe ähnlicher Beschaffenheit wie der der früheren Aufsätze desselben Verfassers. Da eine Widerlegung jetzt gänzlich ausserhalb des Bereichs der Nothwendigkeit liegt, so will ich hier nur auf eine neue Begriffsverwechselung, die darin vorkommt, aufmerksam machen, welche die Quelle von mehreren der andern zu sein scheint, und in der sonderbaren Idee besteht, dass die vorliegende Aufgabe auf bestimmte Integrale führe. Ich brauche um diese Idee zu beleuchten, nur einige einfache Sätze aus den Anfangsgründen der Integralrechnung und der Dynamik anzuführen, deren Aufstellung vor dieser Abhandlung, die im §. 5 den Gegenstand ausführlich behandelt, ich jetzt für passend halten muss.

1) Jedes Integral muss die durch die Grundsätze der Integralrechnung bestimmte Anzahl von den Constanten enthalten, die man allgemein die willkührlichen nennt, und da die vorliegende Aufgabe von drei Differentialgleichungen zweiter Ordnung abhängt, so müssen durch die Integrationen, welche sie verlangt, sechs solcher Constanten eingeführt werden.

2) Da diese Aufgabe nur durch mehrere aufeinander folgende Annäherungen gelöst werden kann, und jede dieser Annäherungen die Ausführung von sechs Integrationen verlangt, so müssen auch in jeder Annäherung sechs sogenannte willkührliche Constanten eingeführt werden. Alle diese Constanten bilden aber nicht eine eben so grosse Anzahl von verschiedenen und unabhängigen Constanten, sondern vereinigen sich so mit einander, dass überhaupt nur sechs von einander unabhängige Constanten daraus entstehen. Da man schon in der ersten Annäherung zur Berechnung der Störungen den sechs willkührlichen Constanten der Aufgabe bestimmte Werthe beilegen muss, so dienen die in dieser und den folgenden Annäherungen erscheinenden Constanten um die ursprünglich angenommenen Werthe derselben zu ergänzen und zu berichtigen. Da solchergestalt in der Auflösung dieser Aufgabe mehr wie die sechs uranfänglichen Constanten entstehen, so kann man die übrigen eintretenden allenfalls überzählige Constanten nennen, aber daraus zu schliessen, dass die letzteren willkührlich seien, oder auf Identitäten wie z. B. $g - g = 0$, oder gar auf, nur in besonderen Fällen stattfindenden, Gleichungen wie const. — const. = 0 beruhen, ist ein Fehlschluss.

3) Da die vorliegende Aufgabe die Ermittelung der Curve, die der gestörte Planet beschreibt, in Function der Zeit zum Zweck hat, so können die Integrale, auf welche sie führt, keine bestimmten Integrale sein, wie Herr Prof. Encke in seinem angezogenen Aufsatze im Widerspruch mit Allem, was die Dynamik über diese Gattung von Aufgaben lehrt, annimmt. Denn bestimmte Integrale sind Constanten, aber die Coordinaten einer jeden Curve sind veränderliche Grössen. Bestimmte Integrale können in dieser Aufgabe höchstens im Laufe der Entwickelungen als Ausdrücke für die Coefficienten der veränderlichen Glieder der Integrale eingeführt werden, müssen aber nicht nothwendiger Weise eintreten.

4) Da die von jedem Planeten beschriebene Curve völlig bestimmt

ist, so können die Integrale, die in jeder Annäherung zu bilden sind, auch keine allgemeinen Integrale sein, in welchen die Constanten, die man allgemein die willkührlichen nennt, in der That willkührlich sind. Es kann im Gegentheil keine einzige dieser Constanten willkührlich sein, und die Integrale, auf welche die in Rede stehende Aufgabe führt, sind daher particuläre Integrale, nemlich solche in welchen alle durch die Integrationen eingeführten Constanten bestimmte Werthe haben.

5) Den allgemeinen Regeln der Dynamik zufolge müssen diese Constanten jedenfalls so bestimmt werden, dass die Integrale in einem bestimmten Zeitpunkt den Ort und die Geschwindigkeit des Planeten darstellen, und diese Constanten können auch so bestimmt werden, denn die Bestimmung des Orts und der Geschwindigkeit des Planeten zu einer gegebenen Zeit hängt von sechs Bedingungen ab, und die Zahl der in dieser Aufgabe durch die Integrationen eingeführten Constanten ist ebenfalls sechs.

Mit Zugrundelegung dieser Grundsätze sind in dieser Abhandlung die Entwickelungen und Integrationen ausgeführt, und darauf diese Constanten in zwei verschiedenen Fällen bestimmt worden, nemlich in dem, wo man der Berechnung der Störungscoefficienten mittlere Elemente, und in dem, wo man derselben osculirende Elemente untergelegt hat. Das erste der hier erhaltenen Resultate stimmt mit der in den „*Fundamenta nova* etc.“ ausgeführten Bestimmung der dort vorkommenden analogen Constanten, und der von Laplace angewandten, überein, und das zweite ist mit der in den Astr. Nachr. Bd. XVIII. Nr. 425 gegebenen Behandlung desselben Falles übereinstimmend.

Der mittlere Werth der mittleren Bewegung ist mit dem wahren Werthe derselben identisch, und es tritt daher im erst genannten Falle der wahre Werth derselben selbstverständlich in die Ausdrücke der Coordinaten ein. Aber auch im zweiten Falle wird durch die richtige Bestimmung der willkührlichen Constanten der osculirende Werth der mittleren Bewegung in den wahren Werth derselben von selbst verwandelt. Es verbindet sich nemlich die Constante, die ein Glied von der Form der mittleren Bewegung hervorbringt, mit dem der Rechnung zu Grunde gelegten Werthe dieser und allen übrigens vorhandenen Gliedern derselben Form, so zu einem Ganzen, dass dieses der wahre Werth der mittleren Bewegung wird. Und dieses Resultat muss sich in jedem Falle ergeben, welche Gattung von mittlerer Bewegung man auch

der Rechnung zu Grunde gelegt haben mag, denn es ist an sich klar, dass der wahre Werth der mittleren Bewegung in jedem Falle in den Argumenten aller Ausdrücke ohne Ausnahme eintreten muss, indem Ausdrücke für die Coordinaten der Curve, die der Planet beschreibt, — seien diese Coordinaten gewählt, wie man will, — die auf einem anderen wie dem wahren Werthe der mittleren Bewegung beruhen, auf die Dauer die wahren Werthe dieser Coordinaten nicht geben können, wenn gleich sie für eine kurze Zeit nur geringe Abweichungen von den Beobachtungen zeigen sollten.

Da auch über die Säcularänderung der mittleren Länge in der letzten Zeit von Herrn Prof. Encke Begriffe mit der grössten Zuversicht vorgetragen worden sind, die mit der wahren Beschaffenheit derselben im schneidendsten Contrast stehen, so habe ich in einem besonderen Paragraphen die Beschaffenheit derselben aus einander gesetzt, und die bei der Berechnung derselben vorkommenden eigenthümlichen Umstände entwickelt. Nach der Aufstellung und dem Beweise von fünf sich darauf beziehenden Sätzen konnte ich die Glieder auf eine bestimmte Weise namhaft machen, aus welchen einzig und allein die Säcularänderung der mittleren Länge hervor geht.

Den übrigen Inhalt dieser Abhandlung wird man aus der folgenden Zusammenstellung der Ueberschriften der Paragraphen, in welche sie eingetheilt ist, im Allgemeinen erkennen können.

§. 8. Integration der in den Breitenstörungen aus der Variation des Factors $\cos i$ entstehenden Glieder. Art. 79 u. 80.

Es ist diesem nur noch hinzuzufügen, dass ich hier die vorhergehende Abhandlung über dasselbe Thema gemeiniglich mit Abhandlung (I) bezeichnet habe, so wie dass ich den Citaten von Artikeln und Gleichungen aus dieser Abhandlung immer das Zeichen (I) hinzugefügt habe, um sie von den Citaten aus der vorliegenden Abhandlung zu unterscheiden.

## §. 1. Entwickelung der Störungsfunction und ihrer Differentialquotienten für die vom Saturn bewirkten Störungen der Egeria.

1.

Die Entwickelung der Störungsfunction für die Saturnstörungen der Egeria werde ich durch die Methode ausführen, die ich in der „Entwickelung der negativen und ungraden Potenzen etc." *) betitelten Abhandlung abgeleitet habe, und die Vorschriften zur Anwendung dieser Methode mit der numerischen Berechnung der genannten Störungen verbinden. Die in dieser Rechnung angewandten Elemente der Egeria sind dieselben, die mir für die Jupiterstörungen gedient haben, ich werde sie neben den Saturnelementen wieder anführen.

| Egeria für 1851 Dec. 5.0 m. Gr. Z, | | Saturn für 1851,0 |
|---|---|---|
| $c = 19^0\ 31'\ 43''\!.6$ | | $m' = \frac{1}{3502}$ |
| $\pi = 119\ \ 12\ \ 12.4$ | m. Aeq. 1851,0 | $\pi' = 90^0\ 7'\ 19''$ |
| $\theta = 43\ \ 17\ \ 9.1$ | m. Aeq. 1851,0 | $\theta' = 112\ \ 22\ \ 15$ |
| $\varphi = 4\ \ 52\ \ 7.4$ | | $e' = 0.0559925$ |
| $i = 16\ \ 33\ \ 6.7$ | | $i' = 2^0\ 29'\ 28''\!.0$ |
| $n = 858''\!.3861$ | | $n' = 120''\!.4548$ |
| $\log a = 0.4108826$ | | $\log a' = 0.9794963$ |

In Bezug auf den Umstand, dass diese beiden Systeme von Elementen nicht einem und demselben Zeitpunkt angehören, erinnere ich an das, was ich darüber im §. 7 (I) Art. 77 gesagt habe.

Auf dieselbe Art, wie in der Abhandlung (I) erhält man hier

$$J = 15^0\ 49'\ 47''\!.2$$
$$\Pi = 84\ \ 28\ \ 38.2$$
$$\Pi' = 55\ \ \ 3\ \ 27.3$$

*) Abhandlungen der Königl. Sächs. Gesellschaft der Wissenschaften. Bd. IV.

und das Verhältniss $\mu$ der mittleren Bewegungen und die Vielfachen davon wie folgt:

$$\begin{aligned} \mu &= 0{,}1403271 \\ 2\mu &= 0{,}2806542 \\ 3\mu &= 0{,}4209813 \\ 4\mu &= 0{,}5613084 \\ 5\mu &= 0{,}7016355 \end{aligned}$$

In einen Kettenbruch aufgelöst wird

$$\mu = \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{12}}}}$$

und

$$1 - 7\mu = 0{,}0177$$

dieser kleine Divisor kann hier nur unerhebliche Wirkung äussern, weshalb ich ihn weiter nicht berücksichtigen werde.

2.

Wenn wir wie immer die sich auf den störenden Planeten beziehenden Grössen mit einem Strich versehen, so giebt die genannte Methode, wenn dieser Planet ein oberer ist, zuerst

$$\frac{1}{\Delta} = \frac{1}{r'} + \frac{r}{r'^2} D_1 + \frac{r^2}{r'^3} D_2 + \frac{r^3}{r'^4} D_3 + \text{etc.}$$

Da in den Differentialgleichungen der Bewegung nur die Differentialquotienten der Störungsfunction in Bezug auf die Coordinaten des gestörten Planeten vorkommen, und das erste Glied des vorstehenden Ausdrucks diese nicht enthält, so können wir in diesem Falle setzen

$$\Omega = \mu \left\{ \frac{1}{\Delta} - \frac{1}{r'} - \frac{r}{r'^2} H \right\}$$

und da $D_1 = H$ ist, so wird hiemit

$$\Omega = \mu \left\{ \frac{r^2}{r'^3} D_2 + \frac{r^3}{r'^4} D_3 + \frac{r^4}{r'^5} D_4 + \text{etc.} \right\}$$

wo wieder $\mu = m'\,206265''$ ist. Es fallen mithin die zwei ersten Glieder der Entwickelung von $\Delta^{-1}$ in dem Ausdruck der Störungsfunction weg. In der angezogenen Abhandlung wurden die $D$ Coefficienten auf folgende Form gebracht

$$D_n = \Sigma \left\{ A_{i,i'} + \sqrt{-1}\,.\,B_{i,i'} \right\} x^i x'^{i'}$$

wo $x$ und $x'$ die zu den wahren Anomalien gehörigen imaginären Expo-

nentialfunctionen sind. In der „Entwickelung des Products einer Potenz etc.“*) betitelten Abhandlung habe ich aber gezeigt, wie

$$\frac{x'^{i'}}{r'^{n+1}} = \Sigma F_{\nu'} z'^{\nu'} \text{ und } r^n x^i = \Sigma G_\nu y^\nu$$

erhalten werden kann, wenn $z'$ die zur mittleren Anomalie des störenden, und $y$ die zur excentrischen Anomalie des gestörten Planeten gehörigen, imaginären Exponentialfunctionen sind. Die Substitution dieser Ausdrücke giebt zuerst

$$\frac{1}{r'^{n+1}} D_n = \Sigma \left\{A_{i,i'} + \sqrt{-1}\, B_{i,i'}\right\} F_{\nu'} x^i z'^{\nu'}$$

und hierauf

$$\frac{r^n}{r'^{n+1}} D_n = \Sigma \left\{A_{i,i'} + \sqrt{-1}\, B_{i,i'}\right\} F_{\nu'} G_\nu y^\nu z'^{\nu'}$$

Durch die Ausdehnung dieser Substitutionen auf alle merklichen Werthe von $n$ erhält man

$$2\Omega = \Sigma \left\{P_{\nu,\nu'} + \sqrt{-1}\,.\, Q_{\nu,\nu'}\right\} \eta^\nu z'^{\nu'}$$

und nach dem Uebergange zum Reellen

$$\Omega = \Sigma P_{\nu,\nu'} \cos(\nu\varepsilon + \nu' g') - \Sigma Q_{\nu,\nu'} \sin(\nu\varepsilon + \nu' g')$$

die Ausführung dieser Substitutionen ist nun zu erklären.

3.

Ich werde das Product der Störungsfunction mit der halben grossen Achse $a$ erst wie folgt stellen

$$a\Omega = \mu \left\{ x^3 D_2 \left(\frac{r}{a}\right)^2 \left(\frac{a'}{r'}\right)^3 + x^4 D_3 \left(\frac{r}{a}\right)^3 \left(\frac{a'}{r'}\right)^4 + x^5 D_4 \left(\frac{r}{a}\right)^4 \left(\frac{a'}{r'}\right)^5 + \text{etc.} \right\}$$

wo

$$x = \frac{a}{a'}$$

und also immer kleiner wie Eins ist, wenn der störende Planet, wie hier vorausgesetzt wird, ein oberer ist. In der Abhandlung (I) hatte ich $\alpha = \frac{a'}{a}$ gesetzt, und wähle hier um das entgegengesetzte Verhältniss zu bezeichnen, ein umgekehrtes $\alpha$. In Zeichen der angeführten Abhandlung ist

$$D_n = \Sigma C\Big((n-2f,\ -(n-2f-2g)\Big)\, u^{n-2f} u'^{-(n-2f-2g)}$$

wo $u$ und $u'$ die zu den Argumenten der Breite gehörigen, imaginären

*) Abhandlungen der Königl. Sächs. Gesellschaft der Wissenschaften. Bd. IV.

Exponentialfunctionen bezeichnen, und $n$, $f$ und $g$ ganze und positive Zahlen sind. Ich erinnere hier daran, dass a. a. O. gezeigt worden ist, dass man in $D_n$ nur die $C$ Coefficienten der folgenden Glieder zu berechnen braucht,

$$\begin{aligned}
D_n = & \; C(n,-n)\, u^n u'^{-n} + C\big(n,-(n-2)\big)\, u^n u'^{-(n-2)} + \text{etc.} \\
& + C\big((n-2),-(n-2)\big)\, u^{n-2} u'^{-(n-2)} + C\big((n-2),-(n-4)\big)\, u^{n-2}, u'^{-(n-4)} + \text{etc.} \\
& + \dots \\
& \vdots \\
& + C(1,-1)\, u u'^{-1} + C(1,1)\, u u' \\
\text{oder} & + C(0,0)
\end{aligned}$$

je nachdem $n$ ungrade oder grade ist, indem die übrigen Coefficienten des Ausdrucks von $D_n$ den vorstehenden gleich sind. Es wurde ferner gefunden, dass

$$\begin{aligned}
& C(n-2f, -(n-2f-2g) = \\
& \cos^{2n}\tfrac{1}{2}J \operatorname{tg}^{2g}\tfrac{1}{2}J \Big\{ a(g,0) - b(g,1)\operatorname{tg}^2\tfrac{1}{2}J + a(g,1)\operatorname{tg}^4\tfrac{1}{2}J \mp \dots \\
& \qquad \dots - b(g,f-1)\operatorname{tg}^{4f-2}\tfrac{1}{2}J + a(g.f)\operatorname{tg}^{4f}\tfrac{1}{2}J \Big\}
\end{aligned}$$

ist, wo $a(g,0)$, $a(g,1)$, etc. $b(g,1)$, $b(g,2)$, etc. unveränderliche numerische Coefficienten sind, die a. a. O. Tafel IV bis $n = 20$ incl. berechnet sich vorfinden.

Ich werde in Folge dessen hier die folgenden Grössen und Bezeichnungen einführen,

$$(1) \quad \Gamma\big(n-2f, -(n-2f-2g)\big) = \gamma_n \operatorname{tg}^{2g}\tfrac{1}{2}J \Big\{ a(g,0) - b(g,1)\operatorname{tg}^2\tfrac{1}{2}J + a(g,1)\operatorname{tg}^4\tfrac{1}{2}J \mp \dots \Big\}$$

wo

$$(2) \quad \dots\dots\dots \quad \gamma_n = 2\mu x^{n+1} \cos^{2n}\tfrac{1}{2}J$$

ist, und $m'\,206265''$ für $\mu$ gesetzt werden muss, ferner

$$\Delta_n = \Sigma\Gamma\big(n-2f, -(n-2f-2g)\big)\, u^{n-2f} u'^{-(n-2f-2g)}$$

wo die Glieder, aus welchen die Summe zu bilden ist, dieselben Indices haben, wie oben in dem Ausdruck für $D_n$, oder mit andern Worten diejenigen sind, deren Indices oder Exponenten von $u$ und $u'$ in der ersten Columne linker Hand der genannten Tafel IV angeführt sind. Hiemit ergiebt sich

$$2a\Omega = \Delta_2 \left(\frac{r}{a}\right)^2 \left(\frac{a'}{r'}\right)^3 + \Delta_3 \left(\frac{r}{a}\right)^3 \left(\frac{a'}{r'}\right)^4 + \Delta_4 \left(\frac{r}{a}\right)^4 \left(\frac{a'}{r'}\right)^5 + \text{etc.}$$

Die Ursache, weshalb ich den Hülfsgrössen $\gamma_n$ solche Zusammensetzung gegeben habe, dass das Doppelte der mit $a$ multiplicirten Störungsfunc-

tion daraus hervorgeht, ist die folgende. Bei dem Uebergange zum Reellen am Schlusse der Entwickelung müssen alle Coefficienten der imaginären Exponentialfunctionen mit 2 multiplicirt werden, indem ich nun gleich den Ausdruck von $\gamma_n$ damit multiplicirt habe, vermeide ich die umständlichere Multiplication am Ende der Rechnung, und würde dort nur das constante Glied des Ausdrucks von $a\Omega$ mit 2 zu dividiren haben, wenn es nicht, wie schon in Abhandlung (I) angeführt ist, vortheilhafter wäre, davon den doppelten Werth stehen zu lassen.

4.

Zunächst müssen nun durch den Ausdruck (2) die $\gamma_n$ und darauf durch (1) die $\Gamma$ Coefficienten berechnet werden, wozu die in Tafel IV der genannten Abhandlung befindlichen numerischen Werthe der $a$ und $b$ Coefficienten dienen. Der Umstand, dass die $\Gamma$ Coefficienten mit $\mathrm{tg}^{2g}\tfrac{1}{2}J$ multiplicirt sind, oder mit andern Worten, dass von jeder Gruppe derselben der zweite mit $\mathrm{tg}^2\tfrac{1}{2}J$, der dritte mit $\mathrm{tg}^4\tfrac{1}{2}J$, etc. multiplicirt wird, verursacht, dass bei den Werthen der Neigungen, die fast alle der bis jetzt bekannten kleinen Planetenbahnen besitzen, nur die ersten Glieder merkliche Werthe bekommen. Mit dem im Art. 1 angegebenen Werthe von $J$ und mit Zuziehung der dort angeführten Elemente $a$, $a'$ und $m'$ ergab sich

$$
\begin{aligned}
\log \gamma_1 &= 0{,}925596\\
— \ \gamma_2 &= 0{,}348666\\
— \ \gamma_3 &= 9{,}771736\\
— \ \gamma_4 &= 9{,}194806\\
— \ \gamma_5 &= 8{,}61788\\
— \ \gamma_6 &= 8{,}04095\\
— \ \gamma_7 &= 7{,}4640\\
— \ \gamma_8 &= 6{,}8871
\end{aligned}
$$

und dann die in der folgenden Tafel zusammen gestellten Werthe der Logarithmen der $\Delta$ Coefficienten,

| Indices | $\Delta_1$ | | $\Delta_3$ | 2, −2 | 8.2772 | 3, −3 | 7.5996 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1, −1 | 0.624566 | 3, −3 | 9.26659 | 2, 0 | 7.6061 | 3, −1 | 7.0845 |
| 1, +1 | 8.91076 | 3, −1 | 8.02990 | 2, +2 | 6.130 | 3, +1 | 5.790 |
| | $\Delta_2$ | 3, +1 | 6.3161 | 0, 0 | 8.1905 | 1, −1 | 7.4421 |
| 2, −2 | 9.922697 | 1, −1 | 8.97294 | | $\Delta_5$ | 1, +1 | 7.1031 |
| 2, 0 | 8.50992 | 1, +1 | 8.0977 | 5, −5 | 8.0090 | | $\Delta_6$ |
| 2, +2 | 6.4951 | | $\Delta_4$ | 5, −3 | 6.9942 | 6, −6 | 7.3942 |
| 0, 0 | 9.711836 | 4, −4 | 8.63167 | 5, −1 | 5.581 | 6, −4 | 6.459 |
| | | 4, −2 | 7.5199 | | | 6, −2 | 5.143 |
| | | 4, 0 | 5.982 | | | | |

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 4,−4 | 6.9306 | 5,−5 | 6.265 | | $\varDelta_8$ | 4,−4 | 5.145 |
| 4,−2 | 6.547 | 5,−3 | 5.999 | 8,−8 | 6.180 | 4,−2 | 5.458 |
| 4, 0 | 5.382 | 5,−1 | 4.936 | 8,−6 | 5.370 | 4,−0 | 4.573 |
| 2,−2 | 6.698 | 3,−3 | 5.941 | 8,−4 | 4.199 | 2,−2 | 4.649 |
| 2, 0 | 6.569 | 3,−1 | 6.019 | 6,−6 | 5.600 | 2, 0 | 5.458 |
| 2,+2 | 5.442 | 3,+1 | 5.027 | 6,−4 | 5.445 | 2,+2 | 4.605 |
| 0, 0 | 6.617 | 1,−1 | 5.741 | 6,−2 | 4.465 | 0, 0 | 4.292 |
| | $\varDelta_7$ | 1,+1 | 6.022 | | | | |
| 7,−7 | 6.785 | | | | | | |
| 7,−5 | 5.916 | | | | | | |
| 7,−3 | 4.679 | | | | | | |

Wie man sieht, habe ich hier die Grösse $\varDelta_1$ mit aufgenommen, obgleich sie in der Störungsfunction selbst nicht vorkommt. Die Ursache davon wird weiter unten folgen.

## 5.

Durch die vorhergehende Rechnung ist die Störungsfunction in Function der durch die bez. Halbachsen dividirten Radii Vectores und der Argumente der Breite ausgedrückt, und um die letzten in wahre Anomalien zu verwandeln, müssen die folgenden Formeln angewandt werden,

$$A(n,-n) = \Gamma(n,-n)\cos(n\Pi - n\Pi')\,;\quad B(n,-n) = \Gamma(n,-n)\sin(n\Pi - n\Pi')$$
$$A(n,-(n-2)) = \Gamma(n,-(n-2))\cos(n\Pi-(n-2)\Pi')\,;\quad B(n,-(n-2)) = \Gamma(n,-(n-2))\sin(n\Pi-(n-2)\Pi')$$
$$\text{etc.}\qquad\qquad \text{etc.}$$
$$A(n-2,-n) = \Gamma(n,-(n-2))\cos((n-2)\Pi - n\Pi')\,;\quad B(n-2,-n) = \Gamma(n,-(n-2))\sin((n-2)\Pi - n\Pi')$$
$$A(n-2,-(n-2)) = \Gamma(n-2,-(n-2))\cos((n-2)\Pi-(n-2)\Pi')\,;\quad B(n-2,-(n-2)) = \Gamma(n-2,-(n-2))\sin((n-2)\Pi-(n-2)\Pi')$$
$$A(n-2,-(n-4)) = \Gamma(n-2,-(n-4))\cos((n-2)\Pi-(n-4)\Pi')\,;\quad B(n-2,-(n-4)) = \Gamma(n-2,-(n-4))\sin((n-2)\Pi-(n-4)\Pi')$$
$$\text{etc.}\qquad\qquad \text{etc.}$$

die im Art. 36 der genannten Abhandlung erklärt sind. Es wird hiemit

$$\varDelta_n = \Sigma A(n-2f, -(n-2f-2g))\,x^{n-2f}x'^{-(n-2f-2g)}$$
$$+ i\Sigma B(n-2f, -(n-2f-2g))\,x^{n-2f}x'^{-(n-2f-2g)}$$

wo wie oben $x$ und $x'$ die zu den wahren Anomalien gehörigen, imaginären Exponentialfunctionen und

$$i = \sqrt{-1}$$

ist. Aus den Angaben des Art. 1 findet man

$$\Pi - \Pi' = 29^0\ 25'\ 10''\!,9$$
$$2\Pi' = 110\quad 6\quad 54{,}6$$

und hiemit können leicht durch fortgesetzte Additionen die für die vor-

stehenden Formeln erforderlichen Vielfachen der $\Pi$ und $\Pi'$ gebildet werden. So ergeben sich die Werthe der vorstehenden $A$ und $B$ Coefficienten, wie die folgende Tafel ausweist.

| | A | B |
|---|---|---|
| | $\Delta_1$ | |
| 1,−1 | 0.564607 | 0.315827 |
| 1,+1 | 8.79203*n* | 8.72299 |
| | $\Delta_2$ | |
| 2,−2 | 9.636556 | 9.855028 |
| 2, 0 | 8.50180*n* | 7.79229 |
| 2,+2 | 5.6926 | 6.4896*n* |
| 0,−2 | 8.04636*n* | 8.48259*n* |
| 0, 0 | 9.711836 | — |
| 0,+2 | 8.04636*n* | 8.48259 |
| | $\Delta_3$ | |
| 3,−3 | 7.7492 | 9.26639 |
| 3,−1 | 8.00717*n* | 7.5285*n* |
| 3,+1 | 6.1101 | 6.2097*n* |
| 1,−3 | 7.2385 | 8.02415*n* |
| 1,−1 | 8.91298 | 8.66420 |
| 1,+1 | 7.9790*n* | 7.9099 |
| 1,+3 | 5.857*n* | 6.2881*n* |
| | $\Delta_4$ | |
| 4,−4 | 8.29867*n* | 8.57889 |
| 4,−2 | 7.3471*n* | 7.3896*n* |
| 4, 0 | 5.949 | 5.557*n* |
| 2,−4 | 7.3162 | 7.4121*n* |
| 2,−2 | 7.9911 | 8.2095 |
| 2, 0 | 7.5980*n* | 6.8885 |
| 2,+2 | 5.328 | 6.125*n* |
| 0,−4 | 5.865*n* | 5.792 |
| 0,−2 | 7.1425*n* | 7.5788*n* |
| 0, 0 | 8.1905 | — |
| 0,+2 | 7.1425*n* | 7.5788 |
| 0,+4 | 5.865*n* | 5.792*n* |
| | $\Delta_5$ | |
| 5,−5 | 7.9331*n* | 7.7440 |
| 5,−3 | 6.3391*n* | 6.9833*n* |
| 5,−1 | 5.577 | 4.687 |
| 3,−5 | 6.9618 | 6.5651*n* |
| 3,−3 | 6.0822 | 7.5994 |
| 3,−1 | 7.0618*n* | 6.583*n* |
| 3,+1 | 5.584 | 5.684*n* |
| 1,−5 | 5.573*n* | 4.854 |
| 1,−3 | 6.2932 | 7.0788*n* |
| 1,−1 | 7.3821 | 7.1334 |
| 1,+1 | 6.9844*n* | 6.9153 |
| 1,+3 | 6.331*n* | 5.762*n* |
| | $\Delta_6$ | |
| 6,−6 | 7.3934*n* | 6.178 |
| 6,−4 | 5.916 | 6.441*n* |
| 6,−2 | 5.047 | 4.920 |
| 4,−6 | 6.455 | 5.579 |
| 4,−4 | 6.5976*n* | 6.8778 |
| 4,−2 | 6.374*n* | 6.417*n* |
| 4, 0 | 5.349 | 4.957*n* |
| 2,−6 | 5.120*n* | 4.647*n* |
| 2,−4 | 6.343 | 6.439*n* |
| 2,−2 | 6.412 | 6.630 |
| 2, 0 | 6.561*n* | 5.851 |
| 2,+2 | 4.640 | 5.437*n* |
| 0,−4 | 5.265*n* | 5.192 |
| 0,−2 | 6.105*n* | 6.542*n* |
| 0. 0 | 6.617 | — |
| 0,+2 | 6.105*n* | 6.542 |
| 0,+4 | 5.265*n* | 5.192*n* |
| | $\Delta_7$ | |
| 7,−7 | 6.739*n* | 6.426*n* |
| 7,−5 | 5.773 | 5.757*n* |
| 7,−3 | 4.640 | 4.286 |
| 5,−7 | 5.818 | 5.695 |
| 5,−5 | 6.189*n* | 6.000 |
| 5,−3 | 5.344*n* | 5.988*n* |
| 5,−1 | 4.932 | 4.042 |
| 3,−7 | 4.504*n* | 4.550*n* |
| 3,−5 | 5.967 | 5.570*n* |
| 3,−3 | 4.424 | 5.941 |
| 3,−1 | 5.996*n* | 5.518*n* |
| 3,+1 | 4.821 | 4.921*n* |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1,−5 | 4.928$n$ | 4.209 | 4,−8 | 3.536$n$ | 4.189$n$ |
| 1,−3 | 5.228 | 6.013$n$ | 4,−6 | 5.441 | 4.565 |
| 1,−1 | 5.681 | 5.432 | 4,−4 | 4.812$n$ | 5.092 |
| 1,+1 | 5.903$n$ | 5.834 | 4,−2 | 5.285$n$ | 5.328$n$ |
| 1,+3 | 4.568$n$ | 4.999$n$ | 4, 0 | 4.540 | 4.148$n$ |
| | $\Delta_8$ | | 2,−6 | 4.442$n$ | 3.969$n$ |
| 8,−8 | 5.935$n$ | 6.095$n$ | 2,−4 | 5.254 | 5.350$n$ |
| 8,−6 | 5.356 | 4.770$n$ | 2,−2 | 4.363 | 4.581 |
| 8,−4 | 3.187$n$ | 4.197 | 2, 0 | 5.450$n$ | 4.740 |
| 6,−8 | 4.972 | 5.332 | 2,+2 | 3.803 | 4.600$n$ |
| 6,−6 | 5.599$n$ | 4.383 | 0,−4 | 4.456$n$ | 4.383 |
| 6,−4 | 4.902 | 5.426$n$ | 0,−2 | 4.994$n$ | 5.431$n$ |
| 6,−2 | 4.369 | 4.242 | 0, 0 | 4.292 | — |
| | | | 0,+2 | 4.994$n$ | 5.431 |
| | | | 0,+4 | 4.456$n$ | 4.383$n$ |

Hiebei ist zu bemerken, dass der vollständige Werth dieser Grösse die doppelte Ausdehnung hat, indem alle vorkommenden Indices sich mit entgegengesetzten Zeichen wiederholen. Da aber in dieser Wiederholung dieselben Coefficienten vorkommen, und zwar die $A$ dasselbe Zeichen, die $B$ aber das entgegengesetzte Zeichen erhalten, so war es überflüssig diese Glieder besonders anzusetzen. Blos in den Abtheilungen, in welchen der erste Index die Null ist, habe ich davon eine Ausnahme gemacht, und auch die Glieder angeführt, in welchen die Indices entgegengesetzte Zeichen haben.

## 6.

Die Berechnung der Zahlen der Tafel des vor. Art. kann Fehler enthalten, wenn entweder solche schon in der Tafel des vorvor. Art. enthalten sind, oder wenn man sich in dem Aufschlagen und Addiren der Logarithmen der Sinusse und Cosinusse der Functionen von $\Pi$ und $\Pi'$ geirrt hat, und es wird deshalb nöthig eine Controle zuzuziehen. Zu dieser gelangt man durch die Entwickelung, die ich in dem Art. 37 u. f. der genannten Abhandlung ausgeführt habe. Setzt man in dieser Entwickelung $f = 0$, so ist das Resultat derselben folgendes. Man setze

$$\cos J \sin \Pi = g \sin L$$
$$\cos \Pi = g \cos L$$
$$\sin J \sin \Pi = h$$

und rechne daraus $g$, $h$ und $L$, wobei die Bedingungsgleichung statt fin-

det, dass

$$g^2 + h^2 = 1$$

werden muss. Hierauf rechne man

$$\varepsilon_n = 2m' x^{n+1} . 206265''$$
$$N(n,\mu) = \varepsilon_n g^{n-2\mu} \Sigma(-1)^u R_u h^{2u}$$

und

$$P(n,\mu) = N(n,\mu) \cos(n-2\mu)(L-\Pi')$$
$$Q(n,\mu) = N(n,\mu) \sin(n-2\mu)(L-\Pi')$$

Setzt man hierauf

$$M_n = \Sigma P(n,\mu) x'^{-(n-2\mu)} + i\Sigma Q(n,\mu) x'^{-(n-2\mu)}$$

so wird für $f = 0$,

$$2a\Omega = M_2 \left(\frac{r}{a}\right)^2 \left(\frac{a'}{r'}\right)^3 + M_3 \left(\frac{r}{a}\right)^3 \left(\frac{a'}{r'}\right)^4 + M_4 \left(\frac{r}{a}\right)^4 \left(\frac{a'}{r'}\right)^5 + \text{etc.}$$

Die numerischen Werthe der $R$ Coefficienten findet man in der genannten Abhandlung in Tafel V zusammen gestellt. Zur Anwendung dieser Formeln auf unser Beispiel geben die numerischen Angaben des Art. 1

$$L = 84^0\ 15'\ 39''7$$
$$\log g = 9.983372$$
$$\log h = 9.433793$$
$$\log \varepsilon_1 = 0.933912$$
$$- \varepsilon_2 = 0.365298$$
$$- \varepsilon_3 = 9.796684$$
$$- \varepsilon_4 = 9.22807$$
$$- \varepsilon_5 = 8.65946$$
$$- \varepsilon_6 = 8.0908$$
$$- \varepsilon_7 = 7.5222$$
$$- \varepsilon_8 = 6.9536$$

und hieraus bekam ich die folgenden Werthe der Logarithmen der $N$ und $M$ Coefficienten.

| | $N(n,\mu)$ | | | $P(n,\mu)$ | $Q(n,\mu)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | | | 1 | |
| 1 | 0.616254 | | −1 | 0.557215 | 0.304596 |
| | 2 | | | 2 | |
| 2 | 9.906073 | | −2 | 9.625308 | 9.836405 |
| 0 | 9.654686 | | 0 | 9.654686 | — |
| | 3 | | | 3 | |
| 3 | 9.24165 | | −3 | 7.86175 | 9.24127 |
| 1 | 8.85333 | | −1 | 8.79429 | 8.54167 |
| | 4 | | | 4 | |
| 4 | 8.5984 | | −4 | 8.2527*n* | 8.5490 |
| 2 | 8.0734 | | −2 | 7.7926 | 8.0037 |
| 0 | 7.8897 | | 0 | 7.8897 | — |
| | 5 | | | 5 | |
| 5 | 7.9674 | | −5 | 7.8861*n* | 7.7148 |
| 3 | 7.2725 | | −3 | 5.8926 | 7.2721 |
| 1 | 6.6261 | | −1 | 6.5671 | 6.3144 |
| | 6 | | | 6 | |
| 6 | 7.3443 | | −6 | 7.3428*n* | 6.2650 |
| 4 | 6.3911 | | −4 | 6.0454*n* | 6.3417 |
| 2 | 6.2373*n* | | −2 | 5.9565*n* | 6.1676*n* |
| 0 | 6.4312*n* | | 0 | 6.4312*n* | — |
| | 7 | | | 7 | |
| 7 | 6.7269 | | −7 | 6.6862*n* | 6.3432*n* |
| 5 | 5.1103 | | −5 | 5.0290*n* | 4.8577 |
| 3 | 5.9969*n* | | −3 | 4.6170*n* | 5.9965*n* |
| 1 | 6.1247*n* | | −1 | 6.0657*n* | 5.8130*n* |
| | 8 | | | 8 | |
| 8 | 6.1137 | | −8 | 5.8867*n* | 6.0196*n* |
| 6 | 4.9003*n* | | −6 | 4.8988 | 3.8210*n* |
| 4 | 5.5653*n* | | −4 | 5.2196 | 5.5159*n* |
| 2 | 5.6593*n* | | −2 | 5.3785*n* | 5.5896*n* |
| 0 | 5.6785*n* | | 0 | 5.6785*n* | — |

Die Anwendung der vorstehenden Zahlenwerthe zur Controle der Hauptrechnung beruht auf Folgendem. Die vorstehende Tafel enthält die Werthe der Grössen $\Delta_1$, $\Delta_2$, $\Delta_3$, etc. für die Annahme, dass die wahre Anomalie $f = 0$ sei, führt man diese Annahme in die Tafel des Art. 5 ein, so müssen die beiderseitigen Zahlenwerthe übereinstimmen. Jene Annahme bedingt aber dass $x = 1$, oder dass jeder Exponent von $x$ gleich Null sei, und man muss daher, ohne Rücksicht auf den ersten

der dort angeführten Indices zu nehmen, in jedem $\Delta$ die Coefficienten addiren für welche der zweite Index, ohne Rücksicht auf das Vorzeichen derselbe ist. In der ersten Columne werden die Glieder, wo der zweite Index positiv ist, mit dem wahren Zeichen angewandt, in der zweiten Columne mit dem entgegengesetzten. Als Beispiel will ich die Controle für $\Delta_4$ vollständig ansetzen. Aus Art. 5 findet man

$$\begin{array}{rl} A(4,-4) = & -0{,}01989 \\ A(2,-4) = & +0{,}00207 \\ A(0,-4) = & -0{,}00002 \\ \hline \text{Summa} = & -0{,}01784 \end{array} \qquad \begin{array}{rl} B(4,-4) = & +0{,}03792 \\ B(2,-4) = & -0{,}00258 \\ B(0,-4) = & +0{,}00006 \\ \hline & +0{,}03540 \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} A(4,-2) = & -0.002224 \\ A(2,-2) = & +0.009798 \\ A(2,+2) = & +0.000021 \\ A(0,-2) = & -0.001388 \\ \hline \text{Summa} = & +0.006207 \end{array} \qquad \begin{array}{rl} B(4,-2) = & -0.00245 \\ B(2,-2) = & +0.01620 \\ -B(2,+2) = & +0.00013 \\ B(0,-2) = & -0.00379 \\ \hline & +0.01009 \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} 2A(4,0) = & +0.00018 \\ 2A(2,0) = & -0.00793 \\ A(0,0) = & +0.01551 \\ \hline \text{Summa} = & +0.00776 \end{array}$$

und dagegen sind die Zahlen der Logarithmen der vorstehenden Tafel

$$\begin{array}{l} P(4,-4) = -0.01789\,;\; Q(4,-4) = +0.03540 \\ P(4,-2) = +0.006201\,;\; Q(4,-2) = +0.01009 \\ P(4,\;\;0) = +0.00776 \end{array}$$

die mit den vorstehenden Summen hinreichend gut übereinstimmen. Ich bemerke hiezu, dass die Coefficienten $B(2,0)$, $B(4,0)$, etc. sich dieser Controle entziehen, allein die geringe Anzahl dieser kann man leicht durch Nachrechnen controliren, wenn man dieses für nöthig halten sollte.

## 7.

Die einzelnen Glieder der $\Delta_n$ sind mit den ganzen Potenzen von $x'$ multiplicirt, und im Ausdruck der Störungsfunction erscheint $\Delta_n$ mit $\left(\frac{a'}{r'}\right)^{n+1}$ multiplicirt, diese Functionen von $r'$ und $x'$ müssen nun in Functionen von $z'$ verwandelt werden, und dieses wird durch die Ausdrücke bewirkt, die ich im §. VI der „Entwickelung des Products einer Potenz etc." betitelten Abhandlung gegeben habe. Dort wurde

$$\left(\frac{r}{a}\right)^n x^m = \Sigma_{-\infty}^{+\infty} X_i^{n,m} z^i$$

gesetzt, und unter andern Ausdrücken die folgenden gefunden, die ich zur Anwendung für die Geeignetsten halte.

1) Wenn $i-m$ positiv oder Null ist,

$$X_i^{n,m}=(-1)^{i-m}\cos^{2(n+1)}\tfrac{1}{2}\varphi\Big\{P_{i-m}^{(n-m)}\beta^{i-m}+P_{i-m+1}^{(n-m)}Q_1^{(n+m)}\beta^{i-m+2}+P_{i-m+2}^{(n-m)}Q_2^{(n+m)}\beta^{i-m+4}+\text{etc.}\Big\}$$

2) Wenn $m-i$ positiv oder Null ist,

$$X_i^{n,m}=(-1)^{m-i}\cos^{2(n+1)}\tfrac{1}{2}\varphi\Big\{Q_{m-i}^{(n+m)}\beta^{m-i}+Q_{m-i+1}^{(n+m)}P_1^{(n-m)}\beta^{m-i+2}+Q_{m-i+2}^{(n+m)}P_2^{(n-m)}\beta^{m-i+4}+\text{etc.}\Big\}$$

wo allgemein

$$P_p^{(k)}=\frac{k+1.k\ldots k-p+2}{1.2..p}-\frac{k+1.k..k-p+3}{1.2..p-1}\nu+\frac{k+1.k..k-p+4}{1.2..p-2}\frac{\nu^2}{2}\mp\ldots\ldots\pm\frac{k+1}{1}\frac{\nu^{p-1}}{2.3..p-1}\mp\frac{\nu^p}{2.3..p}$$

$$Q_q^{(k)}=\frac{k+1.k..k-q+2}{1.2..q}+\frac{k+1.k..k-q+3}{1.2..q-1}\nu+\frac{k+1.k\ldots k-q+4}{1.2..q-2}\frac{\nu^2}{2}+\ldots\ldots+\frac{k+1}{1}\frac{\nu^{q-1}}{2.3..q-1}+\frac{\nu^q}{2.3..q}$$

$$\nu=i\cos^2\tfrac{1}{2}\varphi;\ \beta=\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\varphi$$

ist, und $\varphi$ den Excentricitätswinkel bedeutet. Man kann die verschiedenen $P$ und $Q$ durch blose Additionen und Subtractionen aus den $P^{(-1)}$ und $Q^{(-1)}$ finden. Die vorstehenden Ausdrücke geben

$$P_1^{(-1)}=-\nu;\ Q_1^{(-1)}=\nu$$
$$P_2^{(-1)}=\frac{\nu^2}{2};\ Q_2^{(-1)}=\frac{\nu^2}{2}$$
$$P_3^{(-1)}=-\frac{\nu^3}{6};\ Q_3^{(-1)}=\frac{\nu^3}{6}$$
$$P_4^{(-1)}=\frac{\nu^4}{24};\ Q_4^{(-1)}=\frac{\nu^4}{24}$$

etc. etc.

und hiemit findet man leicht

$$P_1^{(-2)}=P_1^{(-1)}-1;\quad P_1^{(-3)}=P_1^{(-2)}-1;\quad P_1^{(-4)}=P_1^{(-3)}-1;$$
$$P_2^{(-2)}=P_2^{(-1)}-P_1^{(-2)};\quad P_2^{(-3)}=P_2^{(-2)}-P_1^{(-3)};\quad P_2^{(-4)}=P_2^{(-3)}-P_1^{(-4)};$$
$$P_3^{(-2)}=P_3^{(-1)}-P_2^{(-2)};\quad P_3^{(-3)}=P_3^{(-2)}-P_2^{(-3)};\quad P_3^{(-4)}=P_3^{(-3)}-P_2^{(-4)};\quad \text{etc.}$$
$$P_4^{(-2)}=P_4^{(-1)}-P_3^{(-2)};\quad P_4^{(-3)}=P_4^{(-2)}-P_3^{(-3)};\quad P_4^{(-4)}=P_4^{(-3)}-P_3^{(-4)};$$

etc. etc. etc.

und zur andern Seite

$$\begin{array}{lll} P_1^{(0)} = P_1^{(-1)} + 1\ ; & P_1^{(1)} = P_1^{(0)} + 1\ ; & P_1^{(2)} = P_1^{(1)} + 1\ ; \\ P_2^{(0)} = P_2^{(-1)} + P_1^{(-1)}; & P_2^{(1)} = P_2^{(0)} + P_1^{(0)}; & P_2^{(2)} = P_2^{(1)} + P_1^{(1)}; \\ P_3^{(0)} = P_3^{(-1)} + P_2^{(-1)}; & P_3^{(1)} = P_3^{(0)} + P_2^{(0)}; & P_3^{(2)} = P_3^{(1)} + P_2^{(1)}; \quad \text{etc.} \\ P_4^{(0)} = P_4^{(-1)} + P_3^{(-1)}; & P_4^{(1)} = P_4^{(0)} + P_3^{(0)}; & P_4^{(2)} = P_4^{(1)} + P_3^{(1)}; \\ \text{etc.} & \text{etc.} & \text{etc.} \end{array}$$

und für die $Q$ finden dieselben Gleichungen statt. Es ist nemlich auch

$$\begin{array}{ll} Q_1^{(-2)} = Q_1^{(-1)} - 1\ ; & Q_1^{(-3)} = Q_1^{(-2)} - 1\ ; \\ Q_2^{(-2)} = Q_2^{(-1)} - Q_1^{(-2)}; & Q_2^{(-3)} = Q_2^{(-2)} - Q_1^{(-3)}; \quad \text{etc.} \\ \text{etc.} & \text{etc.} \end{array}$$

und

$$\begin{array}{ll} Q_1^{(0)} = Q_1^{(-1)} + 1\ ; & Q_1^{(1)} = Q_1^{(0)} + 1\ ; \\ Q_2^{(0)} = Q_2^{(-1)} + Q_1^{(-1)}; & Q_2^{(1)} = Q_2^{(0)} + Q_1^{(0)}; \quad \text{etc.} \\ \text{etc.} & \text{etc.} \end{array}$$

Endlich ist zu bemerken, dass für jeden Werth des oberen Index

$$P_0^{(k)} = 1\ ;\ Q_0^{(k)} = 1$$

ist.

Mit der im Art. 1 angegebenen Excentricität des Saturns sind nun die $X$ Coefficienten berechnet worden, deren Logarithmen die folgende Tafel enthält.

| $n,m$ | $z'^{0}$ | $z'^{-1}$ | $z'^{-2}$ | $z'^{-3}$ | $z'^{-4}$ | $z'^{-5}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| −1, 0 | 0.00000 | 8.4469 | 7.1948 | 5.994 | — | — |
| −2, −1 | −∞ | 9.99931 | 9.04812 | 8.0231 | 6.970 | 5.901 |
| −2, +1 | −∞ | 6.5936 | 5.466 | 4.32 | — | — |
| −3, −2 | −∞ | 8.44693n | 9.99658 | 9.28920 | 8.4226 | 7.4867 |
| −3, 0 | 0.00205 | 8.92576 | 7.8495 | 6.765 | 5.675 | 4.58 |
| −3, +2 | −∞ | 4.564 | — | — | — | — |
| −4, −3 | −∞ | 6.5934 | 8.74672n | 9.99178 | 9.44109 | 8.6915 |
| −4, −1 | 8.75154 | 0.00273 | 9.22650 | 8.3180 | 7.3527 | 6.356 |
| −4, +1 | 8.75154 | 7.6376 | 6.530 | 5.421 | — | — |
| −4, +3 | −∞ | — | — | — | — | — |
| −5, −4 | −∞ | 4.564n | 7.1943 | 8.9200n | 9.98487 | 9.5510 |
| −5, −2 | 7.3761 | 8.45272 | 0.00137 | 9.40128 | 8.6177 | 7.750 |
| −5, 0 | 0.00681 | 9.15068 | 8.1988 | 7.2044 | 6.185 | 5.15 |
| −5, +2 | 7.3761 | 6.257 | 5.141 | 4.02 | — | — |

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| −6,−5 | −∞ | — | 5.468*n* | 7.5447 | 9.0415*n* | 9.9757 |
| −6,−3 | 5.950 | 7.0766 | 6.4242 | 9.99797 | 9.5239 | 8.8384 |
| −6,−1 | 9.0563 | 0.00884 | 9.3551 | 8.5361 | 7.642 | 6.704 |
| −6,+1 | 9.0563 | 8.0616 | 7.0396 | 6.001 | — | — |
| −6,+3 | 5.950 | — | — | — | — | — |
| −7,−6 | −∞ | — | — | 5.993*n* | 7.792 | 9.1336*n* |
| −7,−4 | — | 5.613 | 6.900 | 8.4417*n* | 9.9925 | 9.6173 |
| −7,−2 | 7.9024 | 8.9333 | 0.0088 | 9.4928 | 8.7775 | 7.967 |
| −7, 0 | 0.0143 | 9.3011 | 8.4451 | 7.525 | 6.566 | 5.58 |
| −7,+2 | 7.9024 | 6.856 | 5.80 | — | — | — |
| −8,−7 | −∞ | — | — | — | 6.365*n* | 7.982 |
| −8,−5 | — | — | 5.17 | 7.071 | 8.7419*n* | 9.9849 |
| −8,−3 | 6.652 | 7.717 | 8.7593 | 0.0068 | 9.5959 | 8.9652 |
| −8,−1 | 9.2376 | 0.0177 | 9.4571 | 8.7109 | 7.872 | 6.989 |
| −8,+1 | 9.2376 | 8.343 | 7.397 | 6.418 | — | — |
| −8,+3 | 6.652 | — | — | — | — | — |
| −9,−8 | −∞ | — | — | — | — | 6.654*n* |
| −9,−6 | — | — | — | — | 7.368 | 8.9148*n* |
| −9,−4 | 5.347 | 6.426 | 7.508 | 8.464 | 0.0028 | 9.6775 |
| −9,−2 | 8.229 | 9.1607 | 0.0190 | 9.5710 | 8.914 | 8.153 |
| −9, 0 | 0.024 | 9.4159 | 8.638 | 7.779 | 6.873 | 5.94 |
| −9,+2 | 8.229 | 7.256 | 6.258 | — | — | — |
| −9,+4 | 5.347 | — | — | — | — | — |

Diese Werthe kann man in allen Fällen für die kleinen Planeten brauchen, da es ohne merklichen Einfluss ist, wenn die Excentricität des Saturns nicht für denselben Zeitpunkt gilt, für welchen die des gestörten Planeten statt findet.

## 8.

Die Anwendung der im vor. Art. gegebenen Zahlenwerthe ist einfach und regelmässig, man wird sie am Leichtesten dadurch erkennen, dass ich die Formeln, auf welche sie sich gründet, für ein paar Werthe von $\varDelta_n$ hinschreibe. Für $\varDelta_2$ braucht man

$$\left(\frac{r'}{a'}\right)^{-3} x'^{-2}_{1} = X_0^{-3,-2} z'^0 + X_{-1}^{-3,-2} z'^{-1} + \ldots$$
$$\left(\frac{r'}{a'}\right)^{-3} x'^0 = X_0^{-3,0} z'^0 + X_{-1}^{-3,0} z'^{-1} + \ldots$$
$$\left(\frac{r'}{a'}\right)^{-3} x'^2 = X_0^{-3,2} z'^0 + X_{-1}^{-3,2} z'^{-1} + \ldots$$

und für $\varDelta_3$

$$\left(\frac{r'}{a'}\right)^{-4} x'^{-3} = X_0^{-4,-3} z'^0 + X_{-1}^{-4,-3} z'^{-1} + \ldots$$
$$\left(\frac{r'}{a'}\right)^{-4} x'^{-1} = X_0^{-4,-1} z'^0 + X_{-1}^{-4,-1} z'^{-1} + \ldots$$
$$\left(\frac{r'}{a'}\right)^{-4} x' = X_0^{-4,1} z'^0 + X_{-1}^{-4,1} z'^{-1} + \ldots$$
$$\left(\frac{r'}{a'}\right)^{-4} x'^3 = X_0^{-4,3} z'^0 + X_{-1}^{-4,3} z'^{-1} + \ldots$$

woraus leicht zu erkennen ist, welche Werthe für die übrigen $\Delta_n$ angewandt werden müssen. Durch die Substitution der vorstehenden Ausdrücke in die für $\Delta_2$ und $\Delta_3$ erhält man nun, wenn wieder $i = \sqrt{-1}$ ist,

$$\begin{aligned}
\left(\frac{a'}{r'}\right)^3 \Delta_2 = x^2 & \left\{\left[E_0^{2,2} + iF_0^{2,2}\right] z'^0 + \left[E_{-1}^{2,2} + iF_{-1}^{2,2}\right] z'^{-1} + \ldots\right\} \\
+ x^0 & \left\{\left[E_0^{2,0} + iF_0^{2,0}\right] z'^0 + \left[E_{-1}^{2,0} + iF_{-1}^{2,0}\right] z'^{-1} + \ldots\right\} \\
+ x^{-2} & \left\{\left[E_0^{2,-2} + iF_0^{2,-}\right] z'^0 + \left[E_{-1}^{2,-2} + iF_{-1}^{2,-2}\right] z'^{-1} + \ldots\right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left(\frac{a'}{r'}\right)^4 \Delta_3 = x^3 & \left\{\left[E_0^{3,3} + iF_0^{3,3}\right] z'^0 + \left[E_{-1}^{3,3} + iF_{-1}^{3,3}\right] z'^{-1} + \ldots\right\} \\
+ x & \left\{\left[E_0^{3,1} + iF_0^{3,1}\right] z'^0 + \left[E_{-1}^{3,1} + iF_{-1}^{3,1}\right] z'^{-1} + \ldots\right\} \\
+ x^{-1} & \left\{\left[E_0^{3,-1} + iF_0^{3,-1}\right] z'^0 + \left[E_{-1}^{3,-1} + iF_{-1}^{3,-1}\right] z'^{-1} + \ldots\right\} \\
+ x^{-3} & \left\{\left[E_0^{3,-3} + iF_0^{3,-3}\right] z'^0 + \left[E_{-1}^{3,-3} + iF_{-1}^{3,-3}\right] z'^{-1} + \ldots\right\}
\end{aligned}$$

wo die Coefficienten folgender Maassen zusammen gesetzt sind

$$E_0^{2,2} = A(2,-2)\, X_0^{-3,-2} + A(2,0)\, X_0^{-3,0} + A(2,2)\, X_0^{-3,2}$$
$$F_0^{2,2} = B(2,-2)\, X_0^{-3,-2} + B(2,0)\, X_0^{-3,0} + B(2,2)\, X_0^{-3,2}$$
$$E_0^{2,0} = A(0,-2)\, X_0^{-3,-2} + A(0,0)\, X_0^{-3,0} + A(0,2)\, X_0^{-3,2}$$
$$F_0^{2,0} = 0$$
$$E_0^{2,-2} = E_0^{2,2}$$
$$F_0^{2,-2} = -F_0^{2,2}$$

---

$$E_0^{3,3} = A(3,-3)\, X_0^{-4,-3} + A(3,-1)\, X_0^{-4,-1} + A(3,1)\, X_0^{-4,1} + A(3,3)\, X_0^{-4,3}$$
$$F_0^{3,3} = B(3,-3)\, X_0^{-4,-3} + B(3,-1)\, X_0^{-4,-1} + B(3,1)\, X_0^{-4,1} + B(3,3)\, X_0^{-4,3}$$
$$E_0^{3,1} = A(1,-3)\, X_0^{-4,-3} + A(1,-1)\, X_0^{-4,-1} + A(1,1)\, X_0^{-4,1} + A(1,3)\, X_0^{-4,3}$$
$$F_0^{3,1} = B(1,-3)\, X_0^{-4,-3} + B(1,-1)\, X_0^{-4,-1} + B(1,1)\, X_0^{-4,1} + B(1,3)\, X_0^{-4,3}$$

$$E_0^{3,-1} = E_0^{3,1}$$
$$F_0^{3,-1} = -F_0^{3,1}$$
$$E_0^{3,-3} = E_0^{3,3}$$
$$F_0^{3,-3} = -F_0^{3,3}$$

$$E_{-1}^{2,2} = A(2,-2)\,X_{-1}^{-3,-2} + A(2,0)\,X_{-1}^{-3,0} + A(2,2)\,X_{-1}^{-3,2}$$
$$F_{-1}^{2,2} = B(2,-2)\,X_{-1}^{-3,-2} + B(2,0)\,X_{-1}^{-3,0} + B(2,2)\,X_{-1}^{-3,2}$$
$$E_{-1}^{2,0} = A(0,-2)\,X_{-1}^{-3,-2} + A(0,0)\,X_{-1}^{-3,0} + A(0,2)\,X_{-1}^{-3,2}$$
$$F_{-1}^{2,0} = B(0,-2)\,X_{-1}^{-3,-2} + B(0,2)\,X_{-1}^{-3,2}$$
$$E_{-1}^{2,-2} = A(2,2)\,X_{-1}^{-3,-2} + A(2,0)\,X_{-1}^{-3,0} + A(2,-2)\,X_{-1}^{-3,2}$$
$$F_{-1}^{2,-2} = -\left\{B(2,2)\,X_{-1}^{-3,-2} + B(2,0)\,X_{-1}^{-3,0} + B(2,-2)\,X_{-1}^{-3,2}\right\}$$

$$E_{-1}^{3,3} = A(3,-3)\,X_{-1}^{-4,-3} + A(3,-1)\,X_{-1}^{-4,-1} + A(3,1)\,X_{-1}^{-4,1} + A(3,3)\,X_{-1}^{-4,3}$$
$$F_{-1}^{3,3} = B(3,-3)\,X_{-1}^{-4,-3} + B(3,-1)\,X_{-1}^{-4,-1} + B(3,1)\,X_{-1}^{-4,1} + B(3,3)\,X_{-1}^{-4,3}$$
$$E_{-1}^{3,1} = A(1,-3)\,X_{-1}^{-4,-3} + A(1,-1)\,X_{-1}^{-4,-1} + A(1,1)\,X_{-1}^{-4,1} + A(1.3)\,X_{-1}^{-4,3}$$
$$F_{-1}^{3,1} = B(1,-3)\,X_{-1}^{-4,-3} + B(1,-1)\,X_{-1}^{-4,-1} + B(1,1)\,X_{-1}^{-4,1} + B(1,3)\,X_{-1}^{-4,3}$$
$$E_{-1}^{3,-1} = A(1,3)\,X_{-1}^{-4,-3} + A(1,1)\,X_{-1}^{-4,-1} + A(1,-1)\,X_{-1}^{-4,1} + A(1,-3)\,X_{-1}^{-4,3}$$
$$F_{-1}^{3,-1} = -\left\{B(1,3)\,X_{-1}^{-4,-3} + B(1,1)\,X_{-1}^{-4,-1} + B(1,-1)\,X_{-1}^{-4,1} + B(1,-3)\,X_{-1}^{-4,3}\right\}$$
$$E_{-1}^{3,-3} = A(3,3)\,X_{-1}^{-4,-3} + A(3,1)\,X_{-1}^{-4,-1} + A(3,-1)\,X_{-1}^{-4,1} + A(3,-3)\,X_{-1}^{-4,3}$$
$$F_{-1}^{3,-3} = -\left\{B(3,3)\,X_{-1}^{-4,-3} + B(3,1)\,X_{-1}^{-4,-1} + B(3,-1)\,X_{-1}^{-4,1} + B(3,-3)\,X_{-1}^{-4,3}\right\}$$

Es ist hieraus ohne Weiteres ersichtlich wie die Coefficienten der übrigen $\Delta_n$ und die von $z'^{-2}$, $z'^{-3}$, etc. berechnet werden müssen. Aus der Tafel des vor. Art. sieht man, dass hier

$$X_0^{-n,\pm(n-1)} = 0$$

ist, und ich hätte daher in Bezug auf das vorliegende Beispiel in den vorstehenden Formeln die betreffenden Glieder, die Null sind, weglassen können. Aber da die eben angeführte Gleichung nicht vorhanden ist, wenn der störende Planet ein unterer ist, in welchem Falle der erste obere Index der $X$Coefficienten positiv ist, so habe ich diese Glieder in den Formeln nicht ausstreichen wollen. Alle $E$ und $F$Coefficienten be-

stehen, wie die vorstehenden Formeln zu erkennen geben, aus einer endlichen Anzahl von Gliedern, und wegen der Kleinheit der Excentricitäten der störenden Planeten werden von diesen viele unmerklich.

Die Ausführung der Multiplicationen, die die obigen Formeln erfordern, wird vorzüglich leicht und geht sehr schnell von statten, wenn man sich die Logarithmen der $X$ Coefficienten columnenweise mit zugefügten Indices auf den untern Rand verschiedener Streifen Papier ausschreibt; die zu $z'^0$ gehörigen auf einen Streifen, die zu $z'^{-1}$ gehörigen auf einen andern u. s. w. Um nun keine unrichtigen Logarithmen zu addiren hat man nur darauf zu sehen, dass der erste Index des $X$ Coefficienten absolut genommen um Eins grösser sei wie der Index $n$ von $\Delta_n$, und dass der zweite Index von $X$ mit dem zweiten Index der $A$ und $B$ Coefficienten übereinstimme, und zwar einmal mit demselben algebraischen Zeichen, und einmal mit dem entgegengesetzten. Im letztgenannten Falle kehren die $F$ Coefficienten ihr Zeichen um. Auf diese Art ist die folgende Tafel berechnet worden, die ich bis $z'^{-5}$ incl. ausgedehnt habe, da sich vorhersehen liess, dass ungefähr bis dahin merkliche Glieder entstehen könnten. Die Columne der Indices giebt hier die Exponenten von $x$.

| | $E$ $z'^0$ | $F$ | | $E$ $z'^{-1}$ | $F$ | | $E$ $z'^{-2}$ | $F$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $\Delta_1$ | | | $\Delta_1$ | | | $\Delta_1$ | |
| | $-\infty$ | $-\infty$ | 1 | 0.56392 | 0.31514 | 1 | 9.61273 | 9.3639[illegible] |
| | $\Delta_2$ | | −1 | 8.7811n | 8.7290n | −1 | 7.8332n | 7.7754n |
| 2 | 8.50385n | 7.7943 | | $\Delta_2$ | | | $\Delta_2$ | |
| 0 | 9.71389 | — | 2 | 8.17017n | 8.29041n | 2 | 9.63291 | 9.85164 |
| −2 | 8.50385n | 7.7943n | 0 | 8.64070 | 6.929 | 0 | 7.8691n | 8.47917n |
| | $\Delta_3$ | | −2 | 7.4275n | 6.728n | −2 | 6.243n | 6.418 |
| 3 | 6.7536n | 6.301n | | $\Delta_3$ | | | $\Delta_3$ | |
| 1 | 7.6107 | 7.4860 | 3 | 8.00980n | 7.5221n | 3 | 7.3067n | 8.03615n |
| −1 | 7.6107 | 7.4860n | 1 | 8.91550 | 8.66722 | 1 | 8.13631 | 7.92257 |
| −3 | 6.7536n | 6.301 | −1 | 7.96534n | 7.92309n | −1 | 7.1967n | 7.1449n |
| | $\Delta_4$ | | −3 | 5.935 | 6.250 | −3 | 5.279 | 5.447 |
| 4 | 5.929 | 5.633n | | $\Delta_4$ | | | $\Delta_4$ | |
| 2 | 7.6024n | 6.9165 | 4 | 5.700n | 5.875n | 4 | 7.3543n | 7.3804n |
| 0 | 8.1972 | — | 2 | 6.452n | 6.755 | 2 | 7.9898 | 8.2111 |
| −2 | 7.6024n | 6.9165n | 0 | 7.3334 | 6.031n | 0 | 7.0600n | 7.5802n |
| −4 | 5.929 | 5.633 | −2 | 6.747n | 6.039n | −2 | 5.623n | 6.086 |
| | | | −4 | 5.100 | 4.708 | −4 | 4.14 | — |

| | $\Delta_5$ | | | $\Delta_5$ | | | $\Delta_5$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 5 | 4.643 | 3.74 | 5 | 5.586 | 4.602 | 5 | 4.932 | 4.04 |
| 3 | 6.104n | 5.699n | 3 | 7.0706n | 6.587n | 3 | 6.417n | 5.935n |
| 1 | 6.215 | 6.396 | 1 | 7.3890 | 7.1445 | 1 | 6.736 | 6.490 |
| −1 | 6.215 | 6.396n | −1 | 6.9805n | 6.9325n | −1 | 6.332n | 6.272n |
| −3 | 6.104n | 5.699 | −3 | 5.415 | 5.724 | −3 | 4.903 | 5.039 |
| −5 | 4.643 | 3.74n | | $\Delta_6$ | | | $\Delta_6$ | |
| | $\Delta_6$ | | 4 | 5.204n | 5.380n | 6 | 5.056 | 4.929 |
| 4 | 5.322 | 5.041n | 2 | 5.708n | 5.708 | 4 | 6.383n | 6.426n |
| 2 | 6.573n | 5.881 | 0 | 5.857 | 5.475n | 2 | 6.405 | 6.641 |
| 0 | 6.6294 | — | −2 | 5.862n | 5.079n | 0 | 6.072n | 6.551n |
| −2 | 6.573n | 5.881n | −4 | 4.650 | 4.258 | −2 | 4.78n | 5.415 |
| −4 | 5.322 | 5.041 | | $\Delta_7$ | | | $\Delta_7$ | |
| | $\Delta_7$ | | 5 | 4.950 | 4.060 | 5 | 4.00 | 4.747n |
| 5 | 4.170 | — | 3 | 6.014n | 5.536n | 3 | 5.453n | 4.602n |
| 3 | 5.204n | 4.845n | 1 | 5.681 | 5.477 | 1 | 5.176 | 4.30 |
| 1 | 4.778n | 5.230 | −1 | 5.914n | 5.852n | −1 | 5.360n | 5.291n |
| −1 | 4.778n | 5.230n | −3 | 4.70 | 5.000 | −3 | 4.28 | 4.38 |
| −3 | 5.204n | 4.845 | | $\Delta_8$ | | | $\Delta_8$ | |
| −5 | 4.170 | — | 4 | 4.446n | 4.489n | 6 | 4.39 | 4.26 |
| | $\Delta_8$ | | 2 | 4.866n | 4.155 | 4 | 5.304n | 5.347n |
| 4 | 4.564 | 4.172n | 0 | 4.154n | 4.592n | 2 | 4.00 | 4.60 |
| 2 | 5.474n | 4.764 | −2 | 4.866n | 4.155n | 0 | 5.013n | 5.450n |
| 0 | 4.316 | — | | | | −2 | 4.09n | 4.62 |
| −2 | 5.474n | 4.764n | | | | | | |
| −4 | 4.564 | 4.172 | | | | | | |

| | $E$ | $z'^{-3}$ $F$ | | $E$ | $z'^{-4}$ $F$ | | $E$ | $z'^{-5}$ $F$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $\Delta_1$ | | | $\Delta_1$ | | | $\Delta_1$ | |
| 1 | 8.5877 | 8.3389 | 1 | 7.534 | 7.286 | 1 | 6.466 | 6.217 |
| −1 | 6.810n | 6.749n | −1 | 5.762n | 5.693n | −1 | 4.69n | 4.62n |
| | $\Delta_2$ | | | $\Delta_2$ | | | $\Delta_2$ | |
| 2 | 8.92566 | 9.14423 | 2 | 8.05920 | 8.27763 | 2 | 7.1233 | 7.3417 |
| 0 | 7.2706n | 7.718n | 0 | 6.431n | 6.905n | 0 | 5.505n | 5.969n |
| −2 | 4.903n | 5.748 | −2 | 4.00n | 4.912 | −2 | — | 3.9 |
| | $\Delta_3$ | | | $\Delta_3$ | | | $\Delta_3$ | |
| 3 | 7.7240 | 9.25799 | 3 | 7.1838 | 8.70741 | 3 | 6.438 | 7.9578 |
| 1 | 7.5318 | 7.9738n | 1 | 6.821 | 7.4495n | 1 | 6.017 | 6.708n |
| −1 | 6.427n | 5.322 | −1 | 5.623n | 5.556 | −1 | 4.78n | 4.90 |
| −3 | 4.43 | 4.53 | | $\Delta_4$ | | | $\Delta_4$ | |
| | $\Delta_4$ | | 4 | 8.28560n | 8.56254 | 4 | 7.8505n | 8.1293 |
| 4 | 7.0394 | 7.5765n | 2 | 7.3813 | 7.2611n | 2 | 6.898 | 6.918n |
| 2 | 7.3598 | 7.6332 | 0 | 6.104n | 5.987n | 0 | 5.532n | 4.00 |
| 0 | 6.504n | 6.982n | −2 | 3.9 | 4.74 | | | |
| −2 | 4.00n | 5.505 | | | | | | |

| | | $\Delta_5$ |
|---|---|---|
| 5 | 6.391*n* | 6.9727*n* |
| 3 | 5.919 | 7.5958 |
| 1 | 6.446 | 7.0592*n* |
| —1 | 5.732*n* | 5.477 |
| —3 | 4.12 | 4.22 |
| | | $\Delta_6$ |
| 6 | 4.00 | 5.041 |
| 4 | 5.799*n* | 6.008*n* |
| 2 | 5.863 | 6.149 |
| 0 | 5.591*n* | 6.035*n* |
| —2 | — | 4.930 |
| | | $\Delta_7$ |
| 7 | 4.647 | 4.293 |
| 5 | 5.351*n* | 5.995*n* |
| 3 | 4.301*n* | 5.940 |
| 1 | 5.279 | 6.017*n* |
| —1 | 4.903*n* | 4.78 |
| | | $\Delta_8$ |
| 6 | 3.9 | — |
| 4 | 4.856*n* | 4.900*n* |
| 2 | 3.9 | 4.15 |
| 0 | 4.565*n* | 5.002*n* |
| —2 | — | 4.17 |

| | | $\Delta_5$ |
|---|---|---|
| 5 | 6.940 | 6.969*n* |
| 3 | 5.820*n* | 7.1357 |
| 1 | 5.909 | 6.597*n* |
| —1 | 5.041*n* | 5.176 |
| | | $\Delta_6$ |
| 6 | 5.820 | 6.433*n* |
| 4 | 6.603*n* | 6.861 |
| 2 | 6.367 | 6.387*n* |
| 0 | 5.415*n* | 4.78*n* |
| —2 | — | 4.20 |
| | | $\Delta_7$ |
| 7 | 4.00*n* | 4.50 |
| 5 | — | 5.643*n* |
| 3 | 4.60*n* | 5.556 |
| 1 | 4.82 | 5.609*n* |
| —1 | 4.16*n* | 4.60 |
| | | $\Delta_8$ |
| 8 | — | 4.20 |
| 6 | 4.905 | 5.429*n* |
| 4 | 4.954*n* | 5.000 |
| 2 | 5.257 | 5.353*n* |
| 0 | 4.60*n* | — |

| | | $\Delta_5$ |
|---|---|---|
| 5 | 7.9097*n* | 7.7142 |
| 3 | 6.942 | 5.863*n* |
| 1 | 5.301*n* | 5.875*n* |
| —1 | 4.16*n* | 4.60 |
| | | $\Delta_6$ |
| 6 | 6.569 | 6.130*n* |
| 4 | 6.312*n* | 6.486 |
| 2 | 5.978 | 6.041*n* |
| 0 | 4.95*n* | 4.48 |
| | | $\Delta_7$ |
| 7 | 5.716 | 5.763*n* |
| 5 | 6.179*n* | 5.945 |
| 3 | 5.952 | 5.447*n* |
| 1 | 4.78*n* | 4.90*n* |
| | | $\Delta_8$ |
| 8 | 4.27*n* | — |
| 6 | 4.85 | 5.104*n* |
| 4 | 4.70*n* | 4.77 |
| 2 | 4.932 | 5.028*n* |
| 0 | 4.13*n* | 4.06 |

Um diese Rechnung auch durch Beispiele zu erläutern, will ich zuerst die Rechnung für $E_0^{4,2}$ und $F_0^{4,2}$ hersetzen. Durch Anlegen des Papierstreifen für die mit $z'^0$ multiplicirten Glieder an die betreffenden Logarithmen von $\Delta_4$ der Tafel des Art. 5 fanden sich

$$\log A(2,-2)\,X_0^{-5,-2} = 5.367 \qquad \log B(2,-2)\,X_0^{-5,-2} = 5.586$$
$$\log A(2,0)\quad X_0^{-5,0} = 7.6048n \qquad \log B(2,0)\quad X_0^{-5,0} = 6.8953$$

die übrigen Glieder sind unmerklich. Die zu diesen Logarithmen gehörigen Zahlen sind:

$$E_0^{4,2} = \begin{cases} +0.000023 \\ -0.004026 \end{cases} \qquad F_0^{4,2} = \begin{cases} +0.000039 \\ +0.000786 \end{cases}$$
$$= -0.004003 \qquad\qquad = +0.000825$$
$$\log = 7.6024n \qquad\qquad \log = 6.9165$$

wie oben angeführt. Für $E_{-2}^{3,-1}$ und $F_{-2}^{3,-1}$ fand sich

$\log A(1,3)\ X_{-2}^{-4,-3} = 4.603$ $\quad$ $\log B(1,3)\ X_{-2}^{-4,-3} = 5.034$

$\log A(1,1)\ X_{-2}^{-4,-1} = 7.2055n$ $\quad$ $\log B(1,1)\ X_{-2}^{-4,-1} = 7.1364$

$\log A(1,-1)\ X_{-2}^{-4,1} = 5.443$ $\quad$ $\log B(1,-1)\ X_{-2}^{-4,1} = 5.194$

$$E_{-2}^{3,-1} = \begin{Bmatrix} +0.000004 \\ -0.001605 \\ +0.000028 \end{Bmatrix} \qquad F_{-2}^{3,-1} = -\begin{Bmatrix} +0.000011 \\ +0.001369 \\ +0.000016 \end{Bmatrix}$$

$$= -0.001573 \qquad\qquad = -0.001396$$

$$\log = 7.1967n \qquad\qquad \log = 7.1449n$$

wie oben in der Tafel. Nie wurden mehr wie drei Glieder merklich, häufig nur zwei oder Ein Glied. Ich hätte auch manchmal noch mehr abkürzen können, da ich in den meisten Gliedern mehr Decimalstellen berechnet habe, wie unumgänglich nöthig war.

9.

Die im vor. Art. erklärten Rechnungen lassen sich wieder mit geringer Mühe durch die obige abgekürzte für $f = 0$ geltende Entwickelung controliren. Die Elimination von $r'$ und $x'$ aus dieser führt auf folgende Ausdrücke

$$\left(\frac{a'}{r'}\right)^3 \Delta_2 = \left[R_0^{(2)} + iS_0^{(2)}\right] z'^0 + \left[R_{-1}^{(2)} + iS_{-1}^{(2)}\right] z'^{-1} + \ldots$$

$$\left(\frac{a'}{r'}\right)^4 \Delta_3 = \left[R_0^{(3)} + iS_0^{(3)}\right] z'^0 + \left[R_{-1}^{(3)} + iS_{-1}^{(3)}\right] z'^{-1} + \ldots$$

etc.

wo

$$R_0^{(2)} = 2P(2,-2)\, X_0^{-3,-2} + P(2,0)\, X_0^{-3,0}$$

$$S_0^{(2)} = 0$$

$$\tfrac{1}{2} R_0^{(3)} = P(3,-3)\, X_0^{-4,-3} + P(3,-1)\, X_0^{-4,-1}$$

$$S_0^{(3)} = 0$$

$$R_{-1}^{(2)} = P(2,-2)\, X_{-1}^{-3,-2} + P(2,0)\, X_{-1}^{-3,0} + P(2,-2)\, X_{-1}^{-3,2}$$

$$S_{-1}^{(2)} = Q(2,-2)\, X_{-1}^{-3,-2} \qquad\qquad - Q(2,-2)\, X_{-1}^{-3,2}$$

$$R_{-1}^{(3)} = P(3,-3)\, X_{-1}^{-4,-3} + P(3,-1)\, X_{-1}^{-4,-1} + P(3,-1)\, X_{-1}^{-4,1} + P(3,-3)\, X_{-1}^{-4,3}$$

$$S_{-1}^{(3)} = Q(3,-3)\, X_{-1}^{-4,-3} + Q(3,-1)\, X_{-1}^{-4,-1} - Q(3,-1)\, X_{-1}^{-4,1} - Q(3,-3)\, X_{-1}^{-4,3}$$

etc.

Macht man aber in den Ausdrücken des vor. Art. alle Exponenten von $x$ gleich Null, so muss man die vorstehenden Coefficienten wieder bekommen, es wird also auch

$$R_0^{(2)} = 2E_0^{2,2} + E_0^{2,0}$$
$$\tfrac{1}{2}R_0^{(3)} = E_0^{3,3} + E_0^{3,1}$$

---

$$R_{-1}^{(2)} = E_{-1}^{2,2} + E_{-1}^{2,0} + E_{-1}^{2,-2}$$
$$S_{-1}^{(2)} = F_{-1}^{2,2} + F_{-1}^{2,0} + F_{-1}^{2,-2}$$
$$R_{-}^{(3)} = E_{-1}^{3,3} + E_{-1}^{3,1} + E_{-1}^{3,-1} + E_{-1}^{3,-3}$$
$$S_{-1}^{(3)} = F_{-1}^{3,3} + F_{-1}^{3,1} + F_{-1}^{3,-1} + F_{-1}^{3,-3}$$
etc.

welche die Controle bilden. Die einzigen Coefficienten, die hier uncontrolirt bleiben, sind die mit $iz'^0$ multiplicirten, nemlich $F_0^{2,2}$, $F_0^{2,0}$, $F_0^{2,-2}$, $F_0^{3,3}$, etc. Man kann aber leicht die directe Berechnung dieser wiederholen, wenn man es für nöthig halten sollte.

## 10.

Es ist nun nur noch die dritte und letzte Operation übrig, nemlich die durch welche die Functionen von $r$ und $x$, die in den Producten $\left(\frac{r}{a}\right)^n \left(\frac{a'}{r'}\right)^{n+1} \varDelta_n$ enthalten sind, in Function der zur excentrischen Anomalie des gestörten Planeten gehörigen, imaginären Exponentialfunction ausgedrückt werden, welche Function ich mit $y$ bezeichnen werde.

Die Aufgabe das Product $r^n x^m$ in eine nach den ganzen Potenzen von $y$ fortschreitende Reihe zu verwandeln, habe ich in §. III meiner zuletzt angezogenen Abhandlung gelöst, und ich brauche daher auch diese Formeln hier nur zu recapituliren. Ich bemerke hiebei, dass in der Störungsfunction nur solche Werthe von $n$ und $m$ mit einander verbunden vorkommen, die sich durch endliche Reihen in $y$ darstellen lassen. Es sind dieses die Functionen

$$r^n x^n;\ r^n x^{n-2};\ r^n x^{n-4};\ \ldots\ r^n x^{-n}$$

in welchen $n$ immer eine ganze und positive Zahl ist. Setzt man nun wie a. a. O.

$$\left(\frac{r}{a}\right)^n x^m = \Sigma_{-n}^{+n} W_i^{n,m} y^i$$

so bekommt man zuerst für $m = n$

$$W^{n,n}_{n} = \cos^{2n}\tfrac{1}{2}\varphi\,;\quad W^{n,n}_{n-1} = -\tfrac{2n}{1}\beta W^{n,n}_{n}\,;\quad W^{n,n}_{n-2} = -\tfrac{2n-1}{2}\beta W^{n,n}_{n-1}\,;$$
$$W^{n,n}_{n-3} = -\tfrac{2n-2}{3}\beta W^{n,n}_{n-2}\,;\ \text{etc.}$$

Man braucht nur die Coefficienten für die positiven Potenzen (die 0te eingeschlossen) von $y$ anzusetzen, und bekommt durch Fortsetzung der vorstehenden Gleichungen, und wegen der Gleichung

$$W^{n,-m}_{-i} = W^{n,m}_{i}$$

ohne Weiteres auch die erforderlichen Coefficienten von $\left(\frac{r}{a}\right)^n x^{-n}$. Durch Anwendung des allgemeinen Ausdrucks dieser Coefficienten, nemlich durch

$$W^{n,n}_{n-k} = (-1)^{n-k}\frac{2n.2n-1\ldots 2n-k+1}{1.2\ldots k}\beta^k\cos^{2n}\tfrac{1}{2}\varphi$$

kann man jede durch die vorstehenden Formeln berechnete Gruppe derselben controliren. Hat man nun auf diese Art die Coefficienten für $m=n$ berechnet, so ergeben sich die für alle anderen, hier anzuwendenden Werthe von $m$, das ist von $n-2$, $n-4$, etc. durch eine der beiden folgenden Formeln mit Leichtigkeit und Sicherheit,

$$W^{n+1,m-1}_{i} = \beta^2\cos^2\tfrac{1}{2}\varphi\,.\,W^{n,m}_{i-1} - 2\beta\cos^2\tfrac{1}{2}\varphi\,.\,W^{n,m}_{i} + \cos^2\tfrac{1}{2}\varphi\,.\,W^{n,m}_{i+1}$$
$$W^{n+1,m+1}_{i} = \cos^2\tfrac{1}{2}\varphi\,.\,W^{n,m}_{i-1} - 2\beta\cos^2\tfrac{1}{2}\varphi\,.\,W^{n,m}_{i} + \beta^2\cos^2\tfrac{1}{2}\varphi\,.\,W^{n,m}_{i+1}$$

Zur Controle kann man schliesslich, wenn man es für nöthig hält, einige Reihen der $W$Coefficienten durch die a. a. O. gegebenen Kettenbrüche berechnen, übrigens lässt sich die Richtigkeit dieser Coefficienten auch oft durch die Differenzen zwischen den Logarithmen derselben prüfen.

Es ist noch anzuführen, dass hier unter $\varphi$ der Excentricitätswinkel des gestörten Planeten verstanden werden muss, so wie dass wieder

$$\beta = \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\varphi$$

ist. Mit dem im Art. 1 angegebenen Excentricitätswinkel der Egeriabahn fanden sich nun die folgenden Werthe der $W$Coefficienten.

| n,m | $y^0$ | $y$ | $y^2$ | $y^3$ | $y^4$ | $y^5$ | $y^6$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1, 1 | 8.92877n | 9.999216 | | | | | |
| 1,-1 | 8.92877n | 7.2563 | | | | | |
| 2, 2 | 8.03363 | 9.22902n | 9.998432 | | | | |
| 2, 0 | 0.001561 | 8.92877n | 7.2555 | | | | |
| 2,-2 | 8.03363 | 6.4861n | 4.513 | | | | |
| 3, 3 | 7.1843n | 8.43079 | 9.40432n | 9.99765 | | | |
| 3, 1 | 9.23058n | 0.003890 | 8.92878n | 7.2547 | | | |
| 3,-1 | 9.23058n | 8.03389 | 6.4857n | 4.512 | | | |
| 3,-3 | 7.1843n | 5.688 | 3.9n | — | | | |
| 4, 4 | 6.3561 | 7.6306n | 8.70107 | 9.52848n | 9.99686 | | |
| 4, 2 | 8.43210 | 9.40744n | 0.00620 | 8.92877n | 7.2539 | | |
| 4, 0 | 0.00929 | 9.23214n | 8.0342 | 6.4853n | 4.511 | | |
| 4,-2 | 8.43210 | 7.1847n | 5.688 | 3.9n | — | | |
| 4,-4 | 6.3561 | 4.888n | — | — | — | | |
| 5, 5 | 5.540n | 6.8324 | 7.9608n | 8.9063 | 9.6246n | 9.9961 | |
| 5, 3 | 7.6318n | 8.7034 | 9.5332n | 0.0085 | 8.9288n | 7.253 | |
| 5. 1 | 9.4106n | 0.0147 | 9.2337n | 8.0344 | 6.485n | 4.510 | |
| 5,-1 | 9.4106n | 8.4334 | 7.1851n | 5.688 | 3.9n | — | |
| 5,-3 | 7.6318n | 6.357 | 4.888n | — | — | — | |
| 5,-5 | 5.540n | 4.1 | — | — | — | — | |
| 6, 6 | 4.73 | 6.037n | 7.2040 | 8.2233n | 9.0719 | 9.7030n | 9.9953 |
| 6, 4 | 6.834 | 7.9628n | 8.9097 | 9.6309n | 0.0108 | 8.9288n | 7,2523 |
| 6, 2 | 8.7058 | 9.5378n | 0.0199 | 9.2353n | 8.0347 | 6.484n | 4.51 |
| 6, 0 | 0.0230 | 9.4136n | 8.4347 | 7.1855n | 5.688 | 3 9n | — |
| 6,-2 | 8.7058 | 7.6330n | 6.357 | 4.89n | — | — | — |
| 6,-4 | 6.834 | 5,540n | 4.1 | — | — | — | — |
| 6,-6 | 4.73 | — | — | — | — | — | — |
| 7, 7 | — | 5.243 | 6.439n | 7.5090 | 8.4412n | 9.2106 | 9.7692n |
| 7, 5 | 6.038n | 7.2057 | 8.2260n | 9.0763 | 9.7108n | 0 0130 | 8.9287n |
| 7, 3 | 7.9647n | 8.9131 | 9.6371n | 0.0252 | 9.2368n | 8.0349 | 6.484n |
| 7, 1 | 9.5425n | 0.0312 | 9.4167n | 8.4360 | 7.1859n | 5.688 | — |
| 7,-1 | 9.5425n | 8.7081 | 7.634n | 6.358 | 4.9n | — | — |
| 7,-3 | 7.9647n | 6.835 | 5.540n | — | — | — | — |
| 7,-5 | 6.038n | — | — | — | — | — | — |
| 8, 8 | — | — | 5.668 | 6.777n | 7.768 | 8.627n | 9.330 |
| 8, 6 | — | 6.440n | 7.511 | 8.445n | 9.216 | 9.779n | 0.015 |
| 8, 4 | 7.207 | 8.229n | 9.081 | 9.719n | 0.030 | 9.238n | 8.035 |
| 8, 2 | 8.916 | 9.643n | 0.039 | 9.420n | 8.437 | 7.186n | 5.69 |
| 8, 0 | 0.042 | 9.547n | 8.710 | 7.635n | 6.358 | — | — |
| 8,-2 | 8.916 | 7.967n | 6.836 | 5.54n | — | — | — |
| 8,-4 | 7.207 | 6.039n | — | — | — | — | — |

## 11.

Die Anwendung der WCoefficienten ist der der XCoefficienten ganz analog. Die bis jetzt erlangten, im Art. 8 angeführten Ausdrücke will ich jetzt so schreiben,

$$\left(\frac{a'}{r'}\right)^3 \varDelta_2 = x^2\ \Sigma\left\{E^{2,2}_{-i'} + \sqrt{-1}.F^{2,2}_{-i'}\right\} z'^{-i'}$$
$$+ x^0\ \Sigma\left\{E^{2,0}_{-i'} + \sqrt{-1}.F^{2,0}_{-i'}\right\} z'^{-i'}$$
$$+ x^{-2}\Sigma\left\{E^{2,-2}_{-i'} + \sqrt{-1}.F^{2,-2}_{-i'}\right\} z'^{-i'}$$
$$\left(\frac{a'}{r'}\right)^4 \varDelta_3 = x^3\ \Sigma\left\{E^{3,3}_{-i'} + \sqrt{-1}.F^{3,3}_{-i'}\right\} z'^{-i'}$$
$$+ x\ \Sigma\left\{E^{3,1}_{-i'} + \sqrt{-1}.F^{3,1}_{-i'}\right\} z'^{-i'}$$
$$+ x^{-1}\Sigma\left\{E^{3,-1}_{-i'} + \sqrt{-1}.F^{3,-1}_{-i'}\right\} z'^{-i'}$$
$$+ x^{-3}\Sigma\left\{E^{3,-3}_{-i'} + \sqrt{-1}.F^{3,-3}_{-i'}\right\} z'^{-i'}$$

etc.

wo $i'$ eine ganze und positive Zahl, die Null eingeschlossen, bedeutet, und weil $i$ auch in dieser Bedeutung hier angewandt werden wird, nicht mehr $i$ für $\sqrt{-1}$ geschrieben worden ist. Nach der Substitution der im vor. Art. entwickelten Ausdrücke für $\left(\frac{r}{a}\right)^2 x^2$, $\left(\frac{r}{a}\right)^2$, etc. nehmen die vorstehenden Grössen folgende Form an:

$$\left(\frac{r}{a}\right)^2\left(\frac{a'}{r'}\right)^3 \varDelta_2 = \Sigma\Sigma\left\{G^{(2)}_{i,-i'} + \sqrt{-1}.H^{(2)}_{i,-i'}\right\} y^i z'^{-i'}$$
$$+ \Sigma\Sigma\left\{G^{(2)}_{-i,-i'} + \sqrt{-1}.H^{(2)}_{-i,-i'}\right\} y^{-i} z'^{-i'}$$
$$\left(\frac{r}{a}\right)^3\left(\frac{a'}{r'}\right)^4 \varDelta_3 = \Sigma\Sigma\left\{G^{(3)}_{i,-i'} + \sqrt{-1}.H^{(3)}_{i,-i'}\right\} y^i z'^{-i'}$$
$$+ \Sigma\Sigma\left\{G^{(3)}_{-i,-i'} + \sqrt{-1}.H^{(3)}_{-i,-i'}\right\} y^{-i} z'^{-i'}$$

etc.

wo auch $i$ eine ganze und positive Zahl, die Null eingeschlossen, bedeutet. Man darf aber den Werth $i = 0$ immer nur auf die eine Zeile, gleichviel welche, der vorstehenden Ausdrücke anwenden. Substituirt man nun die Ausdrücke des vor. Art., so findet man

$$G^{(2)}_{i,-i'} = E^{2,2}_{-i'}\, W^{2,2}_i + E^{2,0}_{-i'}\, W^{2,0}_i + E^{2,-2}_{-i'}\, W^{2,-2}_i$$
$$H^{(2)}_{i,-i'} = F^{2,2}_{-i'}\, W^{2,2}_i + F^{2,0}_{-i'}\, W^{2,0}_i + F^{2,-2}_{-i'}\, W^{2,-2}_i$$

$$G^{(2)}_{-i,-i'} = E^{2,-2}_{-i'} W^{2,2}_{i} + E^{2,0}_{-i'} W^{2,0}_{i} + E^{2,2}_{-i'} W^{2,-2}_{i}$$
$$H^{(2)}_{-i,-i'} = F^{2,-2}_{-i'} W^{2,2}_{i} + F^{2,0}_{-i'} W^{2,0}_{i} + F^{2,2}_{-i'} W^{2,-2}_{i}$$

---

$$G^{(3)}_{i,-i'} = E^{3,3}_{-i'} W^{3,3}_{i} + E^{3,1}_{-i'} W^{3,1}_{i} + E^{3,-1}_{-i'} W^{3,-1}_{i} + E^{3,-3}_{-i'} W^{3,-3}_{i}$$
$$H^{(3)}_{i,-i'} = F^{3,3}_{-i'} W^{3,3}_{i} + F^{3,1}_{-i'} W^{3,1}_{i} + F^{3,-1}_{-i'} W^{3,-1}_{i} + F^{3,-3}_{-i'} W^{3,-3}_{i}$$
$$G^{(3)}_{-i,-i'} = E^{3,-3}_{-i'} W^{3,3}_{i} + E^{3,-1}_{-i'} W^{3,1}_{i} + E^{3,1}_{-i'} W^{3,-1}_{i} + E^{3,3}_{-i'} W^{3,-3}_{i}$$
$$H^{(3)}_{-i,-i} = F^{3,-3}_{-i'} W^{3,3}_{i} + F^{3,-1}_{-i'} W^{3,1}_{i} + F^{3,1}_{-i'} W^{3,-1}_{i} + F^{3,3}_{-i'} W^{3,-3}_{i}$$

---

und eben so für die übrigen $\Delta_n$. Für $i = 0$ ist es gleichgültig ob man sich der Ausdrücke bedient, die linker Hand $+i$, oder derer die $-i$ haben. Die Rechnung wird am besten eben so ausgeführt, wie die im Art. 8 für die Anwendung der $X$ Coefficienten beschriebene. Man muss nemlich auch die $W$ Coefficienten columnenweise auf verschiedene Streifen Papier auf den unteren Rand schreiben, nemlich erst die zu $y^0$ gehörigen der Reihe nach, dann die zu $y$ gehörigen, dann die zu $y^2$ gehörigen u. s. w.

12.

Nach der Ausführung der eben beschriebenen Berechnung der $G$ und $H$ Coefficienten werden die betreffenden Glieder addirt, wodurch man die Entwickelungscoefficienten der Störungsfunction erhält. Setzt man nemlich

$$2a\Omega = \Sigma\Sigma\,\{K(i,-i') + \sqrt{-1}\,.\,L(i,-i')\}\, y^{i} z^{-i'}$$

wo $i$ sowohl wie $i'$ ganze, positive und negative Zahlen sind, die negativen Werthe von $i'$ aber unberücksichtigt gelassen werden dürfen, weil nothwendig

$$K(-i,i') = K(i,-i')$$
$$L(-i,i') = -L(i,-i')$$

wird, so wird allgemein

$$\left.\begin{aligned} K(i,-i') &= G^{(2)}_{i,-i'} + G^{(3)}_{i,-i} + G^{(4)}_{i,-i'} + \text{etc.} \\ L(i,-i') &= H^{(2)}_{i,-i'} + H^{(3)}_{i,-i'} + H^{(4)}_{i,-i'} + \text{etc.} \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Hiebei ist zu bemerken, dass wenn ohne Rücksicht auf das Zeichen

$$i > 2$$

ist, die ersten Glieder dieser Ausdrücke Null werden, und die Aus-

drücke selbst mit $G^{(i)}_{i,-i'}$ und bez. $H^{(i)}_{i,-i'}$ anfangen. Der Grund davon liegt in dem Umstande, dass in der Entwickelung von $\left(\frac{r}{a}\right)^n x^m$ nach $y^i$ der Exponent $i$ nie grösser werden kann wie $n$, und hierin hat die grössere Convergenz der nach den Potenzen von $y$ entwickelten Störungsfunction ihren Grund, indem die solcher Gestalt wegfallenden Glieder grade zu den grösseren der überhaupt vorhandenen gehören.

Setzt man ferner

$$2ar\left(\frac{d\Omega}{dr}\right) = \Sigma\Sigma\left\{M(i,-i') + \sqrt{-1}\,.\,N(i,-i')\right\} y^i z'^{-i'}$$

so bekommt man sogleich

$$(4)\quad \ldots \left\{\begin{aligned} M(i,-i') &= 2G^{(2)}_{i,-i'} + 3G^{(3)}_{i,-i'} + 4G^{(4)}_{i,-i'} + \text{etc.} \\ N(i,-i') &= 2H^{(2)}_{i,-i'} + 3H^{(3)}_{i,-i'} + 4H^{(4)}_{i,-i'} + \text{etc.} \end{aligned}\right.$$

Sei ferner

$$2a\left\{r^2\left(\frac{d^2\Omega}{dr^2}\right) + r\left(\frac{d\Omega}{dr}\right)\right\} = \Sigma\Sigma\left\{R(i,-i') + \sqrt{-1}\,.\,S(i,-i')\right\} y^i z'^{-i'}$$

so wird

$$\begin{aligned} R(i,-i') &= 2.2G^{(2)}_{i,-i'} + 3.3G^{(3)}_{i,-i'} + 4.4G^{(4)}_{i,-i'} + \text{etc.} \\ S(i,-i') &= 2.2H^{(2)}_{i,-i'} + 3.3H^{(3)}_{i,-i'} + 4.4H^{(4)}_{i,-i'} + \text{etc.} \end{aligned}$$

wodurch diese Differentialquotienten der Störungsfunction auf die einfachste Art erhalten werden. Geht man nun zum Reellen über, so wird sogleich

$$\begin{aligned} a\Omega &= \Sigma\Sigma K(i,-i')\cos(i\varepsilon - i'g') - \Sigma\Sigma L(i,-i')\sin(i\varepsilon - i'g') \\ ar\left(\frac{d\Omega}{dr}\right) &= \Sigma\Sigma M(i,-i')\cos(i\varepsilon - i'g') - \Sigma\Sigma N(i,-i')\sin(i\varepsilon - i'g') \\ ar^2\left(\frac{d^2\Omega}{dr^2}\right) + ar\left(\frac{d\Omega}{dr}\right) &= \Sigma\Sigma R(i,-i')\cos(i\varepsilon - i'g') - \Sigma\Sigma S(i,-i')\sin(i\varepsilon - i'g') \end{aligned}$$

wo $\varepsilon$ die excentrische Anomalie des gestörten, und $g'$ die mittlere Anomalie des störenden Planeten ist. Hier darf der Index $i'$ nur auf positive Werthe, die Null eingeschlossen, ausgedehnt werden, und statt des constanten Gliedes erhält man das doppelte desselben; es sind mit andern Worten

$$K(0,0),\ M(0,0) \text{ und } R(0,0)$$

die doppelten Werthe der bez. constanten Glieder. Zwischen den verschiedenen Gliedern, aus welchen zufolge (3) die $K$ und $L$ Coefficienten bestehen, findet eine merkwürdige Relation statt, die namentlich in den

Fällen, in welchen $\nu$ nicht ganz klein ist, wesentlich zur Abkürzung der Berechnung der höheren Glieder dieser Coefficienten beiträgt. Diese Relation, die ich hier blos anführen werde, lässt sich so aussprechen:

„Wenn $n$ eine grosse Zahl ist, so bilden einerseits die $G_{i,-i'}^{(n)'}$ und „$H_{i,-i'}^{(n)}$ deren oberer Index eine grade Zahl ist, und andern Theils „diejenigen deren oberer Index eine ungrade Zahl ist, unter ein- „ander eine geometrische Progression."

Die Logarithmen dieser Grössen bilden also eine arithmetische Reihe ersten Ranges, und man kann, wenn der grösste für $n$ in den vorhergehenden Rechnungen angenommene Werth nicht hinreichend gross ist, um die gewünschte Anzahl von Decimalen sicher zu erhalten, durch einfache Interpolation der Logarithmen, oder Fortsetzung der arithmetischen Reihe, die sie bilden, die noch nöthigen Glieder hinzufügen. Wenn $n$ nicht so gross ist, dass sich in der angegebenen Anzahl von Decimalstellen die geometrische Reihe vollständig ausspricht, so werden die Logarithmen eine arithmetische Reihe zweiten Ranges bilden, und man kann durch Zuziehung der zweiten Differenzen derselben die Zahl der $G$ und $H$ Grössen vermehren.

13.

Durch die im vor. Art. erklärten Rechnungen ergaben sich aus den Angaben der Tafel des Art. 8 die folgenden Coefficienten der Störungsfunction und des mit $r$ multiplicirten Differentialquotienten derselben nach $r$, die ich in reeller Form ansetze.

| $\varepsilon$ $g'$ | $a\Omega$ | | $ar\left(\frac{d\Omega}{dr}\right)$ | |
|---|---|---|---|---|
| | cos | sin | cos | sin |
| 0, 0 | +0.″5335 | | +1.″0987 | |
| 1, 0 | —0.03583 | —0.″00202 | —0.07022 | —0.″00737 |
| 2, 0 | —0.0353 | —0.0069 | —0.0803 | —0.0155 |
| 3, 0 | —0.0003 | +0.0003 | —0.0008 | +0.0001 |
| 4, 0 | +0.0001 | +0.0001 | +0.0005 | +0.0002 |
| —3,—1 | +0.0001 | —0.0002 | +0.001 | —0.001 |
| —2,—1 | —0.0023 | —0.0001 | —0.005 | —0.001 |
| —1,—1 | —0.0129 | +0.0088 | —0.038 | +0.028 |
| 0,—1 | +0.0332 | +0.0061 | +0.057 | +0.019 |
| 1,—1 | +0.0837 | —0.0512 | +0.257 | —0.153 |
| 2,—1 | —0.0194 | +0.0220 | —0.044 | +0.046 |
| 3,—1 | —0.0112 | +0.0037 | —0.036 | +0.012 |
| 4,—1 | 0.0000 | +0.0001 | 0.000 | 0.000 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| −2, −2 | −0.0001 | −0.0005 | 0.000 | −0.001 |
| −1, −2 | −0.0009 | −0.0015 | −0.004 | −0.003 |
| 0, −2 | −0.0059 | +0.0278 | −0.017 | +0.065 |
| 1, −2 | −0.0602 | +0.1130 | −0.110 | +0.224 |
| 2, −2 | +0.4373 | −0.7268 | +0.894 | −1.490 |
| 3, −2 | −0.0023 | +0.0114 | −0.007 | +0.035 |
| 4, −2 | −0.0025 | +0.0026 | −0.010 | +0.011 |
| −1, −3 | −0.0001 | −0.0005 | −0.001 | −0.001 |
| 0, −3 | −0.0019 | +0.0037 | −0.005 | +0.007 |
| 1, −3 | −0.0108 | +0.0298 | −0.018 | +0.070 |
| 2, −3 | +0.0847 | −0.0969 | +0.173 | −0.154 |
| 3, −3 | +0.0048 | −0.1851 | +0.014 | −0.564 |
| 4, −3 | +0.0011 | +0.0037 | +0.004 | +0.015 |
| 5, −3 | −0.0003 | +0.0010 | −0.001 | +0.005 |
| 0, −4 | −0.0004 | +0.0003 | −0.001 | 0.000 |
| 1, −4 | −0.0019 | +0 0046 | −0.005 | +0.011 |
| 2, −4 | +0.0127 | −0.0056 | +0.029 | +0.004 |
| 3, −4 | +0.0080 | −0.0396 | +0.034 | −0.109 |
| 4, −4 | −0.0199 | −0.0373 | −0.081 | −0.151 |
| 5, −4 | +0.0009 | +0.0009 | +0.004 | +0.004 |
| 6, −4 | +0.0001 | +0.0003 | +0.001 | +0.002 |
| 1, −5 | −0.0003 | +0.0005 | −0.001 | +0.001 |
| 2, −5 | +0.0015 | +0.0003 | +0.003 | +0.004 |
| 3, −5 | +0.0030 | −0 0048 | +0.012 | −0.010 |
| 4, −5 | −0.0038 | −0.0115 | −0.012 | −0.044 |
| 5, −5 | −0.0084 | −0.0053 | −0.042 | −0.027 |
| 6, −5 | +0.0004 | +0.0001 | +0.002 | +0.001 |

Vom zweiten Differentialquotienten der Störungsfunction nach $r$ habe ich nur die von $i' = 0$ abhängigen Glieder berechnet, die ich unten angeben werde, da bei dem geringen Betrage der Saturnstörungen die vom Quadrate der störenden Kraft abhängigen Glieder wohl unmerklich sein werden.

## 14.

Um die zur Erlangung dieses Resultats erforderliche letzte Rechnungsabtheilung näher zu erläutern, will ich die für das grösste Paar von Coefficienten erforderliche Rechnung ausführlich hieher setzen.

| | 2,—2 | | | |
|---|---|---|---|---|
| | | $\sqrt{-1}$ | | $\sqrt{-1}$ |
| | $\Delta_2$ | | | |
| 2 | 9.63134 | 9.85007 | +0.42790 | +0.70807 |
| 0 | 5.125n | 5.735n | —1 | —5 |
| | $\Delta_3$ | | | |
| 3 | 6.711 | 7.4405 | +51.4 | +275.7 |
| 1 | 7.0651n | 6.8513n | —116.2 | —71.0 |
| | $\Delta_4$ | | | |
| 4 | 6.055n | 6.081n | —11.4 | —12.0 |
| 2 | 7.9960 | 8.2163 | +990.8 | +1645.5 |
| 0 | 5.094n | 5.614n | —1.2 | —4.1 |
| | $\Delta_5$ | | | |
| 3 | 5.950 | 5.468 | +8.9 | +2.9 |
| 1 | 5.970n | 5.724n | —9.3 | —5.3 |
| | $\Delta_6$ | | | |
| 4 | 5.293n | 5.336n | —2.9 | —2.2 |
| 2 | 6.425 | 6.661 | +26.6 | +45.8 |
| 0 | 4.507n | 4.986n | —0.3 | —1.0 |
| | $\Delta_7$ | | | |
| 3 | 5.090 | 4.239 | +1.2 | +0.2 |
| 1 | 4.592n | — | —0.4 | — |
| | $\Delta_8$ | | | |
| 4 | 4.385n | 4.428n | —0.2 | —0.3 |
| 2 | 4.03 | 4.64 | +0.1 | +0.4 |
| 0 | — | 4.16n | — | —0.1 |

Die Indices, die in der ersten Columne dieser Tafel angesetzt sind, haben keinen andern Zweck als anzuzeigen, aus welchen Gliedern der Tafel des Art. 8 die nebenstehenden Logarithmen der Producte der $W$ Coefficienten und der bez. Glieder dieser Tafel entstanden sind. Die beiden letzten Columnen geben die Zahlen der nebenstehenden Logarithmen, und die Summe jeder Abtheilung ist der betreffende $G$ und $H$ Coefficient. Durch Addition dieser Zahlen bekommt man also die Coefficienten für das Argument 2,—2. Von $\Delta_3$ an habe ich, um das Hinschreiben der Nullen zu vermeiden, die fünfte Decimale als Einheit betrachtet. Es wird demzufolge

$$\begin{array}{llll}
G^{(2)}_{2,-2} = +0.42789, & G^{(3)}_{2,-2} = -64.8, & H^{(2)}_{2,-2} = +0.70802, & H^{(3)}_{2,-2} = +204.7 \\
G^{(4)}_{2,-2} = +978.2, & G^{(5)}_{2,-2} = -0.4, & H^{(4)}_{2,-2} = +1629.4, & H^{(5)}_{2,-2} = -2.4 \\
G^{(6)}_{2,-2} = +23.4, & G^{(7)}_{2,-2} = +0.8, & H^{(6)}_{2,-2} = +42.6, & H^{(7)}_{2,-2} = +0.2 \\
G^{(8)}_{2,-2} = -0.1, & \quad -64 & H^{(8)}_{2,-2} = 0.0, & \quad +202 \\
\quad +0.43791 & & \quad +0.72474 & \\
\quad -64 & & \quad +202 & \\
K(2,-2) = +0.4373 & & L(2,-2) = +0.7268 &
\end{array}$$

Durch Multiplication mit den Zahlen 2, 3, 4, etc. erhält man hieraus

$$\begin{array}{rr@{\qquad}rr}
+0.85578 & -194 & +1.41604 & +614 \\
+3913 & -2 & +6518 & -12 \\
+140 & +6 & +256 & +1 \\
-1 & -190 & 0 & +603 \\
+0.89630 & & +1.48378 & \\
-190 & & +603 & \\
M(2,-2) = +0.894 & & L(2,-2) = +1.490 &
\end{array}$$

wie in der Tafel des vor. Art angegeben ist.

15.

Die Controle der eben beschriebenen Rechnungen wird wieder durch die für $f = 0$ geltende Entwickelung erlangt. Macht man diese Annahme in der allgemeinen Entwickelung, so wird

$$\begin{aligned}
2a\Omega = & \{K(0,0) + 2K(1,0) + 2K(2,0) + \text{etc.}\} z'^0 \\
& + \Sigma \left\{ \begin{array}{l} K(0,-i') + K(1,-i') + K(2,-i') + \text{etc.} \\ \qquad + K(-1,-i') + K(-2,-i') + \text{etc.} \end{array} \right\} z'^{-i'} \\
& + \sqrt{-1}\,.\,\Sigma \left\{ \begin{array}{l} L(0,-i') + L(1,-i') + L(2,-i') + \text{etc.} \\ \qquad + L(-1,-i') + L(-2,-i') + \text{etc.} \end{array} \right\} z'^{-i'}
\end{aligned}$$

Andernseits ist aber zufolge des Art. 9 in der speciellen Entwickelung

$$\left(\frac{r}{a}\right)^n \left(\frac{a'}{r'}\right)^{n+1} \Delta_n = \left(\frac{r}{a}\right)^n \Sigma \left\{ R^{(n)}_{-i'} + \sqrt{-1}\,.\,S^{(n)}_{-i'} \right\} z'^{-i'}$$

wo die Summation von $i' = 0$ anfangen muss, und es wird hier

$$r = 1 - \sin\varphi = \Phi$$

Rechnet man daher die Grössen

$$T_{-i'} = \Phi^2 R^{(2)}_{-i'} + \Phi^3 R^{(3)}_{-i'} + \Phi^4 R^{(4)}_{-i'} + \text{etc.}$$

$$U_{-i'} = \Phi^2 S^{(2)}_{-i'} + \Phi^3 S^{(3)}_{-i'} + \Phi^4 S^{(4)}_{-i'} + \text{etc.}$$

für jeden erforderlichen Werth von $i'$, so muss auch

$$T_0 = K(0,0) + 2K(1,0) + 2K(2,0) + \text{etc.}$$

und ausserdem allgemein

$$\begin{aligned} T_{-i'} &= K(0,-i') + K(1,-i') + K(2,-i') + \text{etc.} \\ &\quad + K(-1,-i') + K(-2,-i') + \text{etc.} \\ U_{-i'} &= L(0,-i') + L(1,-i') + L(2,-i') + \text{etc.} \\ &\quad + L(-1,-i') + L(-2,-i') + \text{etc.} \end{aligned}$$

werden. Die Coefficienten $L(1,0)$, $L(2,0)$, etc. entziehen sich hier wieder dieser Controle. und müssen daher, wenn man es für nöthig halten sollte, besonders durchgesehen werden. Die Controle der Summen, durch welche sich sowohl die $K$ und $L$ Coefficienten wie die $M$ und $N$ Coefficienten aus den $G$ und $H$ ergeben, kann wie folgt erhalten werden. Die Ausdrücke (3) und (4) zeigen leicht, dass auch

$$\begin{aligned} M(i,-i') &= 2K(i,-i') \\ &\quad + G^{(3)}_{i,-i'} + 2G^{(4)}_{i,-i'} + 3G^{(5)}_{i,-i'} + \text{etc.} \\ N(i,-i') &= 2L(i,-i') \\ &\quad + H^{(3)}_{i,-i'} + 2H^{(4)}_{i,-i'} + 3H^{(5)}_{i,-i'} + \text{etc.} \end{aligned}$$

Rechnet man diese Coefficienten daher nicht blos durch (4), sondern auch durch die vorstehenden Formeln, so ergiebt sich eine Prüfung der letzten Additionen und Multiplicationen. Eben so kann man die für die Coefficienten des zweiten Differentials der Störungsfunction nach $r$ erforderlichen Multiplicationen und Additionen prüfen.

## 16.

Ich komme jetzt zu der Entwickelung des Differentialquotienten der Störungsfunction nach $Z$. Führt man in den im Art. 2 gegebenen Ausdruck der Störungsfunction statt der linearischen Grössen die Verhältnisse zu $a$ und $a'$ ein, so wird er

$$a\Omega = \mu\left\{\frac{a}{\Delta} - \varkappa^2\left(\frac{a'}{r'}\right) - \varkappa^2\left(\frac{r}{a}\right)\left(\frac{a'}{r'}\right)^2 H\right\}$$

und eben so wie in der Abhandlung (I) wird

$$ar\left(\frac{d\Omega}{dr}\right) = \tfrac{1}{2}\mu\left(\frac{a}{\Delta}\right)^3\left\{\left(\frac{r'}{a'}\right)^2\frac{1}{\varkappa^2} - \left(\frac{r}{a}\right)^2\right\} - \tfrac{1}{2}\mu\left(\frac{a}{\Delta}\right) - \mu\varkappa^2\left(\frac{r}{a}\right)\left(\frac{a'}{r'}\right)^2 H$$

$$a^2\left(\frac{d\Omega}{dZ}\right) = -\mu\left\{\left(\frac{a}{\Delta}\right)^3 - \varkappa^3\left(\frac{a'}{r'}\right)^3\right\}\frac{\sin J}{\varkappa}\left(\frac{r'}{a'}\right)\sin(f + \Pi')$$

Diese geben

$$a\Omega + 2ar\left(\frac{d\Omega}{dr}\right) =$$
$$\mu\left(\frac{a}{\Delta}\right)^3\left\{\left(\frac{r'}{a'}\right)^2\frac{1}{\nu^2} - \left(\frac{r}{a}\right)^2\right\} - 3\mu\nu^2\left(\frac{r}{a}\right)\left(\frac{a'}{r'}\right)^2 H - \mu\nu\left(\frac{a'}{r'}\right)$$

oder

$$\mu\left(\frac{a}{\Delta}\right)^3 = \left\{a\Omega + 2ar\left(\frac{d\Omega}{dr}\right) + 3\left(\frac{r}{a}\right)\left(\frac{a'}{r'}\right)^2 \Delta_1 + \mu\nu\left(\frac{a'}{r'}\right)\right\}\frac{1}{\left(\frac{r'}{a'}\right)^2\frac{1}{\nu^2} - \left(\frac{r}{a}\right)^2}$$

indem $\mu\nu^2 H = \Delta_1$ (nach der im Art. 3 eingeführten Bezeichnung) ist. Es ist ferner identisch

$$\nu^3\left(\frac{a'}{r'}\right)^3 = \left\{\nu\left(\frac{a'}{r'}\right) - \nu^3\left(\frac{r}{a}\right)^2\left(\frac{a'}{r'}\right)^3\right\}\frac{1}{\left(\frac{r'}{a'}\right)^2\frac{1}{\nu^2} - \left(\frac{r}{a}\right)^2}$$

und hiemit wird

$$(5)\qquad a^2\left(\frac{d\Omega}{dZ}\right) = \left\{a\Omega + 2ar\left(\frac{d\Omega}{dr}\right) + 3\left(\frac{r}{a}\right)\left(\frac{a'}{r'}\right)^2\Delta_1 + \mu\nu^3\left(\frac{r}{a}\right)^2\left(\frac{a'}{r'}\right)^3\right\}(Z)$$

wo

$$(Z) = -\frac{\nu\sin J\left(\frac{a'}{r'}\right)\sin(f' + \Pi')}{1 - \nu^2\left(\frac{r}{a}\right)^2\left(\frac{a'}{r'}\right)^2}$$

es besteht also dieser Differentialquotient aus einem Product zweier Reihen, welches am Einfachsten durch die mechanische Multiplication gebildet wird.

## 17.

Das Glied $\left(\frac{r}{a}\right)\left(\frac{a'}{r'}\right)^2\Delta_1$ ist schon im Vorhergehenden mit entwickelt worden, es braucht also nur diesen Rechnungen entnommen und mit 3 multiplicirt zu werden. Es fand sich:

| $\varepsilon$ $g'$ | $3\left(\frac{r}{a}\right)\left(\frac{a'}{r'}\right)^2\Delta_1$ cos | sin |
|---|---|---|
| −1, −1 | −0″.161 | +0″.149 |
| 0, −1 | −0.917 | +0.512 |
| 1, −1 | +10.971 | −6.187 |
| −1, −2 | −0.018 | +0.016 |
| 0, −2 | −0.103 | +0.057 |
| 1, −2 | +1.228 | −0.692 |
| −1, −3 | −0.002 | +0.002 |
| 0, −3 | −0.010 | +0.005 |
| 1, −3 | +0.116 | −0.065 |
| 0, −4 | −0.001 | +0.001 |
| 1, −4 | +0.010 | −0.006 |

Die Entwickelung der Grössen $\left(\frac{r}{a}\right)^2$ und $\left(\frac{a'}{r'}\right)^3$ ist ebenfalls im Vorhergehenden enthalten, es ist daher leicht durch mechanische Multiplication das Product derselben untereinander und mit $\mu x^3$ zu bilden. Es wurde gefunden:

| $\mu x^3 \left(\frac{r}{a}\right)^2 \left(\frac{a'}{r'}\right)^3$ | |
|---|---|
| $\varepsilon \quad g'$ | cos |
| 0, 0 | +2.″338 |
| 1, 0 | —0.198 |
| 2, 0 | +0.004 |
| 0, —1 | +0.196 |
| ±1, —1 | —0.017 |
| 0, —2 | +0.016 |
| ±1, —2 | —0.001 |
| 0, —3 | +0.001 |

womit alle Grössen gegeben sind, die zu dem einen Factor von $a^2\left(\frac{d\Omega}{dZ}\right)$ gehören. Für die Entwickelung des zweiten Factors wird zuerst

$$(Z) = -\sin J \left\{ x\left(\frac{a'}{r'}\right) + x^3\left(\frac{a'}{r'}\right)^3\left(\frac{r}{a}\right)^2 + x^5\left(\frac{a'}{r'}\right)^5\left(\frac{r}{a}\right)^4 + \ldots \right\} \sin(f' + \Pi')$$

oder

$$(Z) = -\sin J \cos \Pi' \left\{ x\left(\frac{a'}{r'}\right)\sin f' + x^3\left(\frac{a'}{r'}\right)^3 \sin f' . \left(\frac{r}{a}\right)^2 + x^5\left(\frac{a'}{r'}\right)^5 \sin f' . \left(\frac{r}{a}\right)^4 + \ldots \right\}$$
$$- \sin J \sin \Pi' \left\{ x\left(\frac{a'}{r'}\right)\cos f' + x^3\left(\frac{a'}{r'}\right)\cos f' . \left(\frac{r}{a}\right)^2 + x^5\left(\frac{a'}{r'}\right)^5 \cos f' . \left(\frac{r}{a}\right)^4 + \ldots \right\}$$

Setzt man wie oben

$$\left(\frac{a'}{r'}\right)^n x' = \Sigma_{-\infty}^{+\infty} X_i^{n,1} z'^{-i'}$$

so wird

$$\left(\frac{a'}{r'}\right)^n \sin f' = \qquad \left\{X_1^{n,1} - X_{-1}^{n,1}\right\} \sin g' + \left\{X_2^{n,1} - X_{-2}^{n,1}\right\} \sin 2g' + \ldots$$
$$\left(\frac{a'}{r'}\right)^n \cos f' = X_0^{n,1} + \left\{X_1^{n,1} + X_{-1}^{n,1}\right\} \cos g' + \left\{X_2^{n,1} + X_{-2}^{n,1}\right\} \cos 2g' + \ldots$$

die ein für alle Mal berechnet werden können, da sie nur von der Excentricität des störenden Planeten abhängen. Für die im Art. 1 angeführte Excentricität der Saturnbahn fanden sich die Logarithmen dieser Coefficienten wie folgt,

| | | 2 sin $g'$ | 2 sin $2g'$ | 2 sin $3g'$ | 2 sin $4g'$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\left(\frac{a'}{r'}\right)$ sin $f'$ | | 9.69778 | 8.62168 | 7.5208 | 6.412 |
| $\left(\frac{a'}{r'}\right)^3$ sin $f'$ | | 9.69897 | 8.84454 | 7.8825 | 6.876 |
| $\left(\frac{a'}{r'}\right)^5$ sin $f'$ | | 9.70120 | 8.99266 | 8.1321 | 7.205 |
| $\left(\frac{a'}{r'}\right)^7$ sin $f'$ | | 9.7051 | 9.1047 | 8.3250 | 7.464 |
| $\left(\frac{a'}{r'}\right)^9$ sin $f'$ | | 9.7102 | 9.1957 | 8.4834 | 7.677 |
| | cos $0g'$ | 2 cos $g'$ | 2 cos $2g'$ | 2 cos $3g'$ | 2 cos $4g'$ |
| $\left(\frac{a'}{r'}\right)$ cos $f'$ | 8.44744n | 9.69744 | 8.62150 | 7.5208 | 6.412 |
| $\left(\frac{a'}{r'}\right)^3$ cos $f'$ | 8.44915 | 9.70051 | 8.84540 | 7.8831 | 6.876 |
| $\left(\frac{a'}{r'}\right)^5$ cos $f'$ | 8.9293 | 9.70764 | 8.99552 | 8.1339 | 7.205 |
| $\left(\frac{a'}{r'}\right)^7$ cos $f'$ | 9.1556 | 9.7187 | 9.1105 | 8.3284 | 7.464 |
| $\left(\frac{a'}{r'}\right)^9$ cos $f'$ | 9.3074 | 9.7336 | 9.2053 | 8.4890 | 7.681 |

wo von jedem Coefficienten nur die Hälfte angesetzt ist, (die constanten Glieder ausgenommen,) weil dieses für die nachherige Multiplication erforderlich ist. Da die Entwickelungen von $\left(\frac{r}{a}\right)^2$, $\left(\frac{r}{a}\right)^4$, etc. im Vorhergehenden enthalten sind, so ergab sich leicht durch mechanische Multiplicationen

| $\varepsilon$ $g'$ | $\frac{1}{4}(Z)$ sin | $\frac{1}{4}(Z)$ cos |
|---|---|---|
| 0, 0 | | +0.001536 |
| 1, 0 | | +0.000017 |
| 0, −1 | +0.022702 | −0.032479 |
| ±1, −1 | −0.000152 | +0.000219 |
| ±2, −1 | +0.000004 | −0.000006 |
| 0, −2 | +0.002006 | −0.002872 |
| ±1, −2 | −0.000023 | +0.000032 |
| 0, −3 | +0.000167 | −0.000238 |
| ±1, −3 | −0.000002 | +0.000003 |
| 0, −4 | +0.000013 | −0.000019 |

wo aber, wie immer in dieser Abhandlung geschehen ist, vom constanten Gliede das Doppelte angesetzt ist, wie es sich bei der mechanischen Multiplication von selbst ergiebt.

### 18.

Durch Multiplication der beiden Factoren des Ausdrucks (5) mit einander wurden nun die folgenden Coefficienten erhalten.

| $a^2\left(\frac{d\Omega}{dZ}\right)$ | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $\varepsilon$, $g'$ | sin | cos | $\varepsilon$, $g'$ | sin | cos |
| 0, 0 | | +0."0789 | −1, −2 | −0."014 | +0."001 |
| 1, 0 | −0."05053 | −0.51401 | 0, −2 | −0.026 | −0.006 |
| 2, 0 | +0.0045 | −0.0044 | 1, −2 | +0.466 | −0.228 |
| 3, 0 | +0.001 | +0.004 | 2, −2 | −0.013 | −0.018 |
| −2, −1 | −0."005 | +0."005 | 3, −2 | +0.040 | −0.030 |
| −1, −1 | −0.006 | −0.033 | 0, −3 | −0."010 | −0."003 |
| 0, −1 | +0.111 | −0.156 | 1, −3 | +0.067 | −0.048 |
| 1, −1 | −0.038 | −0.003 | 2, −3 | +0.168 | +0.011 |
| 2, −1 | +0.068 | −0.150 | 3, −3 | +0.001 | −0.009 |
| 3, −1 | +0.001 | 0.000 | 4, −3 | +0.014 | −0.001 |

Ich füge hinzu, dass sich für die Differentialquotienten der Störungsfunction, die bei der Berechnung der von den Quadraten und Producten der störenden Massen abhängigen Glieder gebraucht werden, ähnliche Ausdrücke entwickeln lassen wie (5), da diese aber bei den Saturnstörungen nicht in Betracht kommen, so lasse ich sie hier weg. Es kann sich auch jeder dieselben leicht selbst entwickeln, wenn eine Anwendung derselben vorliegen sollte.

### 19.

Die im Vorhergehenden gefundenen Werthe der Differentialquotienten der Störungsfunction werden nun nach den Vorschriften des Art. 74 (I) auf die Form

$$\frac{\cos}{\sin}\left\{(i-i'\mu)\,\varepsilon-i'\,(c'-c\mu)\right\}$$

gebracht, und zu dem Ende geben die Elemente des Art. 1

$$\log\lambda = 7.77488$$

Hiemit bekommt man die folgenden Werthe der Logarithmen der erforderlichen $J$ Functionen

| $\lambda$ | $J^{(0)}_\lambda - 1$ | $J^{(1)}_\lambda$ | $J^{(2)}_\lambda$ |
|---|---|---|---|
| 1 | 5.550$n$ | 7.7749 | 5.249 |
| 2 | 6.152$n$ | 8.0759 | 5.851 |
| 3 | 6.504$n$ | 8.2519 | 6.203 |
| 4 | 6.754$n$ | 8.3768 | 6.453 |
| 5 | 6.948$n$ | 8.4737 | 6.647 |

und damit endlich

| | $(i)a\Omega$ | | $ar\left(\frac{d\Omega}{dr}\right)$ | | $a^2\left(\frac{d\Omega}{dZ}\right)$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\varepsilon$, $\mu\varepsilon$ | cos | sin | cos | sin | sin | cos |
| 0, 0 | | | +1″.0987 | | | +0″.0789 |
| 1, 0 | −0″.03583 | −0″.00202 | −0.07022 | −0″.00737 | −0″.05053 | −0.51401 |
| 2, 0 | −0.0706 | −0.0138 | −0.0803 | −0.0155 | +0.0045 | −0.0044 |
| 3, 0 | −0.0009 | +0.0009 | −0.0008 | +0.0001 | +0.001 | +0.004 |
| 4, 0 | +0.0004 | +0.0004 | +0.0005 | +0.0002 | | |
| −3, −1 | −0.0003 | +0.0006 | +0.001 | −0.001 | | |
| −2, −1 | +0.0045 | +0.0002 | −0.005 | −0.001 | −0.005 | +0.005 |
| −1, −1 | +0.0129 | −0.0088 | −0.038 | +0.028 | −0.007 | −0.032 |
| 0, −1 | −0.0004 | +0.0003 | +0.055 | +0.020 | +0.111 | −0.156 |
| 1, −1 | +0.0839 | −0.0515 | +0.257 | −0.153 | −0.037 | −0.003 |
| 2, −1 | −0.0381 | +0.0436 | −0.042 | +0.045 | +0.068 | −0.150 |
| 3, −1 | −0.0338 | +0.0114 | −0.036 | +0.012 | +0.001 | −0.004 |
| 4, −1 | −0.0002 | +0.0005 | 0.000 | 0.000 | | |
| −2, −2 | +0.0002 | +0.0010 | 0.000 | −0.001 | | |
| −1, −2 | +0.0009 | +0.0015 | −0.004 | −0.004 | −0.014 | +0.001 |
| 0, −2 | +0.0008 | −0.0014 | −0.016 | +0.062 | −0.032 | −0.003 |
| 1, −2 | −0.0706 | +0.1303 | −0.121 | +0.243 | +0.466 | −0.228 |
| 2, −2 | +0.8739 | −1.4523 | +0.893 | −1.487 | −0.007 | −0.021 |
| 3, −2 | +0.0036 | +0.0168 | +0.004 | +0.017 | +0.040 | −0.030 |
| 4, −2 | −0.0100 | +0.0107 | −0.010 | +0.011 | 0.000 | 0.000 |
| −1, −3 | +0.0001 | +0.0005 | −0.001 | −0.001 | | |
| 0, −3 | +0.0002 | −0.0005 | −0.005 | +0.006 | −0.011 | −0.002 |
| 1, −3 | −0.0138 | +0.0332 | −0.021 | +0.073 | +0.064 | −0.048 |
| 2, −3 | +0.1685 | −0.1828 | +0.173 | −0.143 | +0.169 | +0.010 |
| 3, −3 | +0.0173 | −0.5589 | +0.017 | −0.567 | +0.004 | −0.009 |
| 4, −3 | +0.0046 | +0.0048 | +0.004 | +0.005 | +0.014 | −0.001 |
| 5, −3 | −0.0014 | +0.0052 | −0.001 | +0.005 | 0.000 | 0.000 |
| 0, −4 | 0.0000 | −0.0001 | −0.001 | 0.000 | | |
| 1, −4 | −0.0025 | +0.0049 | −0.006 | +0.011 | | |
| 2, −4 | +0.0248 | −0.0083 | +0.028 | +0.007 | | |
| 3, −4 | +0.0265 | −0.1154 | +0.037 | −0.105 | | |
| 4, −4 | −0.0791 | −0.1520 | −0.080 | −0.154 | | |
| 5, −4 | +0.0026 | +0.0009 | +0.002 | 0.000 | | |
| 6, −4 | +0.0007 | +0.0019 | +0.001 | +0.002 | | |
| 1, −5 | −0.0004 | +0.0005 | −0.001 | +0.001 | | |
| 2, −5 | +0.0027 | +0.0010 | +0.003 | +0.004 | | |
| 3, −5 | +0.0096 | −0.0130 | +0.012 | −0.009 | | |
| 4, −5 | −0.0137 | −0.0456 | −0.011 | −0.043 | | |
| 5, −5 | −0.0425 | −0.0279 | −0.042 | −0.028 | | |
| 6, −5 | +0.0012 | −0.0002 | +0.001 | 0.000 | | |

Ich füge diesen noch für $i' = 0$ die Coefficienten des zweiten Differentials nach $r$ hinzu, von welchen ich weiter unten Gebrauch machen werde.

| $\varepsilon$, $\mu\varepsilon$ | $ar^2\left(\frac{d^2\Omega}{dr^2}\right)+ar\left(\frac{d\Omega}{dr}\right)$ cos | sin |
|---|---|---|
| 0, 0 | $+2\overset{''}{.}329$ | |
| 1, 0 | $-0.138$ | $-0\overset{''}{.}026$ |
| 2, 0 | $-0.202$ | $-0.039$ |
| 3, 0 | $-0.002$ | $+0.005$ |

## §. 2. Entwickelung der Störungsfunction und ihrer Differentialquotienten für die vom Mars bewirkten Störungen der Egeria.

### Berechnung einer Ungleichheit langer Periode.

20.

Die Entwickelung der Störungsfunction für die Marsstörungen der Egeria lässt sich beliebig durch die eine oder die andere der beiden in der Abhandlung (I) und in dieser Abhandlung vorgetragenen Methoden ausführen; ich habe jene gewählt, grösstentheils aus dem Grunde um zu zeigen, wie man durch dieselbe ein entferntes Glied berechnen kann, welches vermöge eines kleinen Divisors, welchen es bekommt, merklich wird. Ein solches Glied kommt in diesen Marsstörungen vor. Die der Rechnung zu Grunde gelegten Elemente sind die folgenden:

Egeria für 1851 Dec. 5,0 m. Gr. Z. — Mars.

$c = 19^0\ 31'\ 43\overset{''}{.}6$

$\left.\begin{array}{l}\pi = 119\ \ 12\ \ 12.4\\ \theta = 43\ \ 17\ \ \ 9.1\end{array}\right\}$ m. Aeq. 1851.0 $\left\{\begin{array}{l}\pi' = 333^0\ 18'\ 48''\\ \theta' = 48\ \ 20\ \ 53\end{array}\right.$

$\varphi = 4\ \ 52\ \ 7.4$ — $e' = 0.093263$

$i = 16\ \ 33\ \ 6.7$ — $i' = 1^0\ 51'\ 6''$

$n = 858\overset{''}{.}3861$ — $n' = 1886\overset{''}{.}656$

$\log a = 0.4108826$ — $\log a' = 0.1828760$

$m' = \frac{1}{2680337}$

Bilden wir nun wieder zuerst das Verhältniss der mittleren Bewegungen, und die Vielfachen davon, so finden wir

$$\mu = 2{,}197911$$
$$2\mu = 4{,}395822$$
$$3\mu = 6{,}593733$$
$$4\mu = 8{,}791644$$
$$5\mu = 10{,}989555$$

woraus der kleine Divisor

$$11 - 5\mu = +0{,}010445$$

hervorgeht, dessen Coefficient einer näheren Untersuchung bedarf. In einen Kettenbruch aufgelöst wird

$$\mu = 2 + \cfrac{1}{5 + \cfrac{1}{18 + \cfrac{1}{1 + \ldots}}}$$

woraus der jenem am Nächsten stehende kleine Divisor

$$200 - 91\mu = -0{,}0099$$

folgt, und ohne Bedeutung ist.

21.

Ehe ich die folgenden Rechnungen darlege, muss ich anführen, dass dabei höchstens Logarithmen von fünf Decimalen angewandt worden sind, mithin die angegebenen Secunden nicht verbürgt werden können, aber hinreichend genau sind. Die Hülfsgrössen, die zuerst berechnet werden mussten, fanden sich wie folgt:

$$J = 14^\circ\ 42'\ 29''$$
$$\Phi = -0\ 38\ 36$$
$$\Psi = 354\ 19\ 5$$
$$\Pi = 76\ 33\ 39$$
$$\Pi' = 290\ 38\ 50$$

$$\log \alpha = 9.77199$$
$$P = 69^\circ\ 19'\ 5'',\quad \log p = 0.26285$$
$$V = 146\ 13\ 20,\quad \log \nu = 0.06937$$
$$W = 76\ 33\ 29,\quad \log w = 0.05825$$
$$W_1 = 76\ 37\ 45,\quad \log w_1 = 0.06987$$
$$R = 1.34385 \qquad \log \gamma_2 = 7.4834$$

und nachdem der Umkreis in 16 Theile getheilt worden war, ergab sich

| | $C$ | $\log q$ | $Q-\varepsilon$ | $\log q_1$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 1.10786 | 9.99805 | 143° 16′ 56″ | 7.4854 |
| 1 | 1.10216 | 9.99768 | 147 35 8 | 7.4857 |
| 2 | 1.13592 | 0.01182 | 151 22 4 | 7.4716 |
| 3 | 1.20491 | 0.03465 | 153 32 34 | 7.4488 |
| 4 | 1.29904 | 0 05916 | 153 56 15 | 7.4242 |
| 5 | 1.40398 | 0.08054 | 152 58 49 | 7.4029 |
| 6 | 1.50313 | 0.09669 | 151 14 26 | 7.3868 |
| 7 | 1.58045 | 0.10743 | 149 20 48 | 7.3760 |
| 8 | 1.62336 | 0.11328 | 147 4 16 | 7.3702 |
| 9 | 1.62519 | 0.11450 | 145 0 3 | 7.3689 |
| 10 | 1.58641 | 0.11074 | 142 57 41 | 7.3727 |
| 11 | 1.51404 | 0.10129 | 140 58 52 | 7.3821 |
| 12 | 1.42000 | 0.08542 | 139 14 44 | 7.3980 |
| 13 | 1.31871 | 0.06342 | 138 8 22 | 7.4200 |
| 14 | 1.22475 | 0.03760 | 138 11 26 | 7.4458 |
| 15 | 1.15104 | 0.01329 | 139 53 8 | 7.4701 |

22.

Aus den vorstehenden Zahlenangaben wurden nun zuerst die $\alpha_i^{(1)}$ und $\alpha_i^{(3)}$ berechnet, und bei jenen auf das oben angeführte Glied Rücksicht genommen, welches den kleinen Divisor bekommt. Bei solchen Gliedern sind es zunächst diejenigen, die das Quadrat des kleinen Divisors bekommen, welche merklich werden, und gemeiniglich sind diese die einzigen merklichen, so dass man sich bei der Berechnung solcher Ungleichheit auf diese beschränken darf. Durch die Untersuchung der in der Abhandlung (I) entwickelten allgemeinen Ausdrücke zur Berechnung der Störungen überzeugt man sich leicht, dass die mit dem Quadrat des Divisors behafteten Glieder blos aus den mit $\left(\frac{d\Omega}{d\varepsilon}\right)$ multiplicirten Gliedern des Differentials von $nz$ entstehen können, und dass mit bloser Rücksicht auf diese Glieder

$$n\delta z = -3a\iint\left(\frac{d\Omega}{d\varepsilon}\right)d\varepsilon^2$$

wird, so wie dass in $\nu$ und $u$ solche Glieder gar nicht vorhanden sind. Es wird dieses übrigens weiter unten ausführlich gezeigt werden. Hier handelt es sich deshalb nur darum, die Coefficienten $(i)[11,5,c]$ und $(i)[11,5,s]$ des Ausdrucks

$$\begin{aligned}(i)a\Omega = &(i)[11,5,c]\cos\{(11-5\mu)\varepsilon-5(c'-c\mu)\}\\ &+(i)[11,5,s]\sin\{(11-5\mu)\varepsilon-5(c'-c\mu)\}\end{aligned}$$

zu berechnen, da hieraus zufolge des Vorhergehenden

$$n\delta z = -3\frac{{}^{(i)}[11,5,c]}{(11-5\mu)^2}\sin\{(11-5\mu)\varepsilon-5(c'-c\mu)\}$$

$$(6)\quad \ldots \quad +3\frac{{}^{(i)}[11,5,s]}{(11-5\mu)^2}\cos\{(11-5\mu)\varepsilon-5(c'-c\mu)\}$$

die einzigen Glieder sind, die das Quadrat des kleinen Divisors $11-5\mu$ bekommen.

Nun giebt dagegen die Entwickelung, die oben angefangen worden ist, zuerst $a\Omega$ in der Form

$$(i,i',c)\cos(i\varepsilon-i'\varepsilon')+(i,i',s)\sin(i\varepsilon-i'\varepsilon')$$

und um den Uebergang von dieser Form zu der, welche in den vorstehenden Ausdrücken angewandt werden muss, zu bewirken, muss man eine gewisse Anzahl der Coefficienten der zunächst vorstehenden Form berechnen, und diese in jene Form transformiren. In Bezug auf diese Transformation findet ein wesentlicher Unterschied statt, jenachdem der störende Planet ein oberer oder ein unterer ist. Wenn dieser ein oberer ist, so liegen immer die Glieder, die auf diese Transformation den wesentlichsten Einfluss äussern, vor dem gesuchten Gliede, das heisst sie hängen von Werthen von $i'$ ab, die kleiner sind, wie der Werth von $i'$ in dem Gliede welches man berechnen will, und die Glieder der Störungsfunction, in welchen $i'$ eine grössere Zahl ist, haben geringeren Einfluss. Das Gegentheil findet statt, wenn der störende Planet ein unterer ist, denn alsdann gehören die grössten in dieser Transformation Einfluss habenden Glieder Werthen von $i'$ an, die grösser sind, wie der Werth von $i'$, der dem Resultat zukommt; die den meisten Einfluss habenden Glieder liegen daher in diesem Falle nach dem gesuchten Gliede, und man muss die Störungsfunction für grössere Werthe von $i'$ entwickeln. Da Mars in Bezug auf Egeria ein unterer Planet ist, so findet hier der letztgenannte Fall statt, und ich habe $a\Omega$ bis zu $i'=10$ entwickelt, womit ich ausreichte. Die erhaltenen Werthe von $\alpha_i^{(1)}$ und $\alpha_i^{(3)}$ sind nun die folgenden.

| $\frac{1}{8}\mu\alpha_i^{(1)}$ | $\varepsilon = (0)$ | (1) | (2) | (3) | (4) | (5) | (6) | (7) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 8.00731 | 8.01115 | 8.00589 | 7.98929 | 7.96301 | 7.93365 | 7.90777 | 7.88925 |
| 1 | 7.52780 | 7.53661 | 7.53417 | 7.51011 | 7.46370 | 7 40591 | 7.35226 | 7.31267 |
| 2 | 7.20751 | 7.22087 | 7.22098 | 7.19014 | 7.12455 | 7.04090 | 6.96114 | 6.90161 |
| 3 | 6.92863 | 6.94643 | 6.94896 | 6.91155 | 6.82757 | 6.71815 | 6.61278 | 6.53361 |
| 4 | 6.66916 | 6.69129 | 6.69630 | 6.65235 | 6.55013 | 6.41526 | 6.28440 | 6.18570 |
| 5 | 6.42095 | 6.44735 | 6.45489 | 6.40444 | 6.28405 | 6.12404 | 5.96763 | 5.84946 |
| 6 | 6.18019 | 6.21092 | 6.22089 | 6.16395 | 6.02547 | 5.84049 | 5.63846 | 5.52085 |
| 7 | 5.94468 | 5.97974 | 5.99213 | 5.92872 | 5.7722 | 5.5647 | 5.3547 | 5.1976 |
| 8 | 5.7131 | 5.7525 | 5.7673 | 5.6974 | 5.5228 | 5.2872 | 5.0549 | 4.8785 |
| 9 | 5.4846 | 5.5283 | 5.5455 | 5.4694 | 5.2766 | 5.0157 | 4.7582 | 4.562 |
| 10 | 5.2534 | 5.3065 | 5.3261 | 5.2483 | 5.0327 | 4.7467 | 4.4639 | 4.249 |
| 11 | 5.0343 | 5.0869 | 5.1087 | 5.0194 | 4 7909 | 4.480 | 4.172 | 3.937 |

| $\frac{1}{8}\mu\alpha_i^{(1)}$ | $\varepsilon = (8)$ | (9) | (10) | (11) | (12) | (13) | (14) | (15) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 7.87984 | 7.88004 | 7.88951 | 7.90729 | 7.93116 | 7.95725 | 7.98047 | 7.99726 |
| 1 | 7.29270 | 7.29421 | 7.31605 | 7.35465 | 7.40332 | 7.45225 | 7.49068 | 7.51419 |
| 2 | 6 87162 | 6.87138 | 6.90796 | 6.96626 | 7.03823 | 7.10843 | 7.16095 | 7.19060 |
| 3 | 6.49372 | 6.49772 | 6.54288 | 6.62063 | 6.71546 | 6.80655 | 6.87283 | 6.90854 |
| 4 | 6.13596 | 6.14122 | 6.19786 | 6.29493 | 6.41248 | 6.52428 | 6.60419 | 6.64583 |
| 5 | 5.78991 | 5.79688 | 5.86453 | 5.98079 | 6.12103 | 6.25341 | 6.34690 | 6.39447 |
| 6 | 5.45151 | 5.45922 | 5.53882 | 5.67427 | 5.83740 | 5.99040 | 6.09706 | 6.15056 |
| 7 | 5.1185 | 5.1275 | 5.2185 | 5.3734 | 5.5585 | 5.73204 | 5.85248 | 5.91191 |
| 8 | 4.7896 | 4.7997 | 4.9022 | 5.0760 | 5.2839 | 5.4779 | 5.6149 | 5.6772 |
| 9 | 4.464 | 4.475 | 4.589 | 4.7819 | 5.0124 | 5.2269 | 5.3743 | 5.4455 |
| 10 | 4.140 | 4.153 | 4.278 | 4.490 | 4.743 | 4.9783 | 5.1391 | 5.2163 |
| 11 | 3.819 | 3.833 | 3.970 | 4.204 | 4.476 | 4.732 | 4.9060 | 4.9890 |

| $\varepsilon$ | $\frac{1}{8}\mu\alpha_0^{(3)}$ | $\frac{1}{8}\mu\alpha_1^{(3)}$ | $\frac{1}{8}\mu\alpha_2^{(3)}$ | $\frac{1}{8}\mu\alpha_3^{(3)}$ | $\frac{1}{8}\mu\alpha_4^{(3)}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| (0) | 8.52475 | 8.43200 | 8.29954 | 8.1486 | 7.9869 |
| (1) | 8.54397 | 8.45421 | 8.32545 | 8.1785 | 8.0209 |
| (2) | 8.53310 | 8.44499 | 8.31829 | 8.1736 | 8.0182 |
| (3) | 8.47112 | 8.37857 | 8.24635 | 8.0957 | 7.9343 |
| (4) | 8.36120 | 8.25592 | 8.10809 | 7.9409 | 7.7624 |
| (5) | 8.23573 | 8.11194 | 7.94185 | 7.7511 | 7.5487 |
| (6) | 8.12635 | 7.98323 | 7.79041 | 7.5759 | 7.3490 |
| (7) | 8.04965 | 7.89124 | 7.68075 | 7.4478 | 7.2022 |
| (8) | 8.01167 | 7.84541 | 7.62594 | 7.3837 | 7.1286 |
| (9) | 8.01345 | 7.84818 | 7.62984 | 7.3887 | 7.1349 |
| (10) | 8.05345 | 7.89734 | 7.68949 | 7.4593 | 7.2165 |
| (11) | 8.12801 | 7.98695 | 7.79655 | 7 5845 | 7.3602 |
| (12) | 8.22813 | 8.10428 | 7.93412 | 7.7433 | 7.5407 |
| (13) | 8.33633 | 8.22760 | 8.07558 | 7.9039 | 7.7209 |
| (14) | 8.42811 | 8.32904 | 8.18878 | 8.0296 | 7.8593 |
| (15) | 8.48880 | 8.39386 | 8.25869 | 8.1049 | 7.9403 |

Alle hier gegebenen Grössen sind nach den Formeln §. 7 (1) gerechnet. Da hier aber die $\alpha_i^{(1)}$ viel weiter fortgesetzt werden mussten, wie die $\alpha_i^{(3)}$, so habe ich diese Fortsetzung nicht aus den $\alpha_i^{(3)}$, deren Berechnung

überflüssig geworden wäre, sondern unmittelbar durch die Formeln des Art. 61 (I) berechnet, nachdem ich in diesen $n = 1$ gesetzt hatte.

## 23.

Durch mechanische Quadraturen ergab sich nun aus den vorstehenden Grössen,

| $\varepsilon, \varepsilon'$ | $\mu\left(\frac{a}{\Delta}\right)$ | |
|---|---|---|
| | cos | sin |
| 0, 0 | +0.″14202 | |
| 1, 0 | +0.01063 | +0.″00259 |
| 2, 0 | +0.00007 | +0.00049 |
| 3, 0 | −0.00028 | −0.00001 |
| −3, −1 | +0.00005 | +0.00001 |
| −2, −1 | +0.00035 | +0.00008 |
| −1, −1 | +0.00088 | +0.00045 |
| 0, −1 | −0.00290 | −0.00103 |
| 1, −1 | −0.03563 | −0.02409 |
| 2, −1 | −0.00608 | −0.00667 |
| 3, −1 | −0.00016 | −0.00105 |
| 4, −1 | +0.00017 | 0.00000 |
| 5, −1 | +0.00005 | +0.00005 |
| −1, −2 | −0.0002 | −0.0002 |
| 0, −2 | −0.0005 | −0.0007 |
| 1, −2 | +0.0007 | +0.0009 |
| 2, −2 | +0.0070 | +0.0175 |
| 3, −2 | +0.0009 | +0.0063 |
| 4, −2 | −0.0003 | +0.0011 |
| 5, −2 | −0.0002 | 0.0000 |
| 1, −3 | 0.0000 | +0.0007 |
| 2, −3 | −0.0001 | −0.0003 |
| 3, −3 | +0.0019 | −0.0089 |
| 4, −3 | +0.0019 | −0.0039 |
| 5, −3 | +0.0008 | −0.0007 |
| 6, −3 | +0.00018,69 | +0.00001,48 |
| 7, −3 | +6.51 | +5.21 |
| 8, −3 | −0.58 | +1.14 |
| 9, −3 | +0 04 | +0.43 |
| 10, −3 | −0.29 | −0.09 |

| $\varepsilon, \varepsilon'$ | $\mu\left(\frac{a}{\Delta}\right)$ | |
|---|---|---|
| | cos | sin |
| 4, −4 | −325.936 | +315.320 |
| 5, −4 | −232.424 | +136.202 |
| 6, −4 | −83.598 | +13.926 |
| 7, −4 | −16.505 | −8.256 |
| 8, −4 | −0.087 | −4.775 |
| 9, −4 | +1.039 | −0.764 |
| 10, −4 | +0.090 | −0.296 |
| 11, −4 | +0.275 | +0.018 |
| 5, −5 | +227.598 | −40.977 |
| 6, −5 | +167.768 | +10.406 |
| 7, −5 | +58.744 | +25.178 |
| 8, −5 | +9.687 | +13.457 |
| 9, −5 | −1.194 | +3.891 |
| 10, −5 | −1.069 | +0.445 |
| 11, −5 | −0.362 | +0.052 |
| 12, −5 | −0.054 | −0.044 |
| 6, −6 | −109.122 | −47.501 |
| 7, −6 | −81.899 | −62.600 |
| 8, −6 | −27.577 | −38.199 |
| 9, −6 | −1.493 | −13.846 |
| 10, −6 | +2.255 | −2.808 |
| 11, −6 | +1.029 | −0.022 |
| 12, −6 | +0.311 | +0.141 |
| 13, −6 | +0.009 | +0.114 |
| 7, −7 | +33.33 | +51.54 |
| 8, −7 | +20.06 | +59.03 |
| 9, −7 | +0.32 | +31.95 |
| 10, −7 | −4.63 | +10.07 |
| 11, −7 | −2.79 | +1.38 |
| 12, −7 | −0.81 | −0.35 |
| 13, −7 | −0.18 | −0.25 |
| 14, −7 | +0.04 | −0.07 |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 8,—8 | +0.31 | —31.55 | 9,—9 | —8.94 | +13.37 |
| 9,—8 | +9.64 | —35.99 | 10,—9 | —16.56 | +14.55 |
| 10,—8 | +11.69 | —18.21 | 11,—9 | —13.15 | +5.80 |
| 11,—8 | +7.07 | —4.67 | 12,—9 | —6.27 | +0.14 |
| 12,—8 | +2.62 | +0.04 | 13,—9 | —1.84 | —1.05 |
| 13,—8 | +0.53 | +0.51 | 14,—9 | —0.21 | —0.62 |
| 14,—8 | +0.03 | +0.28 | 15,—9 | +0.07 | —0.22 |
| 15,—8 | —0.04 | +0.07 | 16,—9 | +0.04 | —0.03 |
| | | | 10,—10 | +7.44 | —3.21 |
| | | | 11,—10 | +12.76 | —1.73 |
| | | | 12,—10 | +9.22 | +1.56 |
| | | | 13,—10 | +3.86 | +2.32 |
| | | | 14,—10 | +0.83 | +1.44 |

Um das Hinschreiben der vielen Nullen zu umgehen sind hier vom Argumente 7,—3 an alle Coefficienten in Einheiten der fünften Decimale angesetzt. Streng genommen sind diese die Coefficienten von $A^{-\frac{1}{2}}$, und sie müssten also mit $B^{-\frac{1}{2}}$ multiplicirt werden, um in die Coefficienten von $\left(\frac{a}{\Delta}\right)$ überzugehen. Allein der Factor $B^{-\frac{1}{2}}$ ist hier so wenig von Eins verschieden, dass die Berücksichtigung desselben unterbleiben durfte. Es fand sich nemlich

$$B^{-\frac{1}{2}} = 1 - 0.0010873 \cos(-\varepsilon-\varepsilon') + 0.0007359 \sin(-\varepsilon-\varepsilon')$$

der kleineren Glieder nicht zu gedenken.

Ferner ergab sich,

| $\varepsilon, \quad \varepsilon'$ | $\left(\frac{a}{\Delta}\right)^3$ cos | sin | $\varepsilon, \quad \varepsilon'$ | $\left(\frac{a}{\Delta}\right)^3$ cos | sin |
|---|---|---|---|---|---|
| 0, 0 | +0."33850 | | —1,—2 | —0.002 | —0.004 |
| 1, 0 | +0.09765 | +0."02543 | 0,—2 | 0.000 | —0.006 |
| 2, 0 | +0.00770 | +0.01049 | 1,—2 | +0.027 | +0.034 |
| 3, 0 | —0.00455 | +0.00080 | 2,—2 | +0.068 | +0.169 |
| 4, 0 | —0.00198 | —0.00084 | 3,—2 | +0.013 | +0.093 |
| | | | 4,—2 | —0.007 | +0.024 |
| —3,—1 | +0.0020 | +0.0001 | 5,—2 | —0.005 | +0.001 |
| —2,—1 | +0.0052 | +0.0025 | | | |
| —1,—1 | —0.0019 | +0.0053 | | | |
| 0,—1 | —0.0656 | —0.0222 | | | |
| 1,—1 | —0.2169 | —0.1464 | | | |
| 2,—1 | —0.0700 | —0.0788 | | | |
| 3,—1 | —0.0049 | —0.0203 | | | |
| 4,—1 | +0.0036 | —0.0009 | | | |
| 5,—1 | +0.0014 | +0.0015 | | | |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 0, −3 | +0.001 | +0.005 | 1, −4 | +0.001 | −0.003 |
| 1, −3 | −0.002 | +0.007 | 2, −4 | +0.005 | −0.005 |
| 2, −3 | −0.003 | −0.024 | 3, −4 | −0.005 | +0.012 |
| 3, −3 | +0.025 | −0.118 | 4, −4 | −0.055 | +0.054 |
| 4, −3 | +0.033 | −0.068 | 5, −4 | −0.049 | +0.029 |
| 5, −3 | +0.018 | −0.017 | 6, −4 | −0.022 | +0.004 |
| 6, −3 | +0.005 | 0.000 | 7, −4 | −0.005 | −0.002 |

wo in Bezug auf $B^{-2}$ dieselbe Bemerkung gilt wie oben für $B^{-1}$..

24.

Berechnen wir vor allen Dingen das Glied langer Periode. Hiefür müssen nun zuerst die im vor. Art. angegebenen Glieder von $\mu\left(\frac{a}{\Delta}\right)$, das ist hier die Glieder von $a\Omega$, da das zweite Glied der Störungsfunction hier keine Wirkung äussert, durch die Methode des Art. 69 (I) auf die Form $\frac{\cos}{\sin}\left\{i\varepsilon - i'g'\right\}$, und dann diese durch die Methode des Art. 74 (I) auf die im Ausdruck (6) verlangte Form gebracht werden. Man kann diese beiden Verwandelungen in Eine zusammen ziehen, und wenn ich gleich diese Zusammenziehung in dem allgemeinen Falle, wo man eine grosse Anzahl von Coefficienten zu berechnen hat, für unvortheilhaft halten muss, und sie deshalb in die allgemeinen Vorschriften der Abhandlung (I) nicht aufgenommen habe, so verhält sich doch im gegenwärtigen Falle, wo nur Ein Glied zu ermitteln ist, diese Sache anders; hier kann diese Zusammenziehung mit Vortheil angewandt werden, weshalb ich sie entwickeln werde.

Zufolge des Art. 69 (I) ist

$$y'^{-i'} = \Sigma P_k^{(-i')} z'^k$$

und wenn man erwägt, dass

$$J_{k\lambda}^{(-p)} = (-1)^p J_{k\lambda}^{(p)}$$

ist, so kann der Ausdruck (141) des Art. 74 (I) wie folgt dargestellt werden,

$$z'^{-k} = \pi^{-k} \Sigma J_{k\lambda}^{(p)} y^{p-k\mu}$$

wo die angewandten Bezeichnungen dieselbe Bedeutung haben, wie in den angezogenen Stellen der Abhandlung (I). Die Substitution dieses Ausdrucks von $z'^{-k}$ in den vorhergehenden giebt sogleich

$$y'^{-i'} = \Sigma\pi^{-k}\, \Sigma M(p, i', k)\, y^{p-k\mu}$$

wo

$$M(p,i',k) = P_{-k}^{(-i')} \, J_{k\lambda}^{(p)} = \frac{i'}{k} J_{k\lambda'}^{(k-i')} \, J_{k\lambda}^{(p)}$$

wo ebenfalls wie früher $\lambda' = \frac{1}{2}e'$, $\lambda = \frac{\mu}{2}e$ ist. Substituirt man diesen Ausdruck von $y'^{-i'}$ in

$$F = \tfrac{1}{2}\Sigma\Sigma \left\{(i,i',c) - \sqrt{-1}\,.\,(i,i',s)\right\} y^{i} \, y'^{-i'}$$

und vergleicht die Glieder mit denen des Ausdrucks

$$F = \tfrac{1}{2}\Sigma\Sigma \left\{[i,i',c] - \sqrt{-1}\,.\,[i,i',s]\right\} \pi^{-i'} y^{i-i'\mu}$$

so erhält man sogleich

$$\begin{aligned}
[i,i',c] = {} & (i,i',c)\; M(0,i',i') + (i-1,i',c)\; M(1,i',i') + (i-2,i',c)\; M(2,i',i') + \text{etc.} \\
& \qquad - (i+1,i',c)\; M(1,i',i') + (i+2,i',c)\; M(2,i',i') \mp \text{etc.} \\
& + (i,i'-1,c)\, M(0,i'-1,i') + (i-1,i'-1,c)\, M(1,i'-1,i') + (i-2,i'-1,c)\, M(2,i'-1,i') + \text{etc.} \\
& \qquad - (i+1,i'-1,c)\, M(1,i'-1,i') + (i'+2,i'-1,c)\, M(2,i'-1,i') \mp \text{etc.} \\
& + \text{etc.} \\
& + (i,i'+1,c)\, M(0,i'+1,i') + (i-1,i'+1,c)\, M(1,i'+1,i') + (i-2,i'+1,c)\, M(2,i'+1,i') + \text{etc.} \\
& \qquad - (i+1,i'+1,c)\, M(1,i'+1,i') + (i+2,i'+1,c)\, M(2,i'+1,i') \mp \text{etc.} \\
& + \text{etc.}
\end{aligned}$$

und ein ganz ähnlicher Ausdruck ergiebt sich für $[i,i',s]$ durch die $(i,i',s)$. Durch diesen Ausdruck kann man leicht jedes beliebige Glied berechnen, zu mehrerer Deutlichkeit will ich aber denselben für das in Rede stehende Argument so weit ausschreiben, dass man ihn danach beliebig ausdehnen kann, wobei ich bemerke, dass statt der Coefficienten $(i,i',c)$ und $(i,i',s)$ selbst ihre Producte mit der Zahl $i$ angewandt werden mussten, da es sich um die Entwickelung von $(i)a\Omega$ und nicht um die von $a\Omega$ handelt. Es wird dem obigen Ausdruck zufolge, und wenn man zur Abkürzung schlechtweg $J'^{(p)}$ statt $J_{5\lambda'}^{(p)}$, und $J^{(p)}$ statt $J_{5\lambda}^{(p)}$ schreibt:

$$\begin{aligned}
& \qquad\qquad\qquad\quad + \text{etc.} \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + \text{etc.} \\
(i)[11,5,c] = {} & + \text{etc.} + \tfrac{3}{5}J'^{(2)} J^{(1)}.\,10\,(10,3,c) + \tfrac{4}{5}J'^{(1)} J^{(1)}.\,10\,(10,4,c) \\
& \qquad\quad + \tfrac{3}{5}J'^{(2)} J^{(0)}.\,11\,(11,3,c) + \tfrac{4}{5}J'^{(1)} J^{(0)}.\,11\,(11,4,c) \\
& \qquad\quad - \tfrac{3}{5}J'^{(2)} J^{(1)}.\,12\,(12,3,c) - \tfrac{4}{5}J'^{(1)} J^{(1)}.\,12\,(12,4,c) \\
& \qquad\quad + \tfrac{3}{5}J'^{(2)} J^{(2)}.\,13\,(13,3,c) + \tfrac{4}{5}J'^{(1)} J^{(2)}.\,13\,(13,4,c) \\
& \qquad\quad \mp \text{etc.} \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \mp \text{etc.}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \text{etc.} && - \text{etc.} && + \text{etc.} \\
& + J'^{(0)} J^{(1)}.\,10\,(10,5,c) && - \tfrac{6}{5}J'^{(1)} J^{(1)}.\,10\,(10,6,c) && + \tfrac{7}{5}J'^{(2)} J^{(1)}.\,10\,(10,7,c) \mp \text{etc.} \\
& + J'^{(0)} J^{(0)}.\,11\,(11,5,c) && - \tfrac{6}{5}J'^{(1)} J^{(0)}.\,11\,(11,6,c) && + \tfrac{7}{5}J'^{(2)} J^{(0)}.\,11\,(11,7,c) \\
& - J'^{(0)} J^{(1)}.\,12\,(12,5,c) && + \tfrac{6}{5}J'^{(1)} J^{(1)}.\,12\,(12,6,c) && - \tfrac{7}{5}J'^{(2)} J^{(1)}.\,12\,(12,7,c) \\
& + J'^{(0)} J^{(2)}.\,13\,(13,5,c) && - \tfrac{6}{5}J'^{(1)} J^{(2)}.\,13\,(13,6,c) && + \tfrac{7}{5}J'^{(2)} J^{(2)}.\,13\,(13,7,c) \\
& \mp \text{etc.} && \pm \text{etc.} && \mp \text{etc.}
\end{aligned}$$

Man sieht hieraus, dass bloss zwei Reihen von $J$Functionen in Anwendung kommen, nemlich die, in welcher der untere Index $5\lambda'$, und die in welcher derselbe $5\lambda$ ist. Da nun hier

$$\log\lambda' = 8.66868 \quad \log\lambda = 8.96975$$

so bekommt man durch die Formeln des Art. 70 (I) leicht

$$\log J_{5\lambda'}^{(0)}=9.97607,\ \log\tfrac{1}{5}J_{5\lambda'}^{(1)}=8.65683,\ \log\tfrac{1}{5}J_{5\lambda'}^{(2)}=7.72742,\ \log\tfrac{1}{5}J_{5\lambda'}^{(3)}=6.6199$$

$$\log\tfrac{1}{5}J_{5\lambda'}^{(4)}=5.3867,\quad \log\tfrac{1}{5}J_{5\lambda'}^{(5)}=4.056,$$

$$\log J_{5\lambda}^{(0)}=9.89985,\ \log J_{5\lambda}^{(1)}=9.62061,\ \log J_{5\lambda}^{(2)}=9.00464,\ \log J_{5\lambda}^{(3)}=8.2043$$

$$\log J_{5\lambda}^{(4)}=7.2757,\quad \log J_{5\lambda}^{(5)}=6.2486,\quad \log J_{5\lambda}^{(6)}=5.139,$$

Die Multiplicationen, die die vorstehende Formel verlangt, sind nun mit wenig Mühe ausgeführt, das Resultat will ich für jeden Werth von $i'$ anführen.

| $i'$ | | |
|---|---|---|
| $i' =$ 3, | —0.018 | +0.003 |
| 4, | +0.597 | —0.448 |
| 5, | —4.893 | +7.698 |
| 6, | —2.653 | +8.046 |
| 7, | —1.368 | +3.468 |
| 8, | —0.356 | +0.511 |
| 9, | —0.036 | +0.027 |
| 10, | —0.001 | 0.000 |

$$(i)\,[11,5,c] = -8{,}728, \quad (i)\,[11,5,s] = +19{,}305$$

und hieraus findet sich durch die Formel (6)

$$n\delta z = +\,2{,}''40\,\sin\{(11-5\mu)\,\varepsilon - 5\,(c'-c\mu)\}$$
$$+\,5{,}''31\,\cos\{(11-5\mu)\,\varepsilon - 5\,(c'-c\mu)\}$$

welcher Werth aber noch einer Verbesserung bedarf, im Falle dass die angenommene osculirende mittlere Bewegung der Egeria von dem mittleren Werthe derselben merklich abweichen sollte; ein Umstand, der erst weiter unten untersucht werden kann.

25.

Wenden wir uns nun zu den übrigen Ungleichheiten, so ist zuerst die Verwandelung in die Form $\frac{\cos}{\sin}\left\{i\varepsilon - i'g'\right\}$ vorzunehmen, und die dazu erforderlichen $J$Functionen sind die folgenden,

| $y'^{-i'}-z'^{-i'}$ | $z'$ | $z'^{0}$ | $z'^{-1}$ | $z'^{-2}$ | $z'^{-3}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| —1 | 7.036*n* | 8.66868*n* | 7.337*n* | 8.66678 | 7.511 |
| —2 | | | 8.96924*n* | 7.9382*n* | 8.96545 |
| —3 | | | 7.513 | 9.1439*n* | 8.2895*n* |
| —4 | | | | 7.938 | 9.2665*n* |

womit man erhält

| $\varepsilon,\ g'$ | $\left(\frac{a}{\Delta}\right)$ cos | $\left(\frac{a}{\Delta}\right)$ sin | $\left(\frac{a}{\Delta}\right)^3$ cos | $\left(\frac{a}{\Delta}\right)^3$ sin |
|---|---|---|---|---|
| 0, 0 | +0.″14228 | | +0.″34462 | |
| 1, 0 | +0.01225 | +0.″00373 | +0.10783 | +0.″03251 |
| 2, 0 | +0.00035 | +0.00080 | +0.01073 | +0.01429 |
| 3, 0 | —0.00027 | +0.00003 | —0.00432 | +0.00175 |
| 4, 0 | — | — | —0.00215 | —0.00080 |
| —3,—1 | +0.00005 | +0.00001 | +0 0020 | +0.0001 |
| —2,—1 | +0.00036 | +0.00008 | +0.0053 | +0.0024 |
| —1,—1 | +0.00094 | +0.00044 | —0.0015 | +0.0055 |
| 0,—1 | —0.00285 | —0.00096 | —0.0654 | —0.0216 |
| 1,—1 | —0.03562 | —0.02412 | —0.2189 | —0.1493 |
| 2,—1 | —0.00672 | —0.00829 | —0.0761 | —0.0943 |
| 3,—1 | —0.00023 | —0.00167 | —0.0061 | —0.0290 |
| 4,—1 | +0.00021 | —0.00011 | +0.0043 | —0.0031 |
| 5,—1 | +0.00005 | +0.00005 | +0.0019 | +0.0016 |
| —1,—2 | —0.0002 | —0.0002 | —0.002 | —0.004 |
| 0,—2 | —0.0006 | —0.0007 | —0.003 | —0.007 |
| 1,—2 | —0.0010 | —0.0003 | +0.017 | +0.026 |
| 2,—2 | +0.0066 | +0.0170 | +0.064 | +0.167 |
| 3,—2 | +0.0006 | +0.0075 | +0.010 | +0.107 |
| 4,—2 | —0.0006 | +0.0016 | —0.012 | +0.033 |
| 5,—2 | —0.0003 | +0.0001 | —0.008 | +0.003 |
| 0,—3 | | | +0.001 | +0.005 |
| 1,—3 | | | —0.001 | +0.010 |
| 2,—3 | | | +0.002 | —0.007 |
| 3,—3 | | | +0.027 | —0.109 |
| 4,—3 | | | +0.041 | —0.075 |
| 5,—3 | | | +0.027 | —0.022 |
| 6,—3 | | | +0.009 | —0.001 |

die mehr wie ausreichend sind.

## 26.

Den zweiten Theil der Störungsfunction findet man durch die dafür im §. 7 (I) gegebenen Formeln wie folgt:

| ε, g′ | (Π) cos | sin |
|---|---|---|
| −1,−1 | +0″.00221 | +0″.00053 |
| 0,−1 | +0.01246 | +0.00852 |
| 1,−1 | −0.14907 | −0.10089 |
| −1,−2 | +0.0004 | +0.0001 |
| 0,−2 | +0.0023 | +0.0016 |
| 1,−2 | −0.0278 | −0.0188 |

und die Factoren, womit $\mu\left(\frac{a}{\Delta}\right)^3$ multiplicirt werden muss, um $ar\left(\frac{d\Omega}{dr}\right)$ und $a^2\left(\frac{d\Omega}{dZ}\right)$ zu erhalten:

$$\alpha^2\left(\frac{r'}{a'}\right)^2-\left(\frac{r}{a}\right)^2=-\ (9.84230)\ \ +2(8.9288)\cos\varepsilon-2(7.255)\cos 2\varepsilon$$
$$-2(8.5132)\cos g'-2(6.880)\cos 2g'-2(5.548)\cos 3g'$$

$$\alpha\sin J\left(\frac{r'}{a'}\right)\sin(f'+\Pi')=\ \ 2(8.4206)\sin g'+2(7.089)\sin 2g'+2(5.933)\sin 3g'$$
$$+\ (8.2937)\ \ -2(8.8436)\cos g'-2(7.513)\cos 2g'-2(6.357)\cos 3g'$$

Hieraus entstand:

| ε, g′ | $a\Omega$ cos | $a\Omega$ sin | $ar\left(\frac{d\Omega}{dr}\right)$ cos | $ar\left(\frac{d\Omega}{dr}\right)$ sin | $a\left(\frac{d\Omega}{dZ}\right)$ sin | $a\left(\frac{d\Omega}{dZ}\right)$ cos |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0, 0 | +0″.1423 | | −0″.1717 | | | +0″.0148 |
| 1, 0 | +0.01225 | +0″.00373 | −0.02255 | −0″.00927 | +0″.00841 | +0.02127 |
| 2, 0 | +0.0004 | +0.0008 | +0.016 | −0.0021 | +0.0045 | +0.0072 |
| 3, 0 | −0.0003 | 0.0000 | +0.019 | −0.0004 | +0.0015 | +0.0008 |
| −2,−1 | +0.0004 | +0.0001 | −0.002 | 0.000 | | |
| −1,−1 | −0.0013 | −0.0001 | −0.006 | −0.003 | | |
| 0,−1 | −0.0153 | −0.0095 | −0.005 | −0.007 | | |
| 1,−1 | +0.1135 | +0.0768 | +0.230 | +0.156 | | |
| 2,−1 | −0.0067 | −0.0083 | +0.017 | +0.025 | | |
| 3,−1 | −0.0002 | −0.0017 | −0.001 | +0.005 | | |
| 4,−1 | +0.0002 | −0.0001 | −0.001 | +0.001 | | |
| −1,−2 | −0.0006 | −0.0003 | +0.001 | +0.001 | | |
| 0,−2 | −0.0029 | −0.0023 | +0.002 | +0.003 | | |
| 1,−2 | +0.0268 | +0.0185 | +0.029 | +0.020 | | |
| 2,−2 | +0.0066 | +0.0170 | −0.023 | −0.056 | | |
| 3,−2 | +0.0006 | +0.0075 | −0.003 | −0.028 | | |
| 4,−2 | −0.0006 | +0.0016 | +0.004 | −0.007 | | |
| 5,−2 | −0.0003 | +0.0001 | +0.002 | +0.001 | | |

Die periodischen Breitenstörungen habe ich weggelassen, da sie voraussichtlich sehr klein ausfallen würden, indem die der Länge kaum etwas Merkliches geben.

27.

Um endlich die letzte Verwandelung auszuführen ist:

$$\log\left(J_{\lambda}^{(0)}-1\right)=7.939n;\ \log J_{\lambda}^{(1)}=8.9679;\ \log J_{\lambda}^{(2)}=7.637$$

$$\log\left(J_{2\lambda}^{(0)}-1\right)=8.538n;\ \log J_{2\lambda}^{(1)}=9.2632;\ \log J_{2\lambda}^{(2)}=8.235$$

und hieraus folgt:

| | $(i)a\Omega$ | | $ar\left(\frac{d\Omega}{dr}\right)$ | | $a^2\left(\frac{d\Omega}{dZ}\right)$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\varepsilon,\ \mu\varepsilon$ | cos | sin | cos | sin | sin | cos |
| 0, 0 | | | −0″,1717 | | | +0″,0148 |
| 1, 0 | +0″,01225 | +0″,00373 | −0.02255 | −0″,00927 | +0″,00841 | +0.02127 |
| 2, 0 | +0.0008 | +0.0016 | +0.0016 | −0.0021 | +0.0045 | +0.0072 |
| 3, 0 | −0.0009 | 0.000 | +0.0019 | −0.0004 | +0.0015 | +0.0008 |
| −2, −1 | −0.0009 | −0.0002 | −0.001 | 0.000 | | |
| −1, −1 | +0.0017 | +0.0004 | −0.005 | −0.001 | | |
| 0, −1 | −0.0106 | −0.0072 | −0.027 | −0.022 | | |
| 1, −1 | +0.1137 | +0.0776 | +0.226 | +0.152 | | |
| 2, −1 | −0.0026 | −0.0089 | +0.038 | +0.040 | | |
| 3, −1 | −0.0014 | −0.0063 | +0.002 | +0.008 | | |
| 4, −1 | +0.0006 | −0.0010 | −0.001 | +0.001 | | |
| −1, −2 | +0.0011 | +0.0006 | +0.001 | 0.000 | | |
| 0, −2 | −0.0046 | −0.0027 | −0.003 | −0.002 | | |
| 1, −2 | +0.0235 | +0.0121 | +0.032 | +0.030 | | |
| 2, −2 | +0.0173 | +0.0322 | −0.016 | −0.045 | | |
| 3, −2 | +0.0050 | +0.0270 | −0.008 | −0.036 | | |
| 4, −2 | −0.0015 | +0.0108 | +0.003 | −0.013 | | |
| 5, −2 | −0.0019 | +0.0021 | +0.003 | 0.000 | | |

## §. 3. Integration der Differentialgleichungen der Bewegung in einem gewissen Falle.

28.

Nehmen wir an, dass der störende Planet ein unterer ist, und lösen die Störungsfunction in eine, nach den Potenzen der Radien fortschreitende, unendliche Reihe auf, dann erhalten wir

$$\Omega=\mu\left\{-\frac{r}{r'^2}H+\frac{1}{r}+\frac{r'}{r^2}D_1+\frac{r'^2}{r^3}D_2+\text{etc.}\right\}$$

wo $D_1=H$ ist. Sondern wir hier die drei ersten Glieder ab, und setzen

$$\Omega_0=\mu\left\{\frac{1}{r}+\left(\frac{r'}{r^2}-\frac{r}{r'^2}\right)H\right\}$$

so wird der übrige Theil der Störungsfunction

$$\Omega_1=\mu\left\{\frac{r'^2}{r^3}D_2+\frac{r'^3}{r^4}D_3+\text{etc.}\right\}$$

und bekommt daher dieselbe Form, wie in dem Falle, wo der störende Planet ein oberer ist. Wenn daher das Verhältniss von $r'$ zu $r$ der Einheit nicht zu nahe kommt, so kann die Entwickelung von $\Omega_1$ eben so behandelt werden, wie hier im §. 1 für den Fall gezeigt wurde, wo der störende Planet ein oberer ist. Es kann dieses um so mehr geschehen, da ich in diesem Paragraphen zeigen werde, dass die Differentialgleichungen der Bewegung durch endliche Ausdrücke integrabel sind, wenn man den vorstehenden Ausdruck für $\Omega_0$ darin statt $\Omega$ substituirt; ich werde indess in dieser Entwickelung nur auf die erste Potenz der störenden Kraft Rücksicht nehmen. In meiner Pariser Preisschrift habe ich diese Integration schon ausgeführt, hier werde ich sie aber auf ganz anderem und kürzerem Wege ausführen.

29.

Nehmen wir die Gleichung (25) (I) vor, und lassen daraus das letzte Glied weg, welches von der Ordnung des Quadrats der störenden Kraft ist, dann wird sie

$$(7) \quad \ldots\ldots\ldots \quad \frac{d^2\nu}{dt^2} + \frac{k^2}{r^3}\nu = V$$

wo

$$(8) \quad \ldots \quad V = 2\frac{k^2}{r^3}h\int\left(\frac{d\Omega}{df}\right)dt - \frac{k^2 e \sin f}{r}\left(\frac{d\Omega}{df}\right) + \frac{k^2}{r}\left(\frac{d\Omega}{dr}\right)$$

ist. Erwägen wir nun, dass

$$H = \frac{xx' + yy' + zz'}{rr'}$$

ist, wenn $x$, $y$, $z$ und $x'$, $y'$, $z'$ irgend welche rechtwinkliche Coordinaten der beiden Planeten bedeuten, so soll jetzt für $\Omega$ der obige Werth von $\Omega_0$, nemlich

$$\Omega = \mu\left\{\frac{1}{r} + \left(\frac{1}{r^3} - \frac{1}{r'^3}\right)(xx' + yy' + zz')\right\}$$

in (8) substituirt werden. Nehmen wir von diesem Ausdruck von $\Omega$ die partiellen Differentialquotienten nach $x$, $y$ und $z$, und setzen nach den Differentiationen $z = 0$, so ergiebt sich

$$\left(\frac{d\Omega}{dX}\right) = \mu\left\{-\frac{X}{r^3} - 3\frac{X}{r^5}(Xx' + Yy') + \left(\frac{1}{r^3} - \frac{1}{r'^3}\right)x'\right\}$$
$$\left(\frac{d\Omega}{dY}\right) = \mu\left\{-\frac{Y}{r^3} - 3\frac{Y}{r^5}(Xx' + Yy') + \left(\frac{1}{r^3} - \frac{1}{r'^3}\right)y'\right\}$$
$$\left(\frac{d\Omega}{dZ}\right) = \mu\left(\frac{1}{r^3} - \frac{1}{r'^3}\right)z'$$

wo $X$, $Y$ und $Z$ die idealen Coordinaten des gestörten Planeten sind

Da nun allgemein

$$\left(\frac{d\Omega}{df}\right) = X\left(\frac{d\Omega}{dY}\right) - Y\left(\frac{d\Omega}{dX}\right)$$

ist, so wird hier

$$\left(\frac{d\Omega}{df}\right) = \mu\left\{\frac{Xy' - Yx'}{r^3} - \frac{Xy' - Yx'}{r'^3}\right\}$$

Da wir hier die elliptischen Werthe der Coordinaten substituiren dürfen, so haben wir

$$\frac{X}{r^3} = -\frac{d^2X}{k^2dt^2};\ \frac{Y}{r^3} = -\frac{d^2Y}{k^2dt^2}$$
$$\frac{x'}{r'^3} = -\frac{d^2x'}{k^2dt^2};\ \frac{y'}{r'^3} = -\frac{d^2y'}{k^2dt^2}$$

Eliminiren wir hiemit $r^3$ und $r'^3$ aus dem vorstehenden Ausdruck, so ergiebt sich

$$\left(\frac{d\Omega}{df}\right) = \mu\,\frac{x'd^2Y - y'd^2X - Yd^2x' + Xd^2y'}{k^2dt^2}$$

Multiplicirt man diesen Ausdruck mit $dt$ und integrirt, so bekommt man

$$\int\left(\frac{d\Omega}{df}\right)dt = \frac{\theta}{h} + \mu\,\frac{x'dY - y'dX - Ydx' + Xdy'}{k^2dt}$$

wo $\frac{\theta}{h}$ die willkührliche Constante ist.

30.

Da ferner allgemein

$$r\left(\frac{d\Omega}{dr}\right) = X\left(\frac{d\Omega}{dX}\right) + Y\left(\frac{d\Omega}{dY}\right)$$

ist, so wird hier

$$r\left(\frac{d\Omega}{dr}\right) = -\frac{\mu}{r} - \mu\left\{2\,\frac{Xx' + Yy'}{r^3} + \frac{Xx' + Yy'}{r'3}\right\}$$

Zufolge der Gleichung (11*) (I) ist

$$1 = \frac{h}{k^2dt}(XdY - YdX)$$

Multiplicirt man das zweite und dritte Glied des vorstehenden Ausdrucks mit diesem Werthe von Eins, so wird er

$$r\left(\frac{d\Omega}{dr}\right) = -\frac{\mu}{r} + 2\,\frac{\mu h}{k^2r^3dt}(x'XYdX - x'X^2dY + y'Y^2dX - y'XYdY)$$
$$+ \frac{\mu h}{k^2r'^3dt}(x'XYdX - x'X^2dY + y'Y^2dX - y'XYdY)$$

welcher zwar mehr zusammengesetzt ist, wie der obige, sich aber besser zur Substitution in (8) eignet wie dieser. Da ferner

$$he\sin f = \frac{dr}{dt}$$
$$rdr = XdX + YdY$$

ist, so wird

$$\frac{h^2 e \sin f}{r} = h\frac{X}{r^3}\frac{dX}{dt} + h\frac{Y}{r^3}\frac{dY}{dt}$$

31.

Substituirt man nun die eben entwickelten Grössen in (8), so bekommt man nach einer leichten Zusammenziehung

$$V = (26-\mu)\frac{k^2}{r^3} + 3\frac{\mu h}{r^5 dt}(XdX + YdY)(x'Y - y'X)$$
$$+ 2\frac{\mu h}{r^3 dt}(Xdy' - Ydx') + \frac{\mu h}{r'^3 dt}(y'dX - x'dY)$$

Multiplicirt man diesen Ausdruck mit $X$, und eliminirt wieder $r^3$ und $r'^3$ durch die oben angeführten Gleichungen der Bewegung im Kegelschnitt, so wird

$$VX = -(26-\mu)\frac{d^2X}{dt^2} + 3\frac{\mu h}{r^5 dt}(XdX + YdY)(x'Y - y'X)X$$
$$- 2\frac{\mu h}{k^2 dt^3}(d^2Xdy' - d^2Ydx')X - \frac{\mu h}{k^2 dt^3}(d^2y'dX - d^2x'dY)X$$

Da das zweite Glied dieses Ausdrucks durch partielle Integration

$$3\int\frac{\mu h}{r^5}(XdX + YdY)(x'Y - y'X)X =$$
$$-\frac{\mu h}{r^3}(x'Y - y'X)X + \frac{\mu h}{k^2 dt^2}\int(d^2Xdy' - d^2Ydx')X$$
$$+ \frac{\mu h}{k^2 dt^2}\int(y'd^2X - x'd^2Y)dX + \frac{\mu h}{k^2 dt^2}\int(y'dX - x'dY)d^2X$$

giebt, so bekommen wir zuerst

$$\int VXdt = (\mu-26)\frac{dX}{dt} + \frac{\mu h}{r^3}(y'X - x'Y)X$$
$$+ \frac{\mu h}{k^2 dt^2}\int(dx'd^2Y - dy'd^2X)X + \frac{\mu h}{k^2 dt^2}\int(d^2x'dY - d^2y'dX)X$$
$$+ \frac{\mu h}{k^2 dt^2}\int(y'd^2X - x'd^2Y)dX + \frac{\mu h}{k^2 dt^2}\int(y'dX - x'dY)d^2X$$

Es ist aber ferner

$$\int(dx'd^2Y - dy'd^2X)X = (dx'dY - dy'dX)X - \int(d^2x'dY - d^2y'dX)X$$
$$- \int(dx'dY - dy'dX)dX;$$

$$\int(y'd^2X - x'd^2Y)dX = (y'dX - x'dY)dX - \int(dy'dX - dx'dY)dX$$
$$- \int(y'dX - x'dY)d^2X;$$

Substituirt man diese, so bekommt man

$$\int VXdt = c + (\mu-26)\frac{dX}{dt} + \frac{\mu h}{r^3}(y'X - x'Y)X$$
$$+ \frac{\mu h}{k^2 dt^2}(dx'dY - dy'dX)X + \frac{\mu h}{k^2 dt^2}(y'dX - x'dY)dX$$

und ebenso ergiebt sich

$$\int VYdt = c' + (\mu - 2\mathfrak{G})\frac{dY}{dt} + \frac{\mu h}{r^3}(y'X - x'Y)\,Y$$
$$+ \frac{\mu h}{k^2 dt^2}(dx'dY - dy'dX)\,Y + \frac{\mu h}{k^2 dt^2}(y'dX - x'dY)\,dY$$

wo $c$ und $c'$ die willkührlichen Constanten sind.

32.

Integriren wir nun die Gleichung (7) durch das Laplace'sche Verfahren, so bekommen wir zuerst

$$\frac{Xd\nu - \nu dX}{dt} = \int VXdt$$
$$\frac{Yd\nu - \nu dY}{dt} = \int VYdt$$

und wenn man hieraus $d\nu$ eliminirt, und dabei auf die Gleichung

$$\frac{XdY - YdX}{dt} = \frac{k^2}{h}$$

Rücksicht nimmt,

$$\nu = \frac{h}{k^2}\,Y\int VXdt - \frac{h}{k^2}\,X\int VYdt$$

und nachdem die im vor. Art. ermittelten Werthe dieser Integrale substituirt worden sind,

$$\nu = c\frac{h}{k^2}\,Y - c'\frac{h}{k^2}\,X + 2\mathfrak{G} - \mu + \frac{\mu h}{k^2}\,\frac{x'dY - y'dX}{dt}$$

33.

Wenden wir uns nun zur Gleichung (27) (I), die wenn man das Quadrat der störenden Kraft übergeht, die folgende ist,

$$\frac{d\delta z}{dt} = h\int\left(\frac{d\Omega}{df}\right)dt - 2\nu$$

Die im Vorhergehenden schon enthaltenen Entwickelungen der Glieder dieser Gleichung geben sogleich

$$\frac{d\delta z}{dt} = -\,2c\frac{h}{k^2}\,Y + 2c'\frac{h}{k^2}\,X + 2\mu - 3\mathfrak{G}$$
$$+ \frac{\mu h}{k^2 dt}(y'dX - x'dY + Xdy' - Ydx')$$

und wenn man integrirt,

$$\delta z = c'' - 2c\frac{h}{k^2}\int Ydt + 2c'\frac{h}{k^2}\int Xdt + (2\mu - 3\mathfrak{G})\,t$$
$$+ \frac{\mu h}{k^2}(y'X - x'Y)$$

wo $c''$ die willkührliche Constante ist, und die Grössen, die ich unter

dem Integralzeichen stehen gelassen habe, leicht durch endliche Ausdrücke zu erhalten sind, deren Entwickelung aber hier überflüssig wäre.

34.

Die in den vorstehenden Integralen vorkommenden vier, durch die Integrationen eingeführten, Constanten kann man bestimmen wie man will, weil in den Differentialgleichungen nur ein Theil der Störungsfunction angewandt worden ist. Denn irgend welche Bestimmung dieser Constanten hat keine andere Wirkung, als dass sie die Werthe der analogen Constanten modificirt, die bei der Berücksichtigung des übrigen Theils der Störungsfunction eingeführt werden müssen und Grössen derselben Ordnung sind wie jene. Aus diesem Grunde werde ich die obigen Constanten so bestimmen, dass die Glieder, welche dieselbe Form haben, wie die aus der Bewegung im Kegelschnitt ohnehin entstehenden, in dem Ausdruck für $n\delta z$ verschwinden. In beiden Coordinaten $\delta z$ und $\nu$ kann man nicht alle diese Glieder fortschaffen. Durch diese Bedingung wird

$$c = 0;\; c' = 0;\; c'' = 0;\; 2\mu - 3\theta = 0$$

und wir erhalten die folgenden einfachen Ausdrücke

$$(9) \quad \ldots \quad \begin{cases} n\delta z = n\frac{\mu h}{k^2}(y'X - x'Y) \\ \nu = \frac{1}{2}\mu + \frac{\mu h}{k^2}\frac{x'dY - y'dX}{dt} = \frac{1}{2}\mu - \frac{d.n\delta z}{dg} \end{cases}$$

35.

Gehen wir zur dritten Coordinate $u$ über, die wir hier in dem Sinne nehmen wollen, wie sie von Art. 26 (I) an eingeführt worden ist. Nemlich $u = \frac{r}{a^0}s$. Die Gleichung (28) (I) wird alsdann hier

$$a\frac{d^2u}{dt^2} + a\frac{k^2}{r^3}u = k^2\left(\frac{d\Omega}{dZ}\right)\cos i$$

und geht nach der Substitution des Ausdrucks für $\left(\frac{d\Omega}{dZ}\right)$, welcher im Art. 29 entwickelt wurde, in folgende über,

$$a\frac{d^2u}{dt^2} + a\frac{k^2}{r^3}u = \mu k^2\left(\frac{1}{r^3} - \frac{1}{r'^3}\right)z'\cos i$$

Hieraus ergiebt sich auf dieselbe Art wie oben für $\nu$,

$$au = \mu h\cos i\; Y\int\left(\frac{1}{r^3} - \frac{1}{r'^3}\right)z'Xdt$$
$$-\mu h\cos i\; X\int\left(\frac{1}{r^3} - \frac{1}{r'^3}\right)z'Ydt$$

Durch Anwendung der Gleichungen

$$\frac{d^2X}{k^2dt^2} = -\frac{X}{r^3};\ \frac{d^2Y}{k^2dt^2} = -\frac{Y}{r^3};\ \frac{d^2z'}{k^2dt^2} = -\frac{z'}{r'^3}$$

bekommt man aber hier

$$\int\left(\frac{1}{r^3}-\frac{1}{r'^3}\right)z'Xdt = \frac{1}{k^2}\int\frac{Xd^2z'-z'd^2X}{dt} = \frac{Xdz'-z'dX}{k^2dt}$$

$$\int\left(\frac{1}{r^3}-\frac{1}{r'^3}\right)z'Ydt = \frac{1}{k^2}\int\frac{Yd^2z'-z'd^2Y}{dt} = \frac{Ydz'-z'dY}{k^2dt}$$

wo ich die beiden willkührlichen Constanten sogleich gleich Null gesetzt habe. Substituirt man diese Ausdrücke in den obigen Ausdruck für $au$, so wird

$$au = \mu z'\cos i \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

welches auch ein sehr einfacher Ausdruck ist. Man sieht durch die vorstehende Analyse, dass die Constante $\mathit{6}$ nur auf das constante Glied im Ausdruck von $\nu$ Einfluss geäussert hat, und es ist leicht zu erkennen, dass dessen Einfluss sich nicht weiter erstrecken kann, in Bezug auf welche Glieder der Störungsfunction man auch die Integrationen ausdehnt, so wie dass diese Eigenschaft sich auch auf die im §. 3 (I) entwickelten Differentialgleichungen erstreckt. In meiner Methode hat diese Constante also keinen Einfluss auf die Glieder, die die Säcularänderungen enthalten, wie bei den Laplace'schen Gleichungen der Fall ist; eine Eigenschaft, auf welche ich schon früher eine besondere Gelegenheit hatte aufmerksam zu machen.

36.

Ich mache darauf aufmerksam, dass die Integrabilität unserer Differentialgleichungen auch dann noch statt findet, wenn man aus dem Ausdruck für $\Omega$ des Art. 29 das erste Glied weglässt, und werde um dieses zu zeigen dieses Glied allein aufnehmen. Setzt man demzufolge blos $\Omega = \frac{\mu}{r}$ in die Ausdrücke, so bekommt man zuerst

$$\left(\frac{d\Omega}{df}\right) = 0;\ r\left(\frac{d\Omega}{dr}\right) = -\frac{\mu}{r};\ \left(\frac{d\Omega}{dZ}\right) = 0;\ h\int\left(\frac{d\Omega}{df}\right)dt = 6';$$

und die Differentialgleichung für $\nu$ wird

$$\frac{d^2\nu}{dt^2} + \frac{k^2}{r^3}\nu = (26' - \mu)\frac{k^2}{r^3}$$

wie auch aus dem Vorhergehenden leicht zu erkennen ist. Nach der Ausführung der Integrationen werden wir daher jetzt bekommen

$$\delta z = 0;\ \nu = \frac{1}{2}\mu;\ u = 0$$

Für den Fall, wo

$$\Omega = \mu\left(\frac{1}{r^3} - \frac{1}{r'^3}\right)(xx' + yy' + zz')$$

substituirt wird, ergiebt sich also

$$n\delta z = n\frac{\mu h}{k^2}(y'X - x'Y)$$
$$\nu = \frac{\mu h}{k^2}\frac{x'dY - y'dX}{dt}$$
$$au = \mu z' \cos i$$

Ich werde diese Ausdrücke weiter unten anwenden.

37.

Ich werde noch in die Ausdrücke (9) und (10) die Anomalien einführen, um zu zeigen, welche Form sie alsdann annehmen. Für die rechtwinklichen Coordinaten haben wir durch §. 4 (I) folgende Ausdrücke

$$X = r\cos(f + \Pi);\ x' = r'\cos(f' + \Pi')$$
$$Y = r\sin(f + \Pi);\ y' = r'\cos J\sin(f' + \Pi')$$
$$z' = -r'\sin J\sin(f' + \Pi')$$

Substituirt man diese in die erste (9), und erinnert sich, dass

$$h = \frac{k^2}{a^2 n\cos\varphi}$$

ist, so ergiebt sich sogleich, wenn man auch $m'$ statt $\mu$ wieder einführt,

$$n\delta z = \frac{m'}{a^2\cos\varphi}rr'\left\{\cos^2\tfrac{1}{2}J\sin(f' - f + \Pi' - \Pi) - \sin^2\tfrac{1}{2}J\sin(f' + f + \Pi' + \Pi)\right\}$$

Da ferner

$$\frac{d.r\cos f}{dg} = -\frac{a\sin f}{\cos\varphi},\ \frac{d.r\sin f}{dg} = \frac{a(e + \cos f)}{\cos\varphi}$$

so giebt der vorstehende Ausdruck von $n\delta z$ in Folge der zweiten Gleichung (9)

$$\nu = \tfrac{1}{2}m' + \frac{m'}{a\cos^2\varphi}r'\left\{\cos^2\tfrac{1}{2}J\cos(f' - f + \Pi' - \Pi) + \sin^2\tfrac{1}{2}J\cos(f' + f + \Pi' + \Pi)\right\}$$
$$+ \frac{m'e}{a\cos^2\varphi}r'\left\{\cos^2\tfrac{1}{2}J\cos(f' + \Pi' - \Pi) + \sin^2\tfrac{1}{2}J\cos(f' + \Pi' + \Pi)\right\}$$

Der Ausdruck (10) giebt sogleich

$$au = -m'\cos i\sin J\,r'\sin(f' + \Pi')$$

Ich bemerke hiezu, dass dieses die Ausdrücke sind, wodurch die auf den gemeinschaftlichen Schwerpunkt der Sonne und des störenden Planeten bezogenen Coordinaten des gestörten Planeten auf den Mittelpunkt der Sonne reducirt werden.

## §. 4. Entwickelung und allgemeine Integration der Differentialgleichungen für die erste Potenz der störenden Massen.

38.

Es ist zuerst die Gleichung (59) (I), nemlich

$$\frac{dW}{d\varepsilon} = Ma\left(\frac{d\Omega}{d\varepsilon}\right) + Nar\left(\frac{d\Omega}{dr}\right)$$

worin

$$M = \frac{1}{\cos^2\varphi}\Big\{-(3-\tfrac{3}{2}e^2)+2e\cos\varepsilon-\tfrac{1}{2}e^2\cos 2\varepsilon$$
$$+e^2\cos(\eta+\varepsilon)-3e\cos\eta+(4-e^2)\cos(\eta-\varepsilon)-e\cos(\eta-2\varepsilon)\Big\}$$
$$N = \frac{1}{\cos^2\varphi}\Big\{e\sin\varepsilon-\tfrac{1}{2}e^2\sin 2\varepsilon$$
$$+e^2\sin(\eta+\varepsilon)-e\sin\eta-(2-e^2)\sin(\eta-\varepsilon)+e\sin(\eta-2\varepsilon)\Big\}$$

ist, in Verbindung mit der Form, die im Vorhergehenden den Reihenentwickelungen der Differentialquotienten der Störungsfunction gegeben worden ist, zu entwickeln und zu integriren. Diese Reihen sollen von nun an wie folgt bezeichnet werden,

$$(i)\ a\Omega = \Sigma\Sigma\, 6(i,i',c)\cos\{(i-i'\mu)\varepsilon-i'(c'-c\mu)\}$$
$$+\Sigma\Sigma\, 6(i,i',s)\sin\{(i-i'\mu)\varepsilon-i'(c'-c\mu)\}$$

woraus

$$a\left(\frac{d\Omega}{d\varepsilon}\right) = -\Sigma\Sigma\, 6(i,i',c)\sin\{(i-i'\mu)\varepsilon-i'(c'-c\mu)\}$$
$$+\Sigma\Sigma\, 6(i,i',s)\cos\{(i-i'\mu)\varepsilon-i'(c'-c\mu)\}$$

folgt, und

$$ar\left(\frac{d\Omega}{dr}\right) = \Sigma\Sigma\, c(i,i',c)\cos\{(i-i'\mu)\varepsilon-i'(c'-c\mu)\}$$
$$+\Sigma\Sigma\, c(i,i',s)\sin\{(i-i'\mu)\varepsilon-i'(c'-c\mu)\}$$

in welchen Ausdrücken die Summation in Bezug auf $i$ sich von $-\infty$ bis $+\infty$, die in Bezug auf $i'$ sich aber nur von 0 bis $+\infty$ erstreckt. Ich nehme ferner wie vorher an, dass statt des constanten Gliedes selbst in $ar\left(\frac{d\Omega}{dr}\right)$ der doppelte Betrag desselben angesetzt sei. In $a\left(\frac{d\Omega}{d\varepsilon}\right)$ ist kein constantes Glied vorhanden.

Da die vorzunehmende allgemeine Entwickelung und Integration sich am Einfachsten und Uebersichtlichsten durch Anwendung der imaginären Exponentialfunctionen ausführen lässt, so will ich diese einführen. Sei wie früher

$$y = h^{\varepsilon\sqrt{-1}};\quad \pi = h^{-(c'-c\mu)\sqrt{-1}}$$

wo $h$ die Grundzahl der natürlichen Logarithmen ist, dann wird

$$\frac{dy}{y} = d\varepsilon \sqrt{-1}, \quad \left(\frac{d\Omega}{d\varepsilon}\right) = y\left(\frac{d\Omega}{dy}\right)\sqrt{-1}$$

und wir bekommen zuerst

$$ay\left(\frac{d\Omega}{dy}\right) = \tfrac{1}{2}\Sigma\Sigma\{\mathfrak{b}(i,i',c) - \sqrt{-1}\,.\,\mathfrak{b}(i,i',s)\}\,\pi^{i'}y^{i-i'\mu}$$

$$ar\left(\frac{d\Omega}{dr}\right) = \tfrac{1}{2}\Sigma\Sigma\{c(i,i',c) - \sqrt{-1}\,.\,c(i,i',s)\}\,\pi^{i'}y^{i-i'\mu}$$

wo beide Summen von $-\infty$ bis $+\infty$ ausgedehnt werden müssen,

$$(12) \quad \dots\dots \quad \begin{cases} \mathfrak{b}(-i,-i',c) = -\,\mathfrak{b}(i,i',c) \\ \mathfrak{b}(-i,-i',s) = \quad \mathfrak{b}(i,i',s) \\ c(-i,-i',c) = \quad c(i,i',c) \\ c(-i,-i',s) = -\,c(i,i',s) \end{cases}$$

und überdiess

$$\mathfrak{b}(0,0,c) = \mathfrak{b}(0,0,s) = c(0,0,s) = 0$$

ist.

## 39.

Setzen wir ferner

$$v = h^{\eta\sqrt{-1}}$$

und substituiren die Werthe

$$d\varepsilon = \frac{dy}{y\sqrt{-1}}, \quad \left(\frac{d\Omega}{d\varepsilon}\right) = y\left(\frac{d\Omega}{dy}\right)\sqrt{-1}$$

$$2\cos\varepsilon = y + \frac{1}{y}, \quad 2\sqrt{-1}\,.\sin\varepsilon = y - \frac{1}{y}$$

$$2\cos 2\varepsilon = y^2 + \frac{1}{y^2}, \quad 2\sqrt{-1}\,.\sin 2\varepsilon = y^2 - \frac{1}{y^2}$$

$$2\cos\eta = v + \frac{1}{v}, \quad 2\sqrt{-1}\,.\sin\eta = v - \frac{1}{v}$$

$$2\cos(\eta-\varepsilon) = \frac{v}{y} + \frac{y}{v}, \quad 2\sqrt{-1}\,.\sin(\eta-\varepsilon) = \frac{v}{y} - \frac{y}{v}$$

etc. etc.

in den obigen Ausdruck für $dW$, so wird dieser

$$\begin{aligned} dW = \frac{dy}{y}\Big\{ & B_0 + B_1 y + B_2 y^2 + B_1\frac{1}{y} + B_2\frac{1}{y^2} \\ & + \frac{1}{v}\left[A_{-1}\frac{1}{y} + A_0 + A_1 y + A_2 y^2\right] \\ & + v\left[A_{-1}y + A_0 + A_1\frac{1}{y} + A_2\frac{1}{y^2}\right]\Big\}\, ay\left(\frac{d\Omega}{dy}\right) \\ + \frac{dy}{y}\Big\{ & D_1 y + D_2 y^2 - D_1\frac{1}{y} - D_2\frac{1}{y^2} \\ & + \frac{1}{v}\left[C_{-1}\frac{1}{y} + C_0 + C_1 y + C_2 y^2\right] \\ & - v\left[C_{-1}y + C_0 + C_1\frac{1}{y} + C_2\frac{1}{y^2}\right]\Big\}\, ar\left(\frac{d\Omega}{dr}\right) \end{aligned}$$

wo

$$\left.\begin{array}{l} A_{-1}=\frac{e^2}{2\cos^2\varphi},\; A_0=-\frac{3e}{2\cos^2\varphi},\; A_1=\frac{4-e^2}{2\cos^2\varphi},\; A_2=-\frac{e}{2\cos^2\varphi} \\ C_{-1}=\frac{e^2}{2\cos^2\varphi},\; C_0=-\frac{e}{2\cos^2\varphi},\; C_1=-\frac{2-e^2}{2\cos^2\varphi},\; C_2=\frac{e}{2\cos^2\varphi} \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad (13)$$

$$B_0=-\frac{6-3e^2}{2\cos^2\varphi},\; B_1=\frac{e}{\cos^2\varphi},\quad B_2=-\frac{e^2}{4\cos^2\varphi}$$

$$D_1=-\frac{e}{2\cos^2\varphi},\; D_2=\frac{e^2}{4\cos^2\varphi}$$

ist. Substituirt man hierin die im vor. Art. gegebenen Reihenentwickelungen der Differentialquotienten der Störungsfunction nach $y$ und $r$, so nimmt $dW$ folgende Form an,

$$\begin{aligned} 2dW = & \frac{dy}{y}\Sigma\Sigma\left\{F(i,i',c)+\frac{1}{v}G(i,i',c)+vH(i,i',c)\right\}\pi^{i'}y^{i-i'\mu} \\ & -\sqrt{-1}.\frac{dy}{y}\Sigma\Sigma\left\{F(i,i',s)+\frac{1}{v}G(i,i',s)+vH(i,i',s)\right\}\pi^{i'}y^{i-i'\mu} \end{aligned} \quad (14)$$

wo beide Summen sich wieder von $-\infty$ bis $+\infty$ erstrecken,

$$\begin{aligned} F(i,i',c)= & B_0 6(i,i',c)+B_1 6(i-1,i',c)+B_2 6(i-2,i',c)+B_1 6(i+1,i',c)+B_2 6(i+2,i',c) \\ & +D_1 c(i-1,i',c)+D_2 c(i-2,i',c)-D_1 c(i+1,i',c)-D_2 c(i+2,i',c) \end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned} G(i,i',c)= & A_{-1}6(i+1,i',c)+A_0 6(i,i',c)+A_1 6(i-1,i',c)+A_2 6(i-2,i',c) \\ & +C_{-1}c(i+1,i',c)+C_0 c(i,i',c)+C_1 c(i-1,i',c)+C_2 c(i-2,i',c) \\ H(i,i',c)= & A_{-1}6(i-1,i',c)+A_0 6(i,i',c)+A_1 6(i+1,i',c)+A_2 6(i+2,i',c) \\ & -C_{-1}c(i-1,i',c)-C_0 c(i,i',c)-C_1 c(i+1,i',c)-C_2 c(i+2,i',c) \end{aligned}\right\} \quad (15)$$

ist, und $F(i,i',s)$, $G(i,i',s)$, $H(i,i',s)$ hervorgehen, wenn man in diesen Ausdrücken innerhalb der Klammern allenthalben $c$ in $s$ verwandelt. Die Gleichungen (12) geben in Verbindung mit den vorstehenden Ausdrücken leicht zu erkennen, dass

$$\left.\begin{aligned} F(-i,-i',c) &= -F(i,i',c) \\ G(-i,-i',c) &= -H(i,i',c) \\ F(-i,-i',s) &= \phantom{-}F(i,i',s) \\ G(-i,-i',s) &= \phantom{-}H(i,i',s) \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16)$$

In Bezug auf die Anwendung der Ausdrücke (15) ist zu bemerken:

1) Dass man die Producte, aus welchen die $H$ Coefficienten bestehen, nicht besonders zu berechnen braucht, sondern sie unmittelbar aus denen für die $G$ Coefficienten erhält. Da man für jeden merklichen Werth von $i'$ alle Glieder rechnen muss, in welchen für $i$ merkliche Werthe entstehen, so ordnet man die Rechnung am Zweckmässigsten so, dass man unter den Ueberschriften

etc., $i-2,i'$; $i-1,i'$; $i,i'$; $i+1,i'$; $i+2,i'$; etc.

die Logarithmen von

$$\text{etc. } 6(i-2,i');\ 6(i-1,i');\ 6(i,i');\ 6(i+1,i');\ 6(i+2,i');\ \text{etc.}$$

*) hinschreibt, und dazu die Logarithmen von $A_{-1}$, $A_0$. $A_1$, $A_2$ addirt. Hierunter schreibt man in dieselben Columnen die Logarithmen von

$$\text{etc. } c(i-2,i');\ c(i-1,i')\ c(i,i');\ c(i+1,i');\ c(i+2,i');\ \text{etc.}$$

wozu man die Logarithmen von $C_{-1}$, $C_0$, $C_1$, $C_2$ addirt. Die Zahlen der Logarithmen der Producte schreibt man hierauf nach Angabe des Ausdrucks (15) für $G(i,i',c)$ in die betreffenden Columnen und addirt sie. Um hieraus die $H$ Coefficienten zu bekommen, braucht man nur die Producte mit $A_{-1}$ und $C_{-1}$ um zwei Columnen rechter Hand zu verschieben, die Producte mit $A_0$ und $C_0$ in denselben Columnen, in welchen sie sich schon befinden, wieder hinzuschreiben, die Producte mit $A_1$ und $C_1$ um zwei Columnen zur linken, die mit $A_2$ und $C_2$ um vier Columnen zur linken zu verschieben, und die algebraischen Zeichen der Producte mit den vier $C$ Coefficienten umzuwechseln.

Hierauf giebt die Addition die $H$ Coefficienten.

2) Den oben gegebenen Ausdruck für die $F$ Coefficienten braucht man gar nicht anzuwenden, sondern kann diese auf eine einfachere Art berechnen. Die Ausdrücke (15) geben

$$\begin{aligned}
&F(i,i',c)+\tfrac{1}{2}\{G(i+1,i',c)+H(i-1,i',c)\}= \\
&(B_0+A_1)\,6(i,i',c) \\
&+\{B_1+\tfrac{1}{2}A_2+\tfrac{1}{2}A_0\}\,6(i-1,i',c)+(B_2+\tfrac{1}{2}A_{-1})\,6(i-2,i',c) \\
&+\{B_1+\tfrac{1}{2}A_2+\tfrac{1}{2}A_0\}\,6(i+1,i',c)+(B_2+\tfrac{1}{2}A_{-1})\,6(i+2,i',c) \\
&+\{D_1+\tfrac{1}{2}C_2-\tfrac{1}{2}C_0\}\,c(i-1,i',c)+(D_2-\tfrac{1}{2}C_{-1})\,c(i-2,i',c) \\
&-\{D_1+\tfrac{1}{2}C_2-\tfrac{1}{2}C_0\}\,c(i+1,i',c)-(D_2-\tfrac{1}{2}C_{-1})\,c(i+2,i',c)
\end{aligned}$$

substituirt man in die rechte Seite dieser Gleichung die oben gegebenen Ausdrücke der $A$, $B$, $C$, $D$ Coefficienten, so wird

$$(17)\quad .\quad .\quad F(i,i',c)=-\tfrac{1}{2}\{G(i+1,i',c)+H(i-1,i',c)\}-6(i,i',c)$$

und hieraus bekommt man durch Vertauschung des Index $c$ mit $s$ einen analogen Ausdruck für $F(i,i',s)$. Die Berechnung der $F$ Coefficienten durch diese Ausdrücke ist am Einfachsten, und man würde also höchstens den oben bei (15) gegebenen zur Controle anwenden. Aber auch

*) Ich habe hier die Indices $c$ und $s$ weggelassen, um anzudeuten, dass das Schema sich auf beide Gattungen der durch $c$ und $s$ unterschiedenen Coefficienten bezieht.

dieses ist nicht nothwendig, denn man kann die Controle auf kürzere Art erhalten. Man kann auf ähnliche Weise wie in mehreren der vorhergehenden Rechnungen verfahren. Man braucht nur neben der oben angeführten Reihe der $b$ und $c$ Coefficienten für jeden Werth von $i'$ die Summe derselben einzuführen, und diese auch mit den $A$ und $C$ Coefficienten zu multipliciren. Die Summe der $G$ und $H$ Coefficienten muss hiemit übereinstimmen.

40.

Die oben ausgeführten Entwickelungen und beschriebenen Rechnungen gelten für jeden Werth von $i'$, die Null eingeschlossen. Um im letztgenannten Falle sicher zu gehen pflege ich, obgleich man hier streng genommen die Coefficienten nicht braucht, in welchen $i$ negativ ist, die folgenden Coefficientenreihen hinzuschreiben, und mit den $A$ und $C$ Coefficienten zu multipliciren,

$$\begin{array}{llllll}
b(-2,0,c); & b(-1,0,c); & 0; & b(1,0,c); & b(2,0,c); & \text{etc.}\\
c(-2,0,c); & c(-1,0,c); & c(0,0,c); & c(1,0,c); & c(2,0,c); & \text{etc.}\\
b(-2,0,s); & b(-1,0,s); & 0; & b(1,0,s); & b(2,0,s); & \text{etc.}\\
c(-2,0,s); & c(-1,0,s); & 0; & c(1,0,s); & c(2,0,s); & \text{etc.}
\end{array}$$

worauf man die Ausdrücke (15) ohne Irrthum befürchten zu müssen anwenden kann. Die beiden ersten Coefficienten dieser vier Reihen müssen den Gleichungen (12) gemäss bestimmt werden, welche

$$\begin{array}{ll}
b(-2,0,c) = -b(2,0,c); & b(-1,0,c) = -b(1,0,c)\\
c(-2,0,c) = \phantom{-}c(2,0,c); & c(-1,0,c) = \phantom{-}c(1,0,c)\\
b(-2,0,s) = \phantom{-}b(2,0,s); & b(-1,0,s) = \phantom{-}b(1,0,s)\\
c(-2,0,s) = -c(2,0,s); & c(-1,0,s) = -c(1,0,s)
\end{array}$$

geben. Für $i' = 0$ finden einige specielle Gleichungen zwischen den $F$, $G$ und $H$ Coefficienten statt, die angeführt zu werden verdienen. Es sind

$$\left.\begin{array}{l}
F(0,0,c) = 0\\
G(0,0,c) = -H(0,0,c)\\
G(0,0,s) = \phantom{-}H(0,0,s)
\end{array}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (18)$$

die aus (16) hervorgehen, und ihren Grund darin haben, dass $dW\sqrt{-1}$ in der That eine reelle Grösse ist. Es ist aber ferner noch

$$F(0,0,s) = -G(1,0,s) = eH(0,0,s) \quad \ldots\ldots \quad (19)$$

deren Richtigkeit man leicht erkennt, wenn man bedenkt, dass aus den (13)

$$e(A_{-1}+A_1)=-A_0-A_2=2B_1\,;\;A_{-1}=-2B_2=-eA_2$$
$$e(C_1-C_{-1})=\quad C_0-C_2=2D_1\,;\;C_{-1}=\quad 2D_2=-eC_2$$

folgt, und diese so wie $i=0$, $i=1$, $i'=0$ und $s$ statt $c$ in die (15) setzt.

Wenn diese Entwickelungen ausgeführt sind, so ordnet man am Zweckmässigsten das Resultat derselben so, dass abtheilungsweise immer die Coefficienten

$$\begin{array}{ll} F(i,i',c)\,, & F(i,i',s) \\ G(i+1,i',c), & G(i+1,i',s) \\ H(i-1,i',c), & H(i-1,i',s) \end{array}$$

unmittelbar unter einander zu stehen kommen, denn es wird sich weiter unten zeigen, dass die Summe dieser drei Coefficienten gebraucht wird. Zugleich hat man hier die beiden $G$ und $H$ zusammen stehend, woraus der darüber stehende $F$ Coefficient nach (17) berechnet werden muss.

## 41.

Integrirt man nun den Ausdruck (14), so ergiebt sich mit Vorbehalt der Hinzufügung der willkührlichen Constanten, die später berücksichtigt werden sollen,

$$\begin{aligned} 2W= &\quad \Sigma\Sigma\left\{\frac{F(i,i',c)}{i-i'\mu}+\frac{1}{v}\,\frac{G(i,i',c)}{i-i'\mu}+v\,\frac{H(i,i',c)}{i-i'\mu}\right\}\pi^{i'}y^{i-i'\mu} \\ &-\sqrt{-1}\,.\,\Sigma\Sigma\left\{\frac{F(i,i',s)}{i-i'\mu}+\frac{1}{v}\,\frac{G(i,i',s)}{i-i'\mu}+v\,\frac{H(i,i',s)}{i-i'\mu}\right\}\pi^{i'}y^{i-i'\mu} \end{aligned}$$

und hieraus

$$\begin{aligned} -2v\left(\frac{dW}{dv}\right)= &\quad \Sigma\Sigma\left\{\frac{1}{v}\,\frac{G(i,i',c)}{i-i'\mu}-v\,\frac{H(i,i',c)}{i-i'\mu}\right\}\pi^{i'}y^{i-i'\mu} \\ &-\sqrt{-1}\,.\,\Sigma\Sigma\left\{\frac{1}{v}\,\frac{G(i,i',s)}{i-i'\mu}-v\,\frac{H(i,i',s)}{i-i'\mu}\right\}\pi^{i'}y^{i-i'\mu} \end{aligned}$$

Da nun offenbar

$$\left(\frac{\overline{dW}}{dv}\right)dy=\left(\frac{\overline{dW}}{d\tau}\right)dt$$

ist, so wird zufolge der Gleichungen (38) (I)

$$\begin{aligned} 2nd\delta z &= \Sigma\Sigma\{P(i,i',c)-\sqrt{-1}\,.\,P(i,i',s)\}\,\pi^{i'}y^{i-i'\mu}\,.\,ndt \\ 2d\nu &= \tfrac{1}{2}\Sigma\Sigma\{Q(i,i',c)-\sqrt{-1}\,.\,Q(i,i',s)\}\,\pi^{i'}y^{i-i'\mu}\,.\,\frac{dy}{y} \end{aligned}$$

wenn

$$(20)\quad \ldots\quad \begin{cases} P(i,i',c)=\dfrac{F(i,i',c)}{i-i'\mu}+\dfrac{G(i+1,i',c)}{i+1-i'\mu}+\dfrac{H(i-1,i',c)}{i-1-i'\mu} \\[2ex] Q(i,i',c)=\qquad\qquad\;\;\dfrac{G(i+1,i',c)}{i+1-i'\mu}-\dfrac{H(i-1,i',c)}{i-1-i'\mu} \end{cases}$$

so wie ganz ähnliche Ausdrücke für $P(i,i',s)$ und $Q(i,i',s)$ angenommen werden. Da ferner

$$ndt = \frac{r}{a}\,d\varepsilon = \frac{dy}{y\sqrt{-1}}\left(1 - y\frac{e}{2} - \frac{1}{y}\frac{e}{2}\right)$$

ist, so geben die vorstehenden Ausdrücke für $d\delta z$ und $d\nu$ mit Vorbehalt der den Integrationen hinzuzufügenden willkührlichen Constanten

$$2n\delta z = \Sigma\Sigma\left\{\frac{P(i,i',c) - \frac{e}{2}[P(i+1,i',c) + P(i-1,i',c)]}{(i-i'\mu)\sqrt{-1}} - \frac{P(i,i',s) - \frac{e}{2}[P(i+1,i',s) + P(i-1,i',s)]}{i-i'\mu}\right\}\pi^{i'}y^{i-i'\mu}$$

$$2\nu = \tfrac{1}{2}\Sigma\Sigma\left\{\frac{Q(i,i',c)}{i-i'\mu} - \sqrt{-1}\,.\,\frac{Q(i,i',s)}{i-i'\mu}\right\}\pi^{i'}y^{i-i'\mu}$$

Geht man nun zum Reellen über, und setzt

$$\left.\begin{aligned} R(i,i',c) &= \frac{P(i,i',c) - \frac{e}{2}P(i+1,i',c) - \frac{e}{2}P(i-1,i',c)}{i-i'\mu} \\ S(i,i',c) &= \frac{Q(i,i',c)}{i-i'\mu} \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \quad (21)$$

sowie ähnliche Ausdrücke für $R(i,i',s)$ und $S(i,i',s)$, so wird

$$\left.\begin{aligned} n\delta z = {} & \Sigma\Sigma R(i,i',c)\sin\{(i-i'\mu)\,\varepsilon - i'(c'-c\mu)\} \\ & -\Sigma\Sigma R(i,i',s)\cos\{(i-i'\mu)\,\varepsilon - i'(c'-c\mu)\} \\ \nu = {} & \tfrac{1}{2}\Sigma\Sigma S(i,i',c)\cos\{(i-i'\mu)\,\varepsilon - i'(c'-c\mu)\} \\ & +\tfrac{1}{2}\Sigma\Sigma S(i,i',s)\sin\{(i-i'\mu)\,\varepsilon - i'(c'-c\mu)\} \end{aligned}\right\} \quad . \; . \quad (22)$$

wo die Summation in Bezug auf $i'$ sich nur von 0 bis $\infty$ erstreckt. Nachdem man also durch Anwendung der Ausdrücke (15) und (17) die $G$, $H$ und $F$ Coefficienten berechnet hat, ergeben sich die Coefficienten der Störungen der mittleren Länge und des natürlichen Logarithmus des Radius Vectors durch die Ausdrücke (20) und (21). In allen diesen Rechnungen muss man die algebraischen Zeichen aller Grössen so lassen, wie sie sich von selbst ergeben, und nur bei den Coefficienten

$$R(i,i',s)$$

ist am Schlusse der ganzen Rechnung das Zeichen umzuwechseln, nemlich + in — und — in + zu verwandeln.

## 12.

Die vorgehends beschriebenen Rechnungen können mit Ausnahme des ersten Ausdrucks (21) auf folgende einfache Art controlirt werden. Zufolge der Gleichungen (70) (I) und (71) (I) ist, wenn man nur auf die erste Potenz der störenden Kraft Rücksicht nimmt,

$$\int(\overline{dW}) = 2\nu + \frac{d\delta z}{dt}$$

Nun wird aber aus (14)

$$\begin{aligned} 2(\overline{dW}) = & \quad \frac{dy}{y} \Sigma\Sigma \{F(i,i',c) + G(i+1,i',c) + H(i-1,i',c)\} \pi^{i'} y^{i-i'\mu} \\ & - \sqrt{-1}.\frac{dy}{y} \Sigma\Sigma \{F(i,i',s) + G(i+1,i',s) + H(i-1,i',s)\} \pi^{i'} y^{i-i'\mu} \end{aligned}$$

und aus dem vor. Art.

$$\begin{aligned} 4\nu + 2\frac{d\delta z}{dt} = & \quad \Sigma\Sigma \{S(i,i',c) + P(i,i',c)\} \pi^{i'} y^{i-i'\mu} \\ & - \sqrt{-1}. \Sigma\Sigma \{S(i,i',s) + P(i,i',s)\} \pi^{i'} y^{i-i'\mu} \end{aligned}$$

Setzt man daher zur Abkürzung

$$(23) \quad . \quad . \quad . \quad \Pi(i,i',c) = \frac{F(i,i',c) + G(i+1,i',c) + H(i-1,i',c)}{i-i'\mu}$$

und einen ähnlichen Ausdruck für $\Pi(i,i',s)$, so ergeben sich die beiden folgenden Bedingungsgleichungen

$$(24) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \begin{cases} \Pi(i,i',c) = S(i,i',c) + P(i,i',c) \\ \Pi(i,i',s) = S(i,i',s) + P(i,i',s) \end{cases}$$

die zur Controle dienen. Die Berechnung der $R$ aus den $P$ durch die erste (21) wird hiedurch nicht controlirt, und also auf andere Art nachgesehen werden müssen, wenn man es für nöthig halten sollte. Da zufolge der oben angeführten Gleichungen

$$\delta\frac{h}{h_0} = -\frac{d\delta z}{dt} - 2\nu$$

ist, so geben die vorstehenden Entwickelungen, nach dem Uebergang zum Reellen sogleich

$$(25) \quad . \quad \begin{cases} \delta\frac{h}{h_0} = - \Sigma\Sigma\, \Pi(i,i',c) \cos\{(i-i'\mu)\varepsilon - i'(c'-c\mu)\} \\ \qquad\quad - \Sigma\Sigma\, \Pi(i,i',s) \sin\{(i-i'\mu)\varepsilon - i'(c'-c\mu)\} \end{cases}$$

welche Function zufolge des §. 5 (I) bei der Berechnung der Störungen der zweiten Ordnung in Bezug auf die Massen gebraucht wird.

## 43.

Zur Berechnung der Breitenstörungen erster Ordnung in Bezug auf die störenden Kräfte dient die Gleichung (61) (I), nemlich

$$\frac{dR}{\cos i d\varepsilon} = Qa^2\left(\frac{d\Omega}{dZ}\right)$$

wo

$$\begin{aligned} Q = & \; e\sin\varepsilon - \tfrac{1}{4}e^2\sin 2\varepsilon \\ & + \tfrac{1}{4}e^2\sin(\eta+\varepsilon) - \tfrac{3}{2}e\sin\eta + (1+\tfrac{1}{4}e^2)\sin(\eta-\varepsilon) - \tfrac{1}{2}e\sin(\eta-2\varepsilon) \end{aligned}$$

ist. Führt man auch hier die imaginären Exponentialfunctionen durch die oben dafür angeführten Formeln ein, so wird

$$\frac{dR}{\cos i} = \frac{dy}{y}\Big\{M_1 y + M_2 y^2 - M_1\frac{1}{y} - M_2\frac{1}{y^2} + \frac{1}{v}\Big[N_{-1}\frac{1}{y} + N_0 + N_1 y + N_2 y^2\Big] - v\Big[N_{-1}y + N_0 + N_1\frac{1}{y} + N_2\frac{1}{y^2}\Big]\Big\} a^2\left(\frac{d\Omega}{dZ}\right)$$

wo

$$M_1 = -\frac{e}{2}, \quad M_2 = \frac{e^2}{4}$$
$$N_{-1} = \frac{e^2}{4};\quad N_0 = -\frac{3e}{4};\quad N_1 = \frac{2+e^2}{4};\quad N_2 = -\frac{e}{4} \quad \ldots \quad (26)$$

Durch die vorhergehende Entwickelung sei nun erhalten

$$a^2\left(\frac{d\Omega}{dZ}\right) = \Sigma\Sigma\, d(i,i',s) \sin\{(i-i'\mu)\,\varepsilon - i'\,(c'-c\mu)\} + \Sigma\Sigma\, d(i,i',c) \cos\{(i-i'\mu)\,\varepsilon - i'\,(c'-c\mu)\}$$

wo dieselben Bemerkungen anzuwenden sind, die im Art. 38 den Entwickelungscoefficienten von $ar\left(\frac{d\Omega}{dr}\right)$ hinzugefügt wurden. Durch die imaginären Exponentialfunctionen ausgedrückt wird nun

$$2a^2\left(\frac{d\Omega}{dZ}\right) = \Sigma\Sigma\left\{-d(i,i',s)\sqrt{-1} + d(i,i',c)\right\}\pi^{i'} y^{i-i'\mu}$$

wo

$$d(-i,-i',s) = -\,d(i,i',s)$$
$$d(-i,-i',c) = \phantom{-}\,d(i,i',c)$$

ist, und hiemit geht der vorstehende Ausdruck für $dR$ über in

$$2\frac{dR}{\cos i} = -\sqrt{-1}\,.\,\frac{dy}{y}\,\Sigma\Sigma\left\{T(i,i',s) + \frac{1}{v}\,U(i,i',s) + v\,V(i,i',s)\right\}\pi^{i'} y^{i-i'\mu} \quad (27)$$
$$+ \frac{dy}{y}\,\Sigma\Sigma\left\{T(i,i',c) + \frac{1}{v}\,U(i,i',c) + v\,V(i,i',c)\right\}\pi^{i'} y^{i-i'\mu}$$

wo

$$\left.\begin{aligned} T(i,i',s) &= M_1\, d(i-1,i',s) + M_2 d(i-2,i',s) - M_1 d(i+1,i',s) - M_2 d(i+2,i',s)\\ U(i,i',s) &= N_{-1}d(i+1,i',s) + N_0\, d(i,i',s) + N_1 d(i-1,i',s) + N_2 d(i-2,i',s)\\ V(i,i',s) &= -N_{-1}d(i-1,i',s) - N_0\, d(i,i',s) - N_1 d(i+1,i',s) - N_2 d(i+2,i',s)\end{aligned}\right\}(28)$$

ist, und dieselben Gleichungen für $T(i,i',c)$, $U(i,i',c)$ und $V(i,i',c)$ gelten, wenn man allenthalben darin $c$ statt $s$ schreibt. Die vorstehenden Ausdrücke geben leicht zu erkennen, dass

$$\left.\begin{aligned} T(-i,-i',s) &= \phantom{-}\,T(i,i',s)\\ U(-i,-i',s) &= \phantom{-}\,V(i,i',s)\\ T(-i,-i',c) &= -\,T(i,i',c)\\ U(-i,-i',c) &= -\,V(i,i',c)\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (29)$$

und ausserdem die Gleichungen

$$T(0,0,c) = 0$$

(30) . . . $-\tfrac{1}{2}T(0,0,s) = U(1,0,s) = eV(0,0,s)$

statt finden. Durch Hülfe der oben angegebenen Ausdrücke der $M$ und $N$ Coefficienten folgt ferner, dass

(31) . . . $\begin{cases} T(i,i',s) = -U(i+1,i',s) - V(i-1,i',s) \\ T(i,i',c) = -U(i+1,i',c) - V(i-1,i',c) \end{cases}$

ist, welche Gleichungen auch aus andern Gründen hergeleitet werden können. Es geht hieraus hervor, dass man die $T$ Coefficienten nicht direct zu berechnen braucht, sondern sie am Einfachsten durch Anwendung der vorstehenden Ausdrücke erhält, nachdem man die $U$ und $V$ Coefficienten durch die (28) berechnet hat. Die Controle für diese Berechnung der letzteren erhält man wieder durch Einführung der Summen der $d$ Coefficienten, und überhaupt gelten für die Berechnung der $U$ und $V$ Coefficienten dieselben Bemerkungen, die in den Art. 39 und 40 in Bezug auf die $G$ und $H$ Coefficienten gemacht worden sind, weshalb ich darauf verweise.

44.

Integrirt man nun den eben entwickelten Ausdruck für $dR$, und setzt

(32) . . . $Y(i,i',s) = \frac{T(i,i',s)}{i-i'\mu} + \frac{U(i+1,i',s)}{i+1-i'\mu} + \frac{V(i-1,i',s)}{i-1-i'\mu}$

so wie die analoge Gleichung für $Y(i,i',c)$, so wird mit Vorbehalt der hinzuzufügenden, willkührlichen Constante

$$2\frac{u}{\cos i} = \Sigma\Sigma\left\{-Y(i,i',s)\sqrt{-1} + Y(i,i',c)\right\}\pi^{i'}y^{i-i'\mu}$$

oder nach dem Uebergang zum Reellen

(33) . . $\begin{cases} \frac{u}{\cos i} = \Sigma\Sigma\, Y(i,i',s)\sin\{(i-i'\mu)\,\varepsilon - i'\,(c'-c\mu)\} \\ \qquad + \Sigma\Sigma\, Y(i,i',c)\cos\{(i-i'\mu)\,\varepsilon - i'\,(c'-c\mu)\} \end{cases}$

wo wieder die Summation in Bezug auf $i'$ nur von 0 bis $\infty$ ausgedehnt werden darf. Ausserdem giebt die Anwendung des im Art. 22 (I) bewiesenen Satzes einen zweiten Ausdruck für $u$. Dieser Satz giebt im vorliegenden Falle die Gleichung

$$u = \int\left(\frac{dR}{dv}\right)dy$$

und da aus (27)

$$\frac{2R}{\cos i} = -\sqrt{-1}\,\Sigma\Sigma\left\{\frac{T(i,i',s)}{i-i'\mu} + \frac{1}{v}\,\frac{U(i,i',s)}{i-i'\mu} + v\,\frac{V(i,i',s)}{i-i'\mu}\right\}\pi^{i'}y^{i-i'\mu}$$
$$+ \Sigma\Sigma\left\{\frac{T(i,i',c)}{i-i'\mu} + \frac{1}{v}\,\frac{U(i,i',c)}{i-i'\mu} + v\,\frac{V(i,i',c)}{i-i'\mu}\right\}\pi^{i'}y^{i-i'\mu}$$

folgt, so wird auch

$$\frac{2u}{\cos i} = -\sqrt{-1}\int\frac{dy}{y}\,\Sigma\Sigma\left\{-\frac{U(i+1,i',s)}{i+1-i'\mu} + \frac{V(i-1,i',s)}{i-1-i'\mu}\right\}\pi^{i'}y^{i-i'\mu}$$
$$+\int\frac{dy}{y}\,\Sigma\Sigma\left\{-\frac{U(i+1,i',c)}{i+1-i'\mu} + \frac{V(i-1,i',c)}{i-1-i'\mu}\right\}\pi^{i'}y^{i-i'\mu}$$

Führt man diese Integration aus und setzt

$$W(i,i',s) = -\frac{U(i+1,i',s)}{i+1-i'\mu} + \frac{V(i-1,i',s)}{i-1-i'\mu} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (34)$$

sowie eine ähnliche Gleichung für $W(i,i',c)$, so erhält man

$$\left.\begin{aligned} Y(i,i',s) &= \frac{W(i,i',s)}{i-i'\mu} \\ Y(i,i',c) &= \frac{W(i,i',c)}{i-i'\mu} \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (35)$$

Man kann diese Ausdrücke ausschliesslich anwenden, um die $Y$Coefficienten zu berechnen, man kann sie aber auch anwenden, um die nach (32) geführte Rechnung zu controliren.

## 45.

Nachdem diese Integrationen ausgeführt worden sind, kann leicht bewiesen werden, dass der Ausdruck (6), welcher im Art. 24 zur Berechnung der vom Mars in der Länge der Egeria bewirkten Ungleichheit langer Periode angewandt wurde, in der That alle Glieder enthält, die mit dem Quadrat des kleinen Divisors behaftet sind, wie dort behauptet wurde.

Substituirt man die im Art. 39 gegebenen Ausdrücke der $F$, $G$ und $H$Coefficienten in den Ausdruck (20) der $P$Coefficienten, und diesen wieder in den Ausdruck (21) der $R$Coefficienten, so bekommt man leicht, und indem man zur Abkürzung $p$ statt $i-i'\mu$ schreibt, und die Indices $c$ und $s$ weglässt, weil die Ausdrücke unverändert für beide gelten.

$$R(i,i') = \frac{b(i,i')}{p}\left\{\frac{B_0}{p}+\frac{A_1}{p+1}+\frac{A_1}{p-1}-\frac{e}{2}\left[\frac{B_1}{p+1}+\frac{A_2}{p+2}+\frac{2A_0}{p}+\frac{B_1}{p-1}+\frac{A_2}{p-2}\right]\right\}$$
$$+\frac{b(i+1,i')}{p}\left\{\frac{B_1}{p}+\frac{A_0}{p+1}+\frac{A_2}{p-1}-\frac{e}{2}\left[\frac{B_0}{p+1}+\frac{A_1}{p+2}+\frac{A_1+A_{-1}}{p}+\frac{B_2}{p-1}\right]\right\}$$
$$+\frac{b(i+2,i')}{p}\left\{\frac{B_2}{p}+\frac{A_{-1}}{p+1}-\frac{e}{2}\left[\frac{B_1}{p+1}+\frac{A_0}{p+2}+\frac{A_2}{p}\right]\right\}-\frac{b(i+3,i')}{p}\frac{e}{2}\left[\frac{B_2}{p+1}+\frac{A_{-1}}{p+2}\right]$$
$$+\frac{b(i-1,i')}{p}\left\{\frac{B_1}{p}+\frac{A_2}{p+1}+\frac{A_0}{p-1}-\frac{e}{2}\left[\frac{B_0}{p-1}+\frac{A_1}{p-2}+\frac{A_1+A_{-1}}{p}+\frac{B_2}{p+1}\right]\right\}$$
$$+\frac{b(i-2,i')}{p}\left\{\frac{B_2}{p}+\frac{A_{-1}}{p-1}-\frac{e}{2}\left[\frac{B_1}{p-1}+\frac{A_0}{p-2}+\frac{A_2}{p}\right]\right\}-\frac{b(i-3,i')}{p}\frac{e}{2}\left[\frac{B_2}{p-1}+\frac{A_{-1}}{p-2}\right]$$
$$+\frac{c(i,i')}{p}\left\{\frac{C_1}{p+1}-\frac{C_1}{p-1}-\frac{e}{2}\left[\frac{D_1}{p+1}+\frac{C_2}{p+2}-\frac{D_1}{p-1}-\frac{C_2}{p-2}\right]\right\}$$
$$+\frac{c(i+1,i')}{p}\left\{-\frac{D_1}{p}+\frac{C_0}{p+1}-\frac{C_2}{p-1}-\frac{e}{2}\left[\frac{C_1}{p+2}+\frac{C_{-1}-C_1}{p}-\frac{D_2}{p-1}\right]\right\}$$
$$+\frac{c(i+2,i')}{p}\left\{-\frac{D_2}{p}+\frac{C_{-1}}{p+1}-\frac{e}{2}\left[\frac{C_0}{p+2}-\frac{D_1}{p+1}-\frac{C_2}{p}\right]\right\}+\frac{c(i+3,i')}{p}\frac{e}{2}\left[\frac{D_2}{p+1}-\frac{C_{-1}}{p+2}\right]$$
$$+\frac{c(i-1,i')}{p}\left\{\frac{D_1}{p}+\frac{C_2}{p+1}-\frac{C_0}{p-1}-\frac{e}{2}\left[\frac{D_2}{p+1}+\frac{C_1-C_{-1}}{p}-\frac{C_1}{p-2}\right]\right\}$$
$$+\frac{c(i-2,i')}{p}\left\{\frac{D_2}{p}-\frac{C_{-1}}{p-1}-\frac{e}{2}\left[\frac{D_1}{p-1}+\frac{C_2}{p}-\frac{C_0}{p-2}\right]\right\}-\frac{c(i-3,i')}{p}\frac{e}{2}\left[\frac{D_2}{p-1}-\frac{C_{-1}}{p-2}\right]$$

Substituirt man die Ausdrücke der $A$, $B$, $C$ und $D$ Coefficienten in diesen Ausdruck, und löst die zusammengesetzten Brüche in ihre Partialbrüche auf, so ergiebt sich

$$R(i,i') = \frac{b(i,i')}{\cos^2\varphi}\left\{-\frac{3}{p^2}\cos^2\varphi-\frac{2-e^2}{p+1}+\frac{2-e^2}{p-1}-\frac{e}{8(p+2)}+\frac{e}{8(p-2)}\right\}$$
$$+\frac{b(i+1,i')}{\cos^2\varphi}\left\{-\frac{3e}{4p}+\frac{3e^2}{4(p+1)}-\frac{4e-e^2}{8(p-1)}+\frac{4e-e^2}{8(p+2)}\right\}$$
$$+\frac{b(i+2,i')}{\cos^2\varphi}\left\{\frac{3e^2}{8p}-\frac{3e^2}{8(p+2)}\right\}+\frac{b(i+3,i')}{\cos^2\varphi}\left\{-\frac{e^2}{8(p+1)}+\frac{e^2}{8(p+2)}\right\}$$
$$+\frac{b(i-1,i')}{\cos^2\varphi}\left\{\frac{3e^2}{4p}-\frac{3e^2}{4(p-1)}+\frac{4e-e^2}{8(p+1)}-\frac{4e-e^2}{8(p-2)}\right\}$$
$$+\frac{b(i-2,i')}{\cos^2\varphi}\left\{-\frac{3e^2}{8p}+\frac{3e^2}{8(p-2)}\right\}+\frac{b(i-3,i')}{\cos^2\varphi}\left\{\frac{e^2}{8(p-1)}-\frac{e^2}{8(p-2)}\right\}$$
$$+\frac{c(i,i')}{\cos^2\varphi}\left\{-\frac{8-5e^2}{4p}+\frac{4-3e^2}{4(p+1)}+\frac{4-8e^2}{4(p-1)}+\frac{e^2}{8(p+2)}+\frac{e^2}{8(p-2)}\right\}$$
$$+\frac{c(i+1,i')}{\cos^2\varphi}\left\{\frac{e-e^2}{4p}+\frac{e}{2(p+1)}-\frac{4e-e^2}{8(p-1)}-\frac{2e-e^2}{8(p+2)}\right\}$$
$$+\frac{c(i+2,i')}{\cos^2\varphi}\left\{\frac{3e^2}{8p}-\frac{e^2}{4(p+1)}-\frac{e^2}{8(p+2)}\right\}+\frac{c(i+3,i')}{\cos^2\varphi}\left\{-\frac{e^2}{8(p+1)}+\frac{e^2}{8(p+2)}\right\}$$
$$+\frac{c(i-1,i')}{\cos^2\varphi}\left\{\frac{e-e^2}{4p}+\frac{e}{2(p-1)}-\frac{4e-e^2}{8(p+1)}-\frac{2e-e^2}{8(p-2)}\right\}$$
$$+\frac{c(i-2,i')}{\cos^2\varphi}\left\{\frac{3e^2}{8p}-\frac{e^2}{4(p-1)}-\frac{e^2}{8(p-2)}\right\}+\frac{c(i-3,i')}{\cos^2\varphi}\left\{-\frac{e^2}{8(p-1)}+\frac{e^2}{8(p-2)}\right\}$$

Zieht man hier die Glieder aus, die den Divisor im Quadrat enthalten, so wird

$$R(i,i') = -\frac{3b(i,i')}{p^2}$$

und es ist leicht ohne weitere Entwickelungen zu erkennen, dass die

Ausdrücke für $S(i,i')$ und $Y(i,i')$ gar keine Glieder enthalten, in welchen das Quadrat eines Divisors vorkäme. Substituirt man den vorstehenden Werth von $R(i,i')$ in den ersten Ausdruck (22), specialisirt in Bezug auf das im §. 2 betrachtete Argument, und erwägt, dass dort die Bezeichnungen $(i)[11,5,c]$ und $(i)[11,5,s]$ dasselbe bedeuten, was hier $6(11,5,c)$ und $6(11,5,s)$, so kommt man auf die dort angewandte Formel (6). W. z. b. w.

## §. 5. Integration der Differentialgleichungen für den Fall $i'=0$.

### Bestimmung der willkührlichen Constanten in zwei verschiedenen Fällen.

### 46.

Die im vor. §. ausgeführten Entwickelungen der Differentialgleichungen sind zwar in allen Fällen gültig, die Integrationen aber nicht, indem sie für einige der zu $i'=0$ gehörigen Glieder eine Ausnahme erleiden. In den Ausdrücken (20), (21), (23), (32) und (35), durch welche die Integrationen ausgeführt werden, kommen die Divisoren $i-i'\mu$, $i+1-i'\mu$ und $i-1-i'\mu$ vor, wenn also nicht nur $i'=0$, sondern auch $i$ entweder $=0$, oder $=\pm 1$ ist, so werden einige von diesen Divisoren Null, wodurch angezeigt wird, dass die Integration in diesen Fällen anders ausgeführt werden muss. Diese Ausnahmefälle sollen jetzt betrachtet werden, aber anstatt die Entwickelungen blos auf diese Glieder zu beschränken, werde ich sie des Zusammenhangs wegen auf alle zu $i'=0$ gehörigen Glieder ausdehnen.

Setzen wir $i'=0$ in (14), schreiben die ersten Glieder vollständig aus, und lassen der Kürze wegen hier und im Folgenden den zweiten Index, welcher die Null ist, weg, so wird

$$
\begin{aligned}
i\,dW=\frac{dy}{y}\Big\{&-F(0,s)\sqrt{-1}+\left[G(0,c)-G(0,s)\sqrt{-1}\right]\frac{1}{v}+\left[H(0,c)-H(0,s)\sqrt{-1}\right]v\\
&+\left[F(1,c)-F(1,s)\sqrt{-1}\right]y+\left[G(1,c)-G(1,s)\sqrt{-1}\right]\frac{y}{v}+\left[H(1,c)-H(1,s)\sqrt{-1}\right]vy\\
&+\left[F(-1,c)-F(-1,s)\sqrt{-1}\right]\frac{1}{y}+\left[G(-1,c)-G(-1,s)\sqrt{-1}\right]\frac{1}{vy}+\left[H(-1,c)-H(-1,s)\sqrt{-1}\right]\frac{v}{y}\\
&+\left[F(2,c)-F(2,s)\sqrt{-1}\right]y^2+\left[G(2,c)-G(2,s)\sqrt{-1}\right]\frac{y^2}{v}+\left[H(2,c)-H(2,s)\sqrt{-1}\right]vy^2\\
&+\left[F(-2,c)-F(-2,s)\sqrt{-1}\right]\frac{1}{y^2}+\left[G(-2,c)-G(-2,s)\sqrt{-1}\right]\frac{1}{vy^2}+\left[H(-2,c)-H(-2,s)\sqrt{-1}\right]\frac{v}{y^2}\\
&+\text{etc.}\Big\}
\end{aligned}
$$

Geht man hievon zum Reellen über, so wird in Folge der Gleichungen

(16) und (19)

$$
\begin{aligned}
\frac{dW}{d\varepsilon} = \quad & \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \tfrac{e}{2} H(0,s) \\
& -G(1,c)\sin(-\eta+\varepsilon) \;\; + G(1,s)\cos(-\eta+\varepsilon) \\
& -F(1,c)\sin\varepsilon \qquad\qquad\;\; + F(1,s)\cos\varepsilon \\
& -G(2,c)\sin(-\eta+2\varepsilon) + G(2,s)\cos(-\eta+2\varepsilon) \\
& -H(0,c)\sin\eta \qquad\qquad\;\; + H(0,s)\cos\eta \\
& -F(2,c)\sin 2\varepsilon \qquad\qquad + F(2,s)\cos 2\varepsilon \\
& -G(3,c)\sin(-\eta+3\varepsilon) + G(3,s)\cos(-\eta+3\varepsilon) \\
& -H(1,c)\sin(\eta+\varepsilon) \quad\;\; + H(1,s)\cos(\eta+\varepsilon) \\
& - \text{etc.} \qquad\qquad\qquad\quad + \text{etc.}
\end{aligned}
$$

## 17.

Um die Form der willkührlichen Constante anzugeben, die dem Integral des eben entwickelten Differentials hinzugefügt werden muss, ist der zu Anfang des Art. 38 angeführte endliche Ausdruck von $dW$ zu betrachten. Man sieht leicht, dass die darin befindlichen Functionen der Zeit auf drei verschiedene Arten vorkommen; die eine enthält kein $\eta$, eine andere ist mit $\cos\eta$ multiplicirt, und noch eine andere mit $\sin\eta$. Hieraus, welches man auch aus dem vorstehenden Differential erkennen kann, folgt, dass man dieser Constante die folgende Form geben muss,

$$k + k_1 \cos\eta + k_2 \sin\eta$$

wo $k$, $k_1$ und $k_2$ drei willkührliche Constanten sind. Integrirt man daher den vorstehenden Ausdruck für $dW$, nachdem er mit $d\varepsilon$ multiplicirt worden ist, so erhält man

$$
\begin{aligned}
W = \quad & k \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad + \tfrac{e}{2} H(0,s)\,\varepsilon \\
& + G(1,c)\cos(-\eta+\varepsilon) \;\; + G(1,s)\sin(-\eta+\varepsilon) \\
& + k_1 \cos\eta \qquad\qquad\qquad + k_2 \sin\eta \\
& + F(1,c)\cos\varepsilon \qquad\qquad + F(1,s)\sin\varepsilon \\
& + \tfrac{1}{2} G(2,c)\cos(-\eta+2\varepsilon) + \tfrac{1}{2} G(2,s)\sin(-\eta+2\varepsilon) \\
& + H(0,s)\,\varepsilon\cos\eta \qquad\quad - H(0,c)\,\varepsilon\sin\eta \\
& + \tfrac{1}{2} F(2,c)\cos 2\varepsilon \qquad\; + \tfrac{1}{2} F(2,s)\sin 2\varepsilon \\
& + \tfrac{1}{3} G(3,c)\cos(-\eta+3\varepsilon) + \tfrac{1}{3} G(3,s)\sin(-\eta+3\varepsilon) \\
& + H(1,c)\cos(\eta+\varepsilon) \quad\;\; + H(1,s)\sin(\eta+\varepsilon) \\
& + \text{etc.} \qquad\qquad\qquad\quad + \text{etc.}
\end{aligned}
$$

und hieraus durch die Differentiation nach $\eta$

$$
\begin{array}{rll}
\left(\frac{dW}{d\eta}\right) = & G(1,c)\sin(-\eta+\varepsilon) & -\ G(1,s)\cos(-\eta+\varepsilon) \\
& -\ k_1 \sin\eta & +\ k_2 \cos\eta \\
& +\tfrac{1}{2}G(2,c)\sin(-\eta+2\varepsilon) & -\tfrac{1}{2}G(2,s)\cos(-\eta+2\varepsilon) \\
& -\ H(0,s)\,\varepsilon\sin\eta & -\ H(0,c)\,\varepsilon\cos\eta \\
& +\tfrac{1}{3}G(3,c)\sin(-\eta+3\varepsilon) & -\tfrac{1}{3}G(3,s)\cos(-\eta+3\varepsilon) \\
& -\ H(1,c)\sin(\eta+\varepsilon) & +\ H(1,s)\cos(\eta+\varepsilon) \\
& +\ \text{etc.} & +\ \text{etc.}
\end{array}
$$

Verwandelt man in diesen beiden Ausdrücken $\eta$ in $\varepsilon$, so bekommt man,

$$
\begin{array}{rll}
\frac{dz}{dt} = & 1 + k + P(0,c) & +\ \frac{e}{2}H(0,s)\,\varepsilon \\
& +\ [P(1,c) + k_1]\cos\varepsilon & +\ [P(1,s) + k_2]\sin\varepsilon \\
& +\ H(0,s)\,\varepsilon\cos\varepsilon & -\ H(0,c)\,\varepsilon\sin\varepsilon \\
& +\ P(2,c)\cos 2\varepsilon & +\ P(2,s)\sin 2\varepsilon \\
& +\ P(3,c)\cos 3\varepsilon & +\ P(3,s)\sin 3\varepsilon \\
& +\ \text{etc.} & +\ \text{etc.}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rll}
2\frac{d\nu}{d\varepsilon} = & -\ e H(0,s) & \\
& -\ [Q(1,c) - k_1]\sin\varepsilon & +\ [Q(1,s) - k_2]\cos\varepsilon \\
& +\ H(0,s)\,\varepsilon\sin\varepsilon & +\ H(0,c)\,\varepsilon\cos\varepsilon \\
& -\ Q(2,c)\sin 2\varepsilon & +\ Q(2,s)\cos 2\varepsilon \\
& -\ Q(3,c)\sin 3\varepsilon & +\ Q(3,s)\cos 3\varepsilon \\
& -\ \text{etc.} & +\ \text{etc.}
\end{array}
$$

wo den Ausdrücken (20) analog

$$
\begin{aligned}
P(0,c) &= G(1,c) \\
P(1,c) &= F(1,c) + \tfrac{1}{2}G(2,c) \\
P(2,c) &= \tfrac{1}{2}F(2,c) + \tfrac{1}{3}G(3,c) + H(1,c) \\
P(3,c) &= \tfrac{1}{3}F(3,c) + \tfrac{1}{4}G(4,c) + \tfrac{1}{2}H(2,c) \\
&\text{etc.} \qquad\qquad \text{etc.}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
P(1,s) &= F(1,s) + \tfrac{1}{2}G(2,s) \\
P(2,s) &= \tfrac{1}{2}F(2,s) + \tfrac{1}{3}G(3,s) + H(1,s) \\
P(3,s) &= \tfrac{1}{3}F(3,s) + \tfrac{1}{4}G(4,s) + \tfrac{1}{2}H(2,s) \\
&\text{etc.} \qquad\qquad \text{etc.}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
Q(1,c) &= \tfrac{1}{2}G(2,c) \\
Q(2,c) &= \tfrac{1}{3}G(3,c) - H(1,c) \\
Q(3,c) &= \tfrac{1}{4}G(4,c) - \tfrac{1}{2}H(2,c) \\
&\text{etc.} \qquad\qquad \text{etc.}
\end{aligned}
$$

$$Q(1,s) = \tfrac{1}{2} G(2,s)$$
$$Q(2,s) = \tfrac{1}{3} G(3,s) - H(1,s)$$
$$Q(3,s) = \tfrac{1}{4} G(4,s) - \tfrac{1}{2} H(2,s)$$
$$\text{etc.} \qquad \text{etc.}$$

Multipliciren wir den ersten dieser Ausdrücke mit

$$ndt = (1 - e\cos\varepsilon)\, d\varepsilon$$

den zweiten mit $d\varepsilon$ und integriren, so wird

$$\begin{aligned}
nz = c &+ \left\{1 + R(0,c) + k - \tfrac{e}{2} k_1\right\} \varepsilon \\
&+ \left\{R(1,c) - H(0,c) + k_1 - e(1+k)\right\} \sin\varepsilon - \left\{R(1,s) - \left(1 - \tfrac{e^2}{2}\right) H(0,s) + k_2\right\} \cos\varepsilon \\
&+ \left(1 - \tfrac{e^2}{2}\right) H(0,s)\, \varepsilon \sin\varepsilon \qquad\qquad + H(0,c)\, \varepsilon\cos\varepsilon \\
&+ \left\{R(2,c) + \tfrac{e}{8} H(0,c) - \tfrac{e}{4} k_1\right\} \sin 2\varepsilon - \left\{R(2,s) + \tfrac{e}{8} H(0,s) - \tfrac{e}{4} k_2\right\} \cos 2\varepsilon \\
&- \tfrac{e}{4} H(0,s)\, \varepsilon \sin 2\varepsilon \qquad\qquad - \tfrac{e}{4} H(0,c)\, \varepsilon \cos 2\varepsilon \\
&+ R(3,c) \sin 3\varepsilon \qquad\qquad - R(3,s) \cos 3\varepsilon \\
&+ \text{etc.} \qquad\qquad - \text{etc.} \\
&\pm \Sigma R\left(i, i', {}^{c}_{s}\right) {}^{\sin}_{\cos} \left\{(ci - i'\mu)\, \varepsilon - i'(c' - c\mu)\right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2\nu = 2C &- eH(0,s)\, \varepsilon \\
&+ \{Q(1,c) + H(0,c) - k_1\} \cos\varepsilon + \{Q(1,s) + H(0,s) - k_2\} \sin\varepsilon \\
&- H(0,s)\, \varepsilon\cos\varepsilon \qquad\qquad - H(0,c)\, \varepsilon \sin\varepsilon \\
&+ \tfrac{1}{2} Q(2,c) \cos 2\varepsilon \qquad\qquad + \tfrac{1}{2} Q(2,s) \sin 2\varepsilon \\
&+ \tfrac{1}{3} Q(3,c) \cos 3\varepsilon \qquad\qquad + \tfrac{1}{3} Q(3,s) \sin 3\varepsilon \\
&+ \text{etc.} \qquad\qquad + \text{etc.} \\
&+ \Sigma S\left(i, i', {}^{c}_{s}\right) {}^{\cos}_{\sin} \left\{(ci - i'\mu)\, \varepsilon - i'(c' - c\mu)\right\}
\end{aligned}$$

wo dem ersten Ausdruck (21) analog

$$R(0,c) = P(0,c) - \tfrac{e}{2} P(1,c)$$
$$R(1,c) = P(1,c) - e\, P(0,c) - \tfrac{e}{2} P(2,c)$$
$$R(2,c) = \tfrac{1}{2}\left\{P(2,c) - \tfrac{e}{2} P(1,c) - \tfrac{e}{2} P(3,c)\right\}$$
$$R(3,c) = \tfrac{1}{3}\left\{P(3,c) - \tfrac{e}{2} P(2,c) - \tfrac{e}{2} P(4,c)\right\}$$
$$\text{etc.} \qquad \text{etc.}$$
$$R(1,s) = P(1,s) - \tfrac{e}{2} P(2,s)$$
$$R(2,s) = \tfrac{1}{2}\left\{P(2,s) - \tfrac{e}{2} P(1,s) - \tfrac{e}{2} P(3,s)\right\}$$
$$R(3,s) = \tfrac{1}{3}\left\{P(3,s) - \tfrac{e}{2} P(2,s) - \tfrac{e}{2} P(4,s)\right\}$$
$$\text{etc.} \qquad \text{etc.}$$

Diese sind die vollständigen Ausdrücke von $nz$ und $\nu$; $c$ und $C$ sind die den Integralen hinzugefügten willkührlichen Constanten, von welchen $c$ die mittlere Anomalie für $t = 0$ bedeutet, und $C$ eine von den Constanten $k$ und $k_1$ abhängige Constante ist, die weiter unten bestimmt werden wird.

48.

Vermittelst der Gleichung

$$nt + c = \varepsilon - e\sin\varepsilon$$

kann der in den eben entwickelten Ausdrücken ausserhalb der Sinus- und Cosinuszeichen vorkommende Bogen $\varepsilon$ eliminirt und durch $nt$ ersetzt werden, und man darf bei dieser Elimination in derselben $c$ übergehen, da die daraus entstehenden Glieder sich mit den willkührlichen Constanten vereinigen. Eliminirt man daher den Bogen $\varepsilon$, wo er ausserhalb der Sinus- und Cosinuszeichen vorkommt, durch die Gleichung

$$\varepsilon = nt + e\sin\varepsilon$$

und lässt auch die hiebei entstehenden, sich mit den willkührlichen Constanten vereinigenden Glieder weg, oder schreibt mit andern Worten

$$c \text{ für } c + \tfrac{e}{2}\left(1 - \tfrac{e^2}{2}\right) H(0,s)$$

$$\text{und } C \text{ für } C + \tfrac{e}{4} H(0,c)$$

*) so erhält man

$$\begin{aligned}
nz = c &+ \left\{1 + R(0,c) + k - \tfrac{e}{2}k_1\right\} nt \\
&+ \left\{R(1,c) + eR(0,c) - \left(1 - \tfrac{e^2}{8}\right)H(0,c) + \left(1 - \tfrac{e^2}{2}\right)k_1\right\} \sin\varepsilon \\
&\qquad\qquad - \left\{R(1,s) - \left(1 - \tfrac{5e^2}{8}\right)H(0,s) + k_2\right\} \cos\varepsilon \\
&+ \left(1 - \tfrac{e^2}{2}\right)H(0,s)\, nt \sin\varepsilon \qquad + H(0,c)\, nt\cos\varepsilon \\
&+ \left\{R(2,c) + \tfrac{5e}{8}H(0,c) - \tfrac{e}{4}k_1\right\}\sin 2\varepsilon - \left\{R(2,s) + \tfrac{e}{8}(5 - 2e^2)H(0,s) - \tfrac{e}{4}k_2\right\}\cos 2\varepsilon \\
&- \tfrac{e}{4}H(0,s)\, nt\sin 2\varepsilon \qquad - \tfrac{e}{4}H(0.c)\, nt\cos 2\varepsilon \\
&+ \left\{R(3,c) - \tfrac{e^2}{8}H(0,c)\right\}\sin 3\varepsilon \qquad - \left\{R(3,s) - \tfrac{e^2}{8}H(0,s)\right\}\cos 3\varepsilon \\
&+ R(4,c)\sin 4\varepsilon \qquad - R(4,s)\cos 4\varepsilon \\
&+ \text{etc.} \qquad - \text{etc.} \\
&\pm \Sigma R\left(i, i'', {}^{c}_{s}\right) {}^{\sin}_{\cos}\left\{(i - i''\mu)\varepsilon - i''(c' - c\mu)\right\}
\end{aligned}$$

---

*) Um etwaigen Misdeutungen vorzubeugen bemerke ich, dass durch diese Weglassungen die geometrische Strenge nicht im Mindesten verletzt wird.

$$
\begin{aligned}
2\nu = 2C - eH(0,s)\,nt \\
&+\{Q(1,c)+H(0,c)-k_1\}\cos\varepsilon + \{Q(1,s)+(1-e^2)H(0,s)-k_2\}\sin\varepsilon \\
&-H(0,s)\,nt\cos\varepsilon \qquad + H(0,c)\,nt\sin\varepsilon \\
&+\tfrac{1}{2}\{Q(2,c)-eH(0,c)\}\cos 2\varepsilon + \tfrac{1}{2}\{Q(2,s)-eH(0,s)\}\sin 2\varepsilon \\
&+\tfrac{1}{3}Q(3,c)\cos 3\varepsilon \qquad + \tfrac{1}{3}Q(3,s)\sin 3\varepsilon \\
&+\text{etc.} \qquad + \text{etc.} \\
&+\Sigma S\left(i,i',{}^{c}_{s}\right){}^{\cos}_{\sin}\left\{(i-i'\mu)\,\varepsilon - i'(c'-c\mu)\right\}
\end{aligned}
$$

Weiter unten werden die analogen Ausdrücke der folgenden Grössen gebraucht, die ich daher hier sogleich anführe.

$$
\begin{aligned}
\frac{dz}{dt} = 1 + k + P(0,c) - \frac{e}{2}H(0,c) + \frac{e}{2}H(0,s)\,nt \\
&+\left\{P(1,c)+k_1\right\}\cos\varepsilon + \left\{P(1,s)+\frac{e^2}{2}H(0,s)+k_2\right\}\sin\varepsilon \\
&+H(0,s)\,nt\cos\varepsilon \qquad - H(0,c)\,nt\sin\varepsilon \\
&+\left\{P(2,c)+\frac{e}{2}H(0,c)\right\}\cos 2\varepsilon + \left\{P(2,s)+\frac{e}{2}H(0,s)\right\}\sin 2\varepsilon \\
&+P(3,c)\cos 3\varepsilon \qquad + P(3,s)\sin 3\varepsilon \\
&+\text{etc.} \qquad + \text{etc.} \\
&+\Sigma P\left(i,i',{}^{c}_{s}\right){}^{\cos}_{\sin}\left\{(i-i'\mu)\,\varepsilon - i'(c'-c\mu)\right\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
2\frac{d\nu}{d\varepsilon} = -\left(\frac{\overline{dW}}{d\eta}\right) = -\frac{e}{2}H(0,s) \\
&-\{Q(1,c)-k_1\}\sin\varepsilon \qquad + \{Q(1,s)-k_2\}\cos\varepsilon \\
&+H(0,s)\,nt\sin\varepsilon \qquad + H(0,c)\,nt\cos\varepsilon \\
&-\left\{Q(2,c)-\frac{e}{2}H(0,c)\right\}\sin 2\varepsilon + \left\{Q(2,s)-\frac{e}{2}H(0,s)\right\}\cos 2\varepsilon \\
&-Q(3,c)\sin 3\varepsilon \qquad + Q(3,s)\cos 3\varepsilon \\
&-\text{etc.} \qquad + \text{etc.} \\
&\mp\Sigma Q\left(i,i',{}^{c}_{s}\right){}^{\sin}_{\cos}\left\{(i-i'\mu)\,\varepsilon - i'(c'-c\mu)\right\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{\overline{d^2W}}{d\eta^2}\right) = -G(1,c) + \frac{e}{2}H(0,c) \\
&-\{\tfrac{1}{2}G(2,c)+k_1\}\cos\varepsilon \qquad -\{\tfrac{1}{2}G(2,s)+k_2\}\sin\varepsilon \\
&-H(0,s)\,nt\cos\varepsilon \qquad + H(0,c)\,nt\sin\varepsilon \\
&-\left\{\tfrac{1}{3}G(3,c)+H(1,c)+\tfrac{e}{2}H(0,c)\right\}\cos 2\varepsilon - \left\{\tfrac{1}{3}G(3,s)+H(1,s)+\tfrac{e}{2}H(0,s)\right\}\sin 2\varepsilon \\
&-\left\{\tfrac{1}{4}G(4,c)+\tfrac{1}{2}H(2,c)\right\}\cos 3\varepsilon \qquad -\left\{\tfrac{1}{4}G(4,s)+\tfrac{1}{2}H(2,s)\right\}\sin 3\varepsilon \\
&-\text{etc.} \qquad - \text{etc.} \\
&-\Sigma\left\{G'\left(i+1,i',{}^{c}_{s}\right)+\dot{H}'\left(i-1,i',{}^{c}_{s}\right)\right\}{}^{\cos}_{\sin}\left\{(i-i'\mu)\,\varepsilon - i'(c'-c\mu)\right\}
\end{aligned}
$$

wenn wir zur Abkürzung

$$G'\left(i,i',{}^c_s\right)=\frac{G\left(i,i',{}^c_s\right)}{i-i'\mu}$$

$$H'\left(i,i',{}^c_s\right)=\frac{H\left(i,i',{}^c_s\right)}{i-i'\mu}$$

setzen. Mit Ausnahme einiger der zu $i'=0$ gehörigen Glieder bestehen also die Coefficienten von $\left(\overline{\frac{dW}{d\eta}}\right)$ aus der Differenz, und die von $\left(\overline{\frac{d^2W}{d\eta^2}}\right)$ aus der Summe der Coefficienten der in $W$ mit ${}^{\cos}_{\sin}\{-y+\ldots\}$ und mit ${}^{\cos}_{\sin}\{+y+\ldots\}$ multiplicirten Glieder.

Es wird ferner aus dem Vorhergehenden

$$\begin{aligned}\left(\overline{\frac{dW}{d\varepsilon}}\right)=-\frac{dh}{h_0 d\varepsilon}=-\frac{e}{2}H(0,s)&\\ -\Pi'(1,c)\sin\varepsilon+\Pi'(1,s)\cos\varepsilon&\\ -\Pi'(2,c)\sin 2\varepsilon+\Pi'(2,s)\cos 2\varepsilon&\\ -\text{etc.}\qquad +\text{etc.}&\end{aligned}$$

wo

$$\begin{aligned}\Pi'(1,c)&=F(1,c)+G(2,c)+H(0,c)\\ \Pi'(2,c)&=F(2,c)+G(3,c)+H(1,c)\\ &\text{etc.}\qquad\text{etc.}\\ \Pi'(1,s)&=F(1,s)+G(2,s)+H(0,s)\\ &\text{etc.}\qquad\text{etc.}\end{aligned}$$

Integrirt man daher und führt nach der Integration wieder $nt$ statt $\varepsilon$ ein, so bekommt man

$$\begin{aligned}\delta\frac{h}{h_0}=K+\frac{e}{2}H(0,s)\,nt&\\ -\Pi'(1,c)\cos\varepsilon-\left\{\Pi'(1,s)-\frac{e^2}{2}H(0,s)\right\}\sin\varepsilon&\\ -\tfrac{1}{2}\Pi'(2,c)\cos 2\varepsilon-\tfrac{1}{2}\Pi'(2,s)\sin 2\varepsilon&\\ -\tfrac{1}{3}\Pi'(3,c)\cos 3\varepsilon-\tfrac{1}{3}\Pi'(3,s)\sin 3\varepsilon&\\ -\text{etc.}\qquad -\text{etc.}&\\ -\Sigma\Pi\left(i,i',{}^c_s\right){}^{\cos}_{\sin}\left\{(i-i'\mu)\,\varepsilon-i'(c'-c\mu)\right\}&\end{aligned}$$

wo $K$ die dem Integral hinzugefügte willkührliche Constante ist, und die Coefficienten $\Pi\left(i,i',{}^c_s\right)$ aus (23) oder (24) entnommen werden.

## 49.

Setzt man ferner $i'=0$ in (27), und schreibt die ersten Glieder vollständig aus, so bekommt man

$$2\frac{dR}{\cos i}=\frac{dy}{y}\Big\{-T(0,s)\sqrt{-1}+\big[U(0,c)-U(0,s)\sqrt{-1}\big]\frac{1}{v}+\big[V(0,c)-V(0,s)\sqrt{-1}\big]v$$
$$+\big[T(1,c)-T(1,s)\sqrt{-1}\big]y+\big[U(1,c)-U(1,s)\sqrt{-1}\big]\frac{y}{v}+\big[V(1,c)-V(1,s)\sqrt{-1}\big]vy$$
$$+\big[T(-1,c)-T(-1,s)\sqrt{-1}\big]\frac{1}{y}+\big[U(-1,c)-U(-1,s)\sqrt{-1}\big]\frac{1}{vy}+\big[V(-1,c)-V(-1,s)\sqrt{-1}\big]\frac{v}{y}$$
$$+\big[T(2,c)-T(2,s)\sqrt{-1}\big]y^2+\big[U(2,c)-U(2,s)\sqrt{-1}\big]\frac{y^2}{v}+\big[V(2,c)-V(2,s)\sqrt{-1}\big]vy^2$$
$$+\big[T(-2,c)-T(-2,s)\sqrt{-1}\big]\frac{1}{y^2}+\big[U(-2,c)-U(-2,s)\sqrt{-1}\big]\frac{1}{vy^2}+\big[V(-2,c)-V(-2,s)\sqrt{-1}\big]\frac{v}{y^2}$$
$$+\text{ etc.}\Big\}$$

geht man hievon zum Reellen über, so wird in Folge der Gleichungen (29) und (30)

$$\begin{aligned}\frac{dR}{\cos i\,d\varepsilon} = -eV(0,s)&\\
+U(1,s)\cos(-\eta+\varepsilon) &- U(1,c)\sin(-\eta+\varepsilon)\\
+T(1,s)\cos\varepsilon &- T(1,c)\sin\varepsilon\\
+U(2,s)\cos(-\eta+2\varepsilon) &- U(2,c)\sin(-\eta+2\varepsilon)\\
+V(0,s)\cos\eta &- V(0,c)\sin\eta\\
+T(2,s)\cos 2\varepsilon &- T(2,c)\sin 2\varepsilon\\
+U(3,s)\cos(-\eta+3\varepsilon) &- U(3,c)\sin(-\eta+3\varepsilon)\\
+V(1,s)\cos(\eta+\varepsilon) &- V(1,c)\sin(\eta+\varepsilon)\\
+\text{etc.} &- \text{etc.}\end{aligned}$$

## 50.

Aus der Form des im vor. §. angegebenen endlichen Ausdrucks für $dR$ kann man schliessen, dass die zum Integral des vorstehenden Ausdrucks von $dR$ hinzuzufügende willkührliche Constante die Form

$$l_2 + l\sin\eta + l_1\cos\eta$$

haben muss. Gehen wir aber weiter zurück, so zeigt die Gleichung

$$\frac{dR}{d\varepsilon} = \frac{hr^2\varrho}{na^2}\sin(\omega - f)\left(\frac{d\Omega}{dZ}\right)\cos i$$

des Art. 41 (I), dass diese Constante auch unter die Form

$$l\frac{\varrho}{a}\sin\omega + l_1\frac{\varrho}{a}\cos\omega$$

muss gebracht werden können. Substituiren wir in das letzte Glied dieses Ausdrucks $\cos\eta - e$ für $\frac{\varrho}{a}\cos\omega$, und vergleichen mit der vorstehenden Form, so wird $l_2 = -el_1$, und die ganze Constante wird

$$-el_1 + l\sin\eta + l_1\cos\eta$$

wo $l$ und $l_1$ zwei willkührliche Constanten sind. Integrirt man nun den Ausdruck für $dR$ des vor. Art. und verwandelt nach der Integration $\eta$ in

$\varepsilon$, so ergiebt sich

$$\begin{aligned}
\frac{u}{\cos i} = & U(1.c) - el_1 - eV(0,s)\,\varepsilon \\
& + \{Y(1,s) + l\}\sin\varepsilon + \{Y(1,c) + l_1\}\cos\varepsilon \\
& - V(0,c)\,\varepsilon\sin\varepsilon \quad + V(0,s)\,\varepsilon\cos\varepsilon \\
& + Y(2,s)\sin 2\varepsilon \quad + Y(2,c)\cos 2\varepsilon \\
& + Y(3,s)\sin 3\varepsilon \quad + Y(3,c)\cos 3\varepsilon \\
& + \text{etc.} \qquad\qquad + \text{etc.} \\
& + \Sigma Y\left(i,i',{}^{s}_{c}\right)\,{}^{\sin}_{\cos}\left\{(i - i'\mu)\,\varepsilon - i'(c' - c\mu)\right\}
\end{aligned}$$

wo der Gleichung (32) analog

$$\begin{aligned}
Y(1,s) &= T(1,s) + \tfrac{1}{2}U(2,s) \\
Y(2,s) &= \tfrac{1}{2}T(2,s) + \tfrac{1}{2}U(3,s) + V(1,s) \\
Y(3,s) &= \tfrac{1}{2}T(3,s) + \tfrac{1}{2}U(4,s) + \tfrac{1}{2}V(2,s) \\
& \text{etc.} \qquad\qquad \text{etc.} \\
Y(1,c) &= T(1,c) + \tfrac{1}{2}U(2,c) \\
Y(2,c) &= \tfrac{1}{2}T(2,c) + \tfrac{1}{2}U(3,c) + V(1,c) \\
& \text{etc.} \qquad\qquad \text{etc.}
\end{aligned}$$

ist. Man könnte nun auch die zweite im vor. §. für $u$ entwickelte Form für den Fall $i' = 0$ angeben, allein da die Controle, die sie in diesem Falle gewährt, nicht wesentlich ist, so lasse ich sie weg.

Eliminirt man auch hier den Bogen $\varepsilon$ ausserhalb der Sinus- und Cosinuszeichen durch die Gleichung

$$\varepsilon = nt + e\sin\varepsilon$$

so entsteht,

$$\begin{aligned}
\frac{u}{\cos i} = & U(1,c) - \frac{e}{2}V(0,c) - el_1 - eV(0,s)\,nt \\
& + \left\{Y(1,s) - e^2V(0,s) + l\right\}\sin\varepsilon + \left\{Y(1,c) + l_1\right\}\cos\varepsilon \\
& - V(0,c)\,nt\sin\varepsilon \qquad\qquad + V(0,s)\,nt\cos\varepsilon \\
& + \left\{Y(2,s) + \frac{e}{2}V(0,s)\right\}\sin 2\varepsilon + \left\{Y(2,c) + \frac{e}{2}V(0,c)\right\}\cos 2\varepsilon \\
& + Y(3,s)\sin 3\varepsilon \qquad\qquad + Y(3,c)\cos 3\varepsilon \\
& + \text{etc.} \qquad\qquad + \text{etc.} \\
& + \Sigma Y\left(i,i',{}^{s}_{c}\right)\,{}^{\sin}_{\cos}\left\{(i - i'\mu)\,\varepsilon - i'(c' - c\mu)\right\}
\end{aligned}$$

womit die allgemeinen Integrationen ausgeführt sind. Da wir weiter unten auch den Ausdruck vom Differential von $u$ in derselben Form brauchen werden, so füge ich diesen sogleich bei.

$$\frac{\left(\frac{dR}{d\eta}\right)}{\cos i} = \frac{\frac{du}{d\varepsilon}}{\cos i} = -\frac{3e}{2} V(0,s)$$

$$\begin{aligned}
&+\left\{Y(1,s)+V(0,s)+l\right\}\cos\varepsilon &&-\left\{Y(1,c)+V(0,c)+l_1\right\}\sin\varepsilon\\
&-V(0,c)\,nt\cos\varepsilon &&-V(0,s)\,nt\sin\varepsilon\\
&+\left\{2Y(2,s)+\tfrac{e}{2}V(0,s)\right\}\cos 2\varepsilon &&-\left\{2Y(2,c)+\tfrac{e}{2}V(0,c)\right\}\sin 2\varepsilon\\
&+3Y(3,s)\cos 3\varepsilon &&-3Y(3,c)\sin 3\varepsilon\\
&+\text{etc.} &&-\text{etc.}\\
&\pm\Sigma W\left(i,i',{}^{s}_{c}\right){}^{\cos}_{\sin}\left\{(i-i'\mu)\,\varepsilon-i'(c'-c\mu)\right\}
\end{aligned}$$

wo die $W$ Coefficienten die durch (34) gegebenen sind.

51.

Die im Vorhergehenden entwickelten Integrale enthalten die sechs unabhängigen Constanten $c$, $k$, $k_1$, $k_2$, $l$, $l_1$, die den Umständen gemäss bestimmt werden müssen, und die beiden abhängigen Constanten $C$ und $K$. Ehe jene bestimmt werden können, muss gezeigt werden, wie diese von denselben abhängen. Die strenge Gleichung, welche die Abhängigkeit der Constante $C$ bedingt, ist die Gleichung (33) (I), nemlich

$$\frac{dz}{dt}(1+\nu)^2 = \frac{h_0}{h}$$

die wir für unsern jetzigen Zweck wie folgt umstellen wollen

$$(36)\quad \frac{dz}{dt} = \frac{h_0}{h} - 2\nu + (3\nu^2 - 4\nu^3 \pm \text{etc.})\frac{h_0}{h} - 2\nu\left(\frac{h_0}{h} - 1\right)$$

Im Art. 48 fanden wir

$$\frac{dz}{dt} = 1 + k + P(0,c) - \frac{e}{2}H(0,c) + \text{veränderlichen Gliedern,}$$

welches Resultat jedoch nur für die erste Potenz der störenden Kräfte gilt. Nachdem auf die Quadrate und höheren Potenzen dieser Rücksicht genommen sein wird, wird der bestimmte Theil des constanten Gliedes in $\frac{dz}{dt}$ nicht mehr $1+P(0,c)-\frac{e}{2}H(0,c)$ sein, sondern er wird dieser Grösse, vermehrt um kleine Glieder von der Ordnung des Quadrats und der höheren Potenzen der störenden Kräfte, gleich sein.

Damit die Entwickelungen, die ich jetzt vornehmen werde, sich auf alle Potenzen der störenden Kräfte erstrecken, werde ich daher statt des obigen Ausdrucks

$$\frac{dz}{dt} = 1 + k + Z_0 + Z_1 + \text{veränderl. Gl.}$$

setzen, wo

$$Z_0 = P(0,c) - \frac{e}{2} H(0,c)$$

und $Z_1$ eine jedenfalls bestimmte und bestimmbare Grösse von der Ordnung der Quadrate der störenden Kräfte ist. Der Ausdruck für $\nu$ ist immer

$$\nu = C + \text{veränderl. Gl.}$$

da man auch nach der Berücksichtigung des Quadrats und der höheren Potenzen der störenden Kräfte die etwa im Ausdruck von $\nu$ entstehenden constanten Glieder der Constante $C$ einverleibt sich denken, und diese daher weglassen darf. Bezeichnen wir ferner das constante Glied im vollständigen Ausdruck von $\frac{h_0}{h}$ mit $1 + k_3$, so dass nach der Entwickelung und Integration

$$\frac{h_0}{h} = 1 + k_3 + \text{veränderl. Gl.}$$

wird, und setzen wir in demselben Sinne

$$(3\nu^2 - 4\nu^3 \pm \text{etc.})\frac{h_0}{h} - 2\nu\left(\frac{h_0}{h} - 1\right) = V_1 + \text{veränderl. Gl.}$$

wo $V_1$ erst bei der Berechnung der Störungen höherer Ordnung in Bezug auf die störenden Kräfte erhalten werden kann. Substituiren wir nun diese Ausdrücke in (36), und behalten nur die constanten Glieder bei, so wird

$$C = \tfrac{1}{2}(k_3 - k_1 - Z_0 - Z_1 + V_1)$$

und ist also unter andern von $k_3$ abhängig gemacht worden.

52.

Es liegt nun zunächst die Aufgabe vor, die eben eingeführte Constante $k_3$ in Function der übrigen, unabhängigen Constanten darzustellen, und zur Lösung dieser Aufgabe müssen die beiden Differentialgleichungen (41) (I) und (42) (I) angewandt werden, nemlich nach einer kleinen Umformung der ersteren

$$dW_0 = h_0\left\{2\frac{\varrho}{r}\cos(\bar{f} - \omega) - 1 - 2\frac{h^2}{h_0^2} + 2\frac{h^3}{h_0^2}\frac{\varrho\cos(\bar{f} - \omega)}{a_0\cos^2\varphi_0} + 2e_0\frac{h^3}{h_0^3}\frac{\varrho\cos\omega}{a_0\cos^2\varphi_0}\right\}\left(\frac{d\Omega}{df}\right)dt$$
$$+ 2h_0\varrho\sin(\bar{f} - \omega)\left(\frac{d\Omega}{dr}\right)dt$$
$$d\frac{h_0}{h} = h_0\left(\frac{d\Omega}{df}\right)dt$$

Heben wir aus diesem Ausdruck von $dW_0$ die Glieder heraus, welche die Factoren $\varrho\cos\omega$ und $\varrho\sin\omega$ nicht enthalten, so ergeben sich die

folgenden

$$-h_0\left(1+2\frac{h^2}{h_0^2}\right)\left(\frac{d\Omega}{df}\right)dt$$

Führen wir in der im Art. 48 erklärten, dem Integral aus $dW_0$ hinzuzufügenden Constante

$$k+k_1\cos\eta+k_2\sin\eta$$

statt der excentrischen Anomalie $\eta$ die wahre Anomalie $\omega$ ein, so wird sie

$$k+e_0k_1+\frac{k_1}{a_0}\varrho\cos\omega+\frac{k_2}{a_0\cos\varphi_0}\varrho\sin\omega$$

und sehen wir hier gleichfalls von den mit $\varrho\cos\omega$ und $\varrho\sin\omega$ multiplicirten Gliedern ab, so bleibt

$$k+ek_1$$

übrig, wenn man schlechtweg $e$ für $e_0$ schreibt, und diese Constante ist also in den vorhergehenden Entwickelungen dem Integral

$$-h_0\int\left(1+2\frac{h^2}{h_0^2}\right)\left(\frac{d\Omega}{df}\right)dt$$

hinzugefügt worden, während im vor. Art. bestimmt wurde, dass die Constante $k_3$ dem Integral

$$h_0\int\left(\frac{d\Omega}{df}\right)dt$$

hinzugefügt werden soll. Da diese beiden Integrale von einander abhängig sind, so wird $k_3$ zu einer Function von $k+ek_1$, die auf folgende Art ermittelt werden kann. Aus der Gleichung

$$d\frac{h_0}{h}=h_0\left(\frac{d\Omega}{df}\right)dt$$

folgt

$$d\frac{h}{h_0}=-\frac{h^2}{h_0}\left(\frac{d\Omega}{df}\right)dt$$

integrirt man diese beiden Gleichungen, und fügt die im Vorhergehenden angegebenen willkührlichen Constanten den Integralen ausdrücklich hinzu, so bekommt man

$$2\frac{h}{h_0}-\frac{h_0}{h}=1+k+ek_1-h_0\int\left(1+2\frac{h^2}{h_0^2}\right)\left(\frac{d\Omega}{df}\right)dt$$

$$\frac{h_0}{h}=1+k_3+h_0\int\left(\frac{d\Omega}{df}\right)dt$$

oder da die Entwickelungen der unter den Integralzeichen befindlichen Functionen keine constanten Glieder hervorbringen können, wie weit man auch die Annäherungen treiben mag,

$$\left.\begin{aligned} 2\frac{h}{h_0} - \frac{h_0}{h} &= 1 + k + ek_1 + \text{veränderl. Gl.} \\ \frac{h_0}{h} &= 1 + k_3 \qquad + \text{veränderl. Gl.} \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (37)$$

Da nun $\frac{h_0}{h} - 1$ eine kleine Grösse von der Ordnung der störenden Kraft ist, so wird

$$\frac{h}{h_0} = 1 - \left(\frac{h_0}{h} - 1\right) + \left(\frac{h_0}{h} - 1\right)^2 - \left(\frac{h_0}{h} - 1\right)^3 \pm \text{etc.}$$

und hieraus folgt

$$2\frac{h}{h_0} - \frac{h_0}{h} = 1 - 3\frac{h_0}{h} + 2\left(\frac{h_0}{h} - 1\right)^2 - 2\left(\frac{h_0}{h} - 1\right)^3 \pm \text{etc.}$$

Setzt man nun

$$\left(\frac{h_0}{h} - 1\right)^2 - \left(\frac{h_0}{h} - 1\right)^3 \pm \text{etc.} = H_1 + \text{veränderl. Gl.}$$

wo man die Constante $H_1$ bei der Berechnung der Störungen höherer Ordnung auf ähnliche Weise erhalten kann wie die oben mit $Z_1$ und $V_1$ bezeichneten Constanten, und substituirt diesen Ausdruck sowohl wie die Ausdrücke (37) in die vorstehende Gleichung, so ergiebt sich mit bloser Beibehaltung der constanten Glieder

$$k_3 = -\tfrac{1}{3}(k + ek_1) + \tfrac{2}{3}H_1$$

Mittelst dieses Werthes von $k_3$ verwandelt sich die am Ende des vor. Art. gefundene Gleichung in

$$C = -\tfrac{1}{6}(4k + ek_1 + 3Z_0) + \tfrac{1}{6}(3V_1 + 2H_1 - 3Z_1) \quad . \quad . \quad (38)$$

welcher Ausdruck für alle Potenzen der störenden Kraft gilt. Behält man darin blos die Glieder der ersten Ordnung bei, so geht

$$C = -\tfrac{1}{6}(4k + ek_1 + 3Z_0) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (39)$$

daraus hervor, und der numerische Werth dieser Grössen muss also in die vorhergehenden Ausdrücke für die erste Annäherung substituirt werden.

Die im Art. 48 zu der Entwickelung von $\delta\frac{h}{h_0}$ addirte Constante $K$ steht in enger Beziehung zu $k_3$, und man findet aus dem Vorhergehenden leicht, dass der strenge Ausdruck dafür

$$K = \tfrac{1}{3}(k + ek_1) + \tfrac{1}{3}H_1$$

ist. Hier wo wir nur die Grössen erster Ordnung von $K$ zu berücksichtigen brauchen, ist also

$$K = \tfrac{1}{3}(k + ek_1) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (40)$$

in den genannten Ausdruck für $\delta\frac{h}{h_0}$ zu substituiren.

53.

Die unabhängigen willkührlichen Constanten müssen den Umständen gemäss bestimmt werden, und abgesehen von besonderen Fällen, die vielleicht vorkommen möchten, obgleich noch keine solche dagewesen sind, kommen gegenwärtig in den Anwendungen namentlich zwei Fälle vor, je nachdem man sich zur Berechnung der Störungen osculirender oder mittlerer Elemente bedient hat. Jeder dieser beiden Fälle muss besonders betrachtet werden.

Wenn man zum ersten Male die Störungen eines Planeten berechnet, so werden selten oder nie die mittleren Elemente desselben bekannt sein, denn es werden wohl nie so viele Systeme von osculirenden Elementen vorliegen, dass man daraus die wahren Grenzen derselben entnehmen könnte, woraus zufolge der in der Einleitung zur Abhandlung (I) gegebenen Definition der mittleren Elemente die Kenntniss derselben geschöpft werden muss. Allein da im Verlaufe dieser Abhandlungen gezeigt werden wird, wie man die mittleren Elemente aus den osculirenden, und den dazu gehörigen Störungen bestimmen kann, und man nach dieser Bestimmung sich wohl in den Fall versetzt sehen könnte die Störungen mit der Zugrundelegung von mittleren Elementen zu berechnen, so will ich hier um das Thema der Bestimmung der willkührlichen Constanten vollständig auszuführen annehmen, dass die Kenntniss der mittleren Elemente auf irgend eine Art erlangt sei. Ich werde die Eigenschaften, die sie besitzen müssen, erörtern, und darauf die Bestimmung der Constanten zuerst in diesem Falle auseinander setzen.

Die im Art. 48 dem Ausdruck von $nz$ hinzugefügte willkührliche Constante $c$ ist jetzt der mittlere Werth der mittleren Anomalie für die Zeitepoche selbst, und es ist in Bezug darauf weiter keine Erörterung nöthig.

Der wahre Werth der mittleren Bewegung in der Zeiteinheit ist die Grenze des Verhältnisses des vom Planeten um die Sonne beschriebenen Winkels zur Zeit, in welcher er beschrieben worden ist, wenn diese Zeit unbestimmt wachsend angenommen wird. Der mittlere Werth der mittleren Bewegung muss nothwendiger Weise mit dem eben definirten wahren Werthe derselben identisch sein, weil die mittlere Bewegung überhaupt eben so wenig wie die grosse Achse der Ellipse, mit welcher sie durch das dritte Keppler'sche Gesetz in engster

Beziehung steht, Säcularänderung besitzt, und daher die osculirenden Werthe derselben nur um den eben definirten wahren Werth derselben osciliren können. Die eben gegebene Definition des wahren (oder mittleren) Werthes der mittleren Bewegung bedingt, dass im Ausdruck von $nz$ ausser dem Gliede $nt$, wo eben $n$ den mittleren (oder wahren) Werth der mittleren Bewegung in der Zeiteinheit bedeutet, nur Glieder anderer Form vorkommen dürfen, denn wenn ausserdem noch ein der Zeit proportionales Glied in diesem Ausdruck vorhanden wäre, so könnte $n$ nicht die Grenze des in der Definition genannten Verhältnisses sein. Es folgt hieraus, dass wenn der Berechnung der Störungen mittlere Elemente zu Grunde gelegt worden sind, die Constante $k$ so bestimmt werden muss, dass das im Ausdruck von $nz$ enthaltene der Zeit proportionale Glied $= nt$ werde.

Ich bemerke hiezu noch, dass jede Bestimmung der willkührlichen Constanten dahin führen muss, dass im Gliede $nt$ der wahre Werth von $n$ eintritt, und dieser Werth muss auch in die Argumente substituirt werden, denn sonst können die Störungen, welche Form man ihnen auch gegeben, und welche Coordinaten man auch gewählt haben mag, nie die wahre Geschwindigkeit des Planeten darstellen. Man kann mit anderen Werthen von $n$ wohl bewirken, dass dieses innerhalb eines kurzen Zeitraums nahe der Fall ist, aber in kürzerer oder längerer Zeit, je nachdem die Störungsglieder weniger oder mehr beträchtlich sind, müssen sich nothwendig Abweichungen von der wahren Bewegung im Resultat zu erkennen geben.

In Bezug auf die übrigen vier Constanten tritt der Umstand ein, dass sie sich den elliptischen Elementen einverleiben, welche Säcularänderungen unterworfen sind, und deren mittlere Werthe daher nur dann Sinn haben, wenn man von den Säcularänderungen absieht; mit anderen Worten, wenn man ihnen einen bestimmten Zeitpunkt unterlegt, unter welchem hier die überhaupt als Epoche gewählte Zeit verstanden werden soll. Gehen wir hievon zu der in der Einleitung zur Abhandlung (I) aufgestellten Definition der mittleren Elemente über, zufolge welcher sie zwischen den überhaupt möglichen Grenzen der betreffenden, auf die Epoche bezogenen, osculirenden Elemente in der Mitte liegen, so lässt sich als charakteristische Eigenschaft dieser mittleren Elemente angeben, dass ihre Anwendung auf Störungen führen muss, deren mögliches Maximum kleiner ist, wie die bei der Anwen-

dung irgend anderer Elemente möglichen Maxima. Die Glieder der allgemeinen Ausdrücke der Störungen, welche die vier Constanten $k_1$, $k_2$, $l$, $l_1$ enthalten, ändern sich mit den der Rechnung zu Grunde gelegten Elementen am Meisten, indem bei ihrer Bestimmung immer der Grundsatz maassgebend sein muss, dass sie das ihrige dazu beitragen müssen, damit durch die Störungen und den der Rechnung zu Grunde gelegten elliptischen Elementen der Ort und die Geschwindigkeit des gestörten Planeten zur Zeitepoche dargestellt werde. Die Aenderung dieser Glieder ist daher eine Grösse derselben Ordnung wie eine Aenderung der der Rechnung zu Grunde gelegten elliptischen Elemente selbst*), während die Aenderungen der übrigen Störungscoefficienten kleine Grössen der ersten Ordnung in Bezug auf die Aenderungen der elliptischen Elemente sind. Je grösser jene Glieder sind, desto grösser kann daher überhaupt das Maximum der Störungen werden, und desto mehr weicht dieses von seinem möglichst geringen Betrage ab.

Es folgt hieraus, dass die betreffenden mittleren Elemente diejenigen sind, die in Verbindung mit solchen Störungen, in welchen von diesen, sich mit den Elementen stark ändernden, Gliedern so viele Null werden wie überhaupt möglich ist, den Ort und die Geschwindigkeit des gestörten Planeten darstellen.

Die sich mit den elliptischen Elementen stark ändernden Störungsglieder sind in dem Ausdruck von $nz$ die $\sin\varepsilon$, $\cos\varepsilon$, $\sin 2\varepsilon$, $\cos 2\varepsilon$, proportionalen und in den Ausdrücken von $\nu$ und $u$ die constanten und die $\sin\varepsilon$ und $\cos\varepsilon$ proportionalen Glieder. Von diesen können nur vier Glieder gleich Null gemacht werden, weil nur vier Constanten hiefür zur Verfügung stehen, und da man, um das Maximum der Störungen so klein wie möglich zu machen, die vier grössten dieser Glieder zum Verschwinden bringen muss, so lässt sich die analytische Bedingung der betreffenden vier mittleren Elemente, nemlich der Excentricität, der Länge des Perihels, der Neigung und der Knotenlänge so aussprechen, dass sie die Coefficienten der mit $\sin\varepsilon$ und $\cos\varepsilon$ multi-

---

*) Wenn z. B. dem Werthe $e$ der der Rechnung zu Grunde gelegten Excentricität der Werth $k_1$ der so bezeichneten Constante entspricht, so entspricht dem Werthe $e+\Delta e$ der Excentricität sehr nahe der Werth $k_1 - \frac{2\Delta e}{\cos^2\varphi}$, welcher aus der Bedingung entspringt, dass der Ort und die Geschwindigkeit des Planeten in beiden Fällen dieselben sein müssen; und ähnliche Variationen ergeben sich für die übrigen drei Constanten.

plicirten Glieder in den Ausdrücken für $nz$ und $u$ gleich Null machen müssen. Es sind zwar oft die bez. Coefficienten in $\nu$ grösser wie die in $u$, allein die in $nz$ sind immer ohngefähr doppelt so gross wie die in $u$, und die eben entwickelte Form dieser Ausdrücke zeigt, dass die Coefficienten von $\sin\varepsilon$ und $\cos\varepsilon$ in $nz$ und in $\nu$ nicht zugleich gleich Null gemacht werden können. Es ist nun leicht die Bestimmung der willkührlichen Constanten für den Fall, dass der Berechnung der Störungen mittlere Elemente zu Grunde gelegt worden sind, auszuführen. Setzen wir zur Abkürzung

$$\begin{aligned}
Z(1,c) &= R(1,c) + eR(0,c) - \left(1 - \tfrac{e^2}{8}\right) H(0,c) \\
Z(1,s) &= R(1,s) - \left(1 - \tfrac{5e^2}{8}\right) H(0,s) \\
Z(2,c) &= R(2,c) + \tfrac{5e}{8} H(0,c) \\
Z(2,s) &= R(2,s) + \tfrac{e}{8}(5 - 2e^2) H(0,s) \\
&\text{etc.} \\
W(1,c) &= \tfrac{1}{2}\{Q(1,c) + H(0,c)\} \\
W(1,s) &= \tfrac{1}{2}\{Q(1,s) + (1 - e^2) H(0.s)\} \\
&\text{etc.}
\end{aligned}$$

dann werden die Ausdrücke des Art. 48

$$\begin{aligned}
nz = c + nt &+ \left\{R(0,c) + k - \tfrac{e}{2} k_1\right\} nt \\
&+ \left\{Z(1,c) + \left(1 - \tfrac{e^2}{2}\right) k_1\right\} \sin\varepsilon - \left\{Z(1,s) + k_2\right\} \cos\varepsilon \\
&+ \left(1 - \tfrac{e^2}{2}\right) H(0,s)\, nt \sin\varepsilon \qquad + H(0,c)\, nt \cos\varepsilon \\
&+ \left\{Z(2,c) - \tfrac{e}{4} k_1\right\} \sin 2\varepsilon \qquad - \left\{Z(2,s) - \tfrac{e}{4} k_2\right\} \cos 2\varepsilon \\
&- \tfrac{e}{4} H(0,s)\, nt \sin 2\varepsilon \qquad - \tfrac{e}{4} H(0,c)\, nt \cos 2\varepsilon \\
&+ \text{etc.} \qquad - \text{etc.}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\nu = C &- \tfrac{e}{2} H(0,s)\, nt \\
&+ \{W(1,c) - \tfrac{1}{2}k_1\} \cos\varepsilon + \{W(1,s) - \tfrac{1}{2}k_2\} \sin\varepsilon \\
&- \tfrac{1}{2} H(0,s)\, nt \cos\varepsilon \qquad + \tfrac{1}{2} H(0,c)\, nt \sin\varepsilon \\
&+ \text{etc.} \qquad + \text{etc.}
\end{aligned}$$

und zufolge der vorstehenden Erklärungen bekommen wir hieraus die folgenden Bedingungsgleichungen

$$0 = R(0,c) + k - \frac{e}{2} k_1$$
$$0 = Z(1,c) + \left(1 - \frac{e^2}{2}\right) k_1$$
$$0 = Z(1,s) + k_2$$

woraus

$$k = - R(0,c) - \frac{2}{2-e^2} Z(1,c)$$
$$k_1 = - \frac{2}{2-e^2} Z(1,c)$$
$$k_2 = - Z(1,s)$$

folgt.*) Substituirt man diese sowohl in die vorstehenden Ausdrücke wie in den Ausdruck (39) für $C$, so wird

$$\begin{aligned}
nz = c &+ nt \\
&+ \left(1 - \frac{e^2}{2}\right) H(0,s)\, nt \sin\varepsilon \qquad + H(0,c)\, nt \cos\varepsilon \\
&+ \left\{Z(2,c) + \frac{e}{2(2-e^2)} Z(1,c)\right\} \sin 2\varepsilon - \left\{Z(2,s) + \frac{e}{4} Z(1,s)\right\} \cos 2\varepsilon \\
&- \frac{e}{4} H(0,s)\, nt \sin 2\varepsilon \qquad - \frac{e}{4} H(0,c)\, nt \cos 2\varepsilon \\
&- \text{etc.} \qquad - \text{etc.}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\nu = \frac{1}{6} P(0,c) &+ \frac{e}{6} P(1,c) - \frac{e^2}{2(2-e^2)} P(2,c) - \frac{e(4+e^2)}{8(2-e^2)} H(0,c) \\
&- \frac{e}{2} H(0,s)\, nt \\
&+ \left\{W(1,c) + \frac{1}{2-e^2} Z(1,c)\right\} \cos\varepsilon + \left\{W(1,s) + \tfrac{1}{2} Z(1,s)\right\} \sin\varepsilon \\
&- \tfrac{1}{2} H(0,s)\, nt \cos\varepsilon \qquad + \tfrac{1}{2} H(0,c)\, nt \sin\varepsilon \\
&+ \text{etc.} \qquad + \text{etc.}
\end{aligned}$$

Setzt man ferner

$$X(0,c) = U(1,c) - \frac{e}{2} V(0,c)$$
$$X(1,s) = Y(1,s) - e^2 V(0,s)$$

so wird der Ausdruck des Art. 50 für $u$

$$\begin{aligned}
\frac{u}{\cos i} = X(0,c) &- e l_1 - e V(0,s)\, nt \\
&+ \{X(1,s) + l\} \sin\varepsilon + \{Y(1,c) + l_1\} \cos\varepsilon \\
&- V(0,c)\, nt \sin\varepsilon \qquad + V(0,s)\, nt \cos\varepsilon \\
&+ \text{etc.} \qquad - \text{etc.}
\end{aligned}$$

---

*) Diese Bestimmung dieser Constanten ist mit der Bestimmung der analogen Constanten in den „*Fundamenta nova etc.*" identisch, und stimmt mit der Laplace'schen Bestimmung seiner analogen Constanten überein.

und die Bedingungsgleichungen werden hier

$$0 = X(1, s) + l$$
$$0 = Y(1, c) + l_1$$

wodurch schliesslich

$$\frac{u}{\cos i} = X(0, c) + eY(1, c) - eV(0, s)\, nt$$
$$- V(0, c)\, nt \sin\varepsilon \qquad + V(0, s)\, nt \cos\varepsilon$$
$$+ \text{etc.} \qquad + \text{etc.}$$

wird. Zufolge (40) wird in diesem Falle

$$K = -\tfrac{1}{2}R(0, c) - \frac{e}{2-e^2} Z(1, c)$$

Diese Bestimmungen werden strenge, wenn man die strengen Werthe der Coefficienten, und die im Vorhergehenden entwickelten Glieder höherer Ordnung der Constanten $C$ und $K$ substituirt.

54.

Wir kommen jetzt zu dem Falle, in welchem der Berechnung der Störungen die Werthe der osculirenden Elemente, die der Epoche, das ist dem Zeitpunkt $t = 0$ angehören, zu Grunde gelegt worden sind.

Wenn dieses der Fall ist, so ist an sich klar, dass die für diesen Zeitpunkt statt findenden numerischen Werthe der Störungen selbst, sowohl wie die ihrer ersten Differentialquotienten in Bezug auf die Zeit Null werden müssen. Lässt man daher $nz$, $\nu$ und $u$ für diesen Zeitpunkt gelten, das heisst, substituirt man den numerischen Werth von $\varepsilon$ darin, welcher in diesem Zeitpunkt statt findet, so muss

$$nz = c_0; \quad \nu = 0; \quad u = 0;$$
$$\frac{dz}{dt} = 1; \quad \frac{d\nu}{dt} = 0; \quad \frac{du}{dt} = 0;$$

werden, wenn wie früher unter den osculirenden Elementen $c_0$ die mittlere Anomalie bedeutet. Da aber

$$\frac{d\nu}{dt} = \frac{d\nu}{d\varepsilon}\frac{d\varepsilon}{dt}; \quad \frac{du}{dt} = \frac{du}{d\varepsilon}\frac{d\varepsilon}{dt}$$

ist, und $\frac{d\varepsilon}{dt}$ nie Null werden kann, so darf man statt der beiden zuletzt angeführten Bedingungsgleichungen die folgenden

$$\frac{d\nu}{d\varepsilon} = 0; \quad \frac{du}{d\varepsilon} = 0$$

anwenden, die man durch die hier erklärte Methode, gleich wie $\frac{dz}{dt}$, unmittelbar erhält.

Substituirt man nun die numerischen Werthe von $c$, $c'$ und $\mu$ in die Argumente der Ausdrücke für $n\delta z$; $\frac{d\delta z}{dt}$; $\nu$; $\frac{d\nu}{d\varepsilon}$; $\frac{u}{\cos i}$; $\frac{du}{\cos i d\varepsilon}$, und ausserdem $t = 0$ so wie für $\varepsilon$ den diesem Zeitpunkt entsprechenden Werth der excentrischen Anomalie, den ich $\varepsilon_0$ nennen werde, setzt dabei fürerst die willkührlichen Constanten $c$, $k$, $k_1$, $k_2$, $l$, $l_1$ und $C$ gleich Null, und bezeichnet die so erhaltenen numerischen Werthe mit

$$(n\delta z)_0;\ 1 + \left(\frac{d\delta z}{dt}\right)_0;\ (\nu)_0;\ \left(\frac{d\nu}{d\varepsilon}\right)_0;\ \left(\frac{u}{\cos i}\right)_0;\ \left(\frac{du}{\cos i d\varepsilon}\right)_0$$

dann bekommt man zur Bestimmung der Constanten die folgenden Bedingungsgleichungen

$$\begin{aligned}
c_0 &= c + \left(1 - \frac{e^2}{2}\right)k_1 \sin\varepsilon_0 - k_2\cos\varepsilon_0 - \frac{e}{4}k_1 \sin 2\varepsilon_0 + \frac{e}{4}k_2 \cos 2\varepsilon_0 + (n\delta z)_0 \\
0 &= k + k_1\cos\varepsilon_0 + k_2\sin\varepsilon_0 + \left(\frac{d\delta z}{dt}\right)_0 \\
0 &= -\tfrac{4}{3}k - \frac{e}{8}k_1 - k_1\cos\varepsilon_0 - k_2\sin\varepsilon_0 + 2(\nu)_0 - Z \\
0 &= k_1\sin\varepsilon_0 - k_2\cos\varepsilon_0 + 2\left(\frac{d\nu}{d\varepsilon}\right)_0 \\
0 &= -el_1 + l\sin\varepsilon_0 + l_1\cos\varepsilon_0 + \left(\frac{u}{\cos i}\right)_0 \\
0 &= l\cos\varepsilon_0 - l_1\sin\varepsilon_0 + \left(\frac{du}{\cos i d\varepsilon}\right)_0
\end{aligned}$$

wenn wir $Z$ statt $Z_0 + Z_1$ schreiben.

Von der Constante $C$ habe ich hier nur die Glieder erster Ordnung ausdrücklich hingeschrieben, allein diese Gleichungen können demungeachtet auf die Glieder der höheren Ordnungen der störenden Kräfte angewandt werden, man braucht nur zu dem Ende die Glieder höherer Ordnung des Ausdrucks (38) der Grösse $(\nu)_0$ einzuverleiben. Diese Glieder müssen jedenfalls, wenn sie merklich sein sollten, aus den in den vorangegangenen Annäherungen berechneten Werthen der Grössen, von welchen sie abhängen, berechnet werden, und da man dieses Verfahren fortsetzen kann, so weit man will, so giebt sich zu erkennen, dass die vorstehenden Gleichungen strenge sind. Die zweite und dritte dieser geben nun zuerst

$$\begin{aligned}
0 &= -k - ek_1 + 3\left(\frac{d\delta z}{dt}\right)_0 + 6(\nu)_0 - 3Z \\
0 &= k_1(\cos\varepsilon_0 - e) + k_2\sin\varepsilon_0 + 4\left(\frac{d\delta z}{dt}\right)_0 + 6(\nu)_0 - 3Z
\end{aligned}$$

und hieraus zieht man in Verbindung mit der vierten

$$(41)\left\{\begin{aligned}
k &= -\left(\frac{d\delta z}{dt}\right)_0 + 2\left(\frac{d\nu}{d\varepsilon}\right)_0 \frac{e\sin\varepsilon_0}{1 - e\cos\varepsilon_0} + \left\{4\left(\frac{d\delta z}{dt}\right)_0 + 6(\nu)_0 - 3Z\right\}\frac{1}{1 - e\cos\varepsilon_0} \\
k_1 &= -2\left(\frac{d\nu}{d\varepsilon}\right)_0 \frac{\sin\varepsilon_0}{1 - e\cos\varepsilon_0} - \left\{4\left(\frac{d\delta z}{dt}\right)_0 + 6(\nu)_0 - 3Z\right\}\frac{\cos\varepsilon_0}{1 - e\cos\varepsilon_0} \\
k_2 &= 2\left(\frac{d\nu}{d\varepsilon}\right)_0 \frac{\cos\varepsilon_0 - e}{1 - e\cos\varepsilon_0} - \left\{4\left(\frac{d\delta z}{dt}\right)_0 + 6(\nu)_0 - 3Z\right\}\frac{\sin\varepsilon_0}{1 - e\cos\varepsilon_0}
\end{aligned}\right.$$

worauf die erste

$$\left.\begin{aligned} c &= c_0 - (n\delta z)_0 + \left(\frac{d\nu}{d\varepsilon}\right)_0 \left\{\frac{3\,(1-e^2)}{2\,(1-e\cos\varepsilon_0)} + \tfrac{1}{2} - 2e\cos\varepsilon_0\right\} \\ &\qquad - \tfrac{1}{4}\left\{4\left(\frac{d\delta z}{dt}\right)_0 + 6\,(\nu)_0 - 3Z\right\}\left\{\frac{3e\sin\varepsilon_0}{1-e\cos\varepsilon_0} - 2e\sin\varepsilon_0\right\} \\ &\text{oder} \\ c &= c_0 - (n\delta z)_0 - k_1\left\{\frac{2-e^2}{2}\sin\varepsilon_0 - \frac{e}{2}\sin\varepsilon_0\cos\varepsilon_0\right\} + k_2\left\{\frac{e}{4} + \cos\varepsilon_0 - \frac{e}{2}\cos^2\varepsilon_0\right\} \end{aligned}\right\} \quad (42)$$

giebt. Aus den beiden letzten Bedingungsgleichungen ergiebt sich ferner

$$\left.\begin{aligned} l &= -\left(\frac{u}{\cos i}\right)_0 \frac{\sin\varepsilon_0}{1-e\cos\varepsilon_0} - \left(\frac{du}{\cos i\, d\varepsilon}\right)_0 \frac{\cos\varepsilon_0 - e}{1-e\cos\varepsilon_0} \\ l_1 &= -\left(\frac{u}{\cos i}\right)_0 \frac{\cos\varepsilon_0}{1-e\cos\varepsilon_0} + \left(\frac{du}{\cos i\, d\varepsilon}\right)_0 \frac{\sin\varepsilon_0}{1-e\cos\varepsilon_0} \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (43)$$

*) Die aus diesen Gleichungen hervorgehenden Zahlenwerthe dieser Constanten müssen vor allen Dingen in die Ausdrücke des Art. 48 für $nz$ und $\nu$, so wie in den Ausdruck des Art. 50 für $\frac{u}{\cos i}$ substituirt werden. Wenn die Berechnung der von den Quadraten und Producten der störenden Kräfte abhängigen Glieder nöthig wird, so ist die Substitution dieser Werthe der Constanten auch in die Ausdrücke für $\frac{d\delta z}{dt}$, $2\frac{d\nu}{d\varepsilon}$ oder $\left(\frac{\overline{dW}}{d\eta}\right)$, $\left(\frac{\overline{d^2W}}{d\eta^2}\right)$ und $\delta\frac{h}{h_0}$ des Art. 48, so wie in den Ausdruck des Art. 50 für $\frac{du}{\cos i\, d\varepsilon}$ oder $\left(\frac{\overline{dR}}{d\eta}\right)$ erforderlich.

## 55.

An die eben entwickelten Ausdrücke der Constanten knüpfen sich ein paar Bemerkungen, die nicht unwichtig sind. Diese Ausdrücke zeigen, dass nur die Constante $c$ von $(n\delta z)_0$ abhängt, die übrigen fünf Constanten hingegen von dieser Grösse unabhängig gefunden werden. Die Grösse $(n\delta z)_0$ ist aber die einzige, in deren Gliedern die Quadrate der kleinen Divisoren vorkommen, und die Constanten $k$, $k_1$, $k_2$, $l$ und $l_1$ sind also nur von der ersten Potenz dieser Divisoren abhängig. Da man in der ersten Annäherung die Divisoren aus dem osculirenden Werth der mittleren Bewegung berechnen muss; während sie der Strenge nach aus dem wahren (oder mittleren) Werthe dieser Bewegung berechnet werden müssen, so hat der Fehler, mit welchem die durch die erste Annäherung berechneten Werthe der Constanten aus dieser Ur-

---

*) Diese Bestimmung der Constanten ist mit der Bestimmung der analogen Constanten in den Astr. Nachr. Bd. XVIII Nr. 425 identisch.

sache behaftet sind, auf die Werthe von $k$, $k_1$, $k_2$, $l$ und $l_1$ den wenigsten Einfluss, und diese Constanten, auf welche es bei der Verbesserung der Störungscoefficienten durch die Berücksichtigung des Quadrats der störenden Kraft mit ankommt, werden also durch die obigen Ausdrücke im Allgemeinen weit genauer gefunden wie die sechste Constante $c$, die von $(n\delta z)_0$ abhängig ist, aber bei der eben genannten Verbesserung der Störungscoefficienten nicht gebraucht wird, da sie nur in den Argumenten vorkommt.

Da nach der Substitution der numerischen Werthe von $k$ und $k_1$

$$nz = c + \left\{1 + R(0,c) + k - \frac{e}{2} k_1\right\} nt + \text{periodischen Gliedern}$$

wird, so ist in Folge der Erklärungen des Art. 53 der numerische Werth von

$$\left\{1 + R(0,c) + k - \frac{e}{2} k_1\right\} . n$$

bis auf Grössen von der Ordnung der Quadrate der störenden Kräfte dem wahren (oder mittleren) Werthe der mittleren Bewegung in der Zeiteinheit gleich. Nach der Berücksichtigung der von den Quadraten der störenden Kräfte abhängigen Glieder wird derselbe bis auf Grössen von der Ordnung der Cuben der störenden Kräfte dem wahren Werthe der mittleren Bewegung gleich, u. s. w. Man sieht hieraus, dass durch die Bestimmung der willkührlichen Constanten die Kenntniss des wahren Werthes der mittleren Bewegung erlangt wird, und dass dieser von selbst in den Ausdruck der wahren Länge, statt des zuerst darin befindlichen osculirenden Werthes der mittleren Bewegung eintritt; ein Umstand, welcher zufolge des Art. 53 stets statt finden muss, wenn die richtigen Grundsätze befolgt werden, da man ohne die Anwendung des wahren Werthes der mittleren Bewegung in dem Ausdruck der Länge für die Zeit $t$, nie auf die Dauer die wahren Oerter des gestörten Planeten erhalten kann.

Die Verbesserung des, wie eben erklärt, erhaltenen, bis auf Grössen von der Ordnung der Quadrate der störenden Kräfte genauen, wahren Werthes der mittleren Bewegung kann im Allgemeinen nach der Berechnung der überhaupt von den Quadraten dieser Kräfte abhängenden Glieder vorgenommen werden, so wie hier der von der ersten Potenz dieser Kräfte abhängige Unterschied zwischen dem osculirenden und dem wahren Werthe der mittleren Bewegung nach der Berechnung der bezüglichen Störungscoefficienten ermittelt wurde. Allein ein Theil

dieser Verbesserung kann sogleich vorgenommen werden, und es ist jedenfalls in den Fällen, wo er nicht unbeträchtlich werden sollte, dienlich, diesen sogleich zu berechnen.

In die Divisoren muss schliesslich der wahre Werth $(n)$ der mittleren Bewegung statt des osculirenden Werthes $n_0$, und in die Argumente $c$ statt $c_0$ substituirt werden, denn wenn man nicht die wahren Werthe der Argumente und der Bewegungen derselben substituirt, so kann man nie auf die Dauer die wahren Oerter des Planeten bekommen, und wenn sehr kleine Divisoren und grosse Coefficienten vorkommen, und zugleich die Unterschiede $(n) - n_0$ und $c - c_0$ nicht ganz klein sind, so kann hieraus eine erhebliche Verbesserung von $(n)$ und den Constanten entstehen. Diese kann man sogleich berechnen, indem man mit dem eben gefundenen Werthe von $(n)$ die Coefficienten, mit den entsprechenden Werthen von $c$ und $\mu$ die Argumente verbessert, und hierauf neue Werthe der Constanten und $(n)$ berechnet, mit welchen man auch, wo nöthig, diese Verbesserung nochmals vornehmen kann. Man kann auf diese Art unter Umständen sich den wahren Werthen dieser Grössen schon sehr näheren.

Die Unterschiede zwischen den osculirenden Werthen der mittleren Bewegung und dem wahren Werthe derselben sind im Allgemeinen kleine Grössen, allein sie können demungeachtet auf die Störungscoefficienten, und namentlich auf diejenigen derselben, welche kleine Divisoren enthalten, sehr merkliche Wirkung äussern, und es muss daher in jedem Falle der statt findende Unterschied mit Sorgfalt ermittelt werden, wenn gleich sich auch Fälle denken lassen, wo derselbe nur kleine Wirkungen hervorbringt. Namentlich sind die Störungscoefficienten, die mit dem Quadrat des kleinsten der vorhandenen Divisoren behaftet sind, der Wirkung des in Rede stehenden Unterschiedes am Meisten ausgesetzt.

Ich mache schliesslich noch darauf aufmerksam, dass die hier abgeleiteten Folgerungen voraussetzen, dass der bei der Berechnung der Störungen angewandte osculirende Werth der mittleren Bewegung in der That das ist, was er bedeutet. Sollte dieser Werth mit einem merklichen Fehler behaftet sein, so können anderweitige und manchmal grössere Verbesserungen daraus die Folge werden; ich werde später auf diesen Umstand zurück kommen.

### 56.

Die Formeln, wodurch in der Regel die Verbesserung der Störungscoefficienten, die aus dem Unterschiede zwischen dem der Rechnung zu Grunde gelegten osculirenden Werthe der mittleren Bewegung und dem wahren Werthe derselben entspringt, ausgeführt werden kann, können wie folgt abgeleitet werden. Stellen wir überhaupt irgend eine der im Vorhergehenden vorkommenden, nach $\varepsilon$ zu integrirenden Functionen unter folgender Form dar,

$$F = \gamma_c \cos\{(i - i'\mu)\,\varepsilon + A\} + \gamma_s \sin\{(i - i'\mu)\,\varepsilon + A\}$$

wo $A$ für $-i'(c' - \mu c)$ geschrieben ist, so wird

$$\int F d\varepsilon = \frac{\gamma_c}{i - i'\mu} \sin\left\{(i - i'\mu)\,\varepsilon + A\right\} - \frac{\gamma_s}{i - i'\mu} \cos\left\{(i - i'\mu)\,\varepsilon + A\right\}$$

Für die Entwickelung der Verbesserung, die dieses Integral aus dem angeführten Grunde bedarf, müssen wir erwägen, dass der strenge Ausdruck (41) (I) für $dW_0$ mit $n_0$, welches in $h_0$ enthalten ist, multiplicirt ist, und dass die Variation der im Factor $h$ des strengen Ausdrucks (45) (I) für $dR_0$ enthaltenen Grösse $n$ schon im Gliede $C''\delta\frac{h}{h_0}$ des Ausdrucks (83) (I) mit berücksichtigt ist, wir müssen daher das vorstehende Integral wie folgt schreiben,

$$\int F d\varepsilon = \frac{n_0 \gamma_c}{in - i'n'} \sin\left\{(i - i'\mu)\,\varepsilon + A\right\} - \frac{n_0 \gamma_s}{in - i'n'} \cos\left\{(i - i'\mu)\,\varepsilon + A\right\}$$

Nehmen wir hievon die Variation in Bezug auf $n$, so wird

$$\Delta \int F d\varepsilon = f(i, i') \int F d\varepsilon$$

wenn man

$$f(i, i') = -\frac{i}{i - i'\mu} \, \frac{(n) - n_0}{n_0}$$

setzt, wo $n_0$ wieder der osculirende, und $(n)$ der wahre Werth der mittleren Bewegung ist. Wendet man diesen Ausdruck auf die im vor. §. vorkommenden Integrale an, so findet sich leicht,

$$\Delta P(i, i') = \left(\frac{F(i, i')}{i - i'\mu}\right) f(i, i') + \left(\frac{G(i+1, i')}{i+1-i'\mu}\right) f(i+1, i') + \left(\frac{H(i-1, i')}{i-1-i'\mu}\right) f(i-1, i')$$

$$\Delta Q(i, i') = \left(\frac{G(i+1, i')}{i+1-i'\mu}\right) f(i+1, i') - \left(\frac{H(i-1, i')}{i-1-i'\mu}\right) f(i-1, i')$$

$$\Delta R(i, i') = R(i, i')\, f(i, i') + \frac{\Delta P(i, i') - \frac{1}{2}\Delta P(i+1, i') - \frac{1}{2}\Delta P(i-1, i')}{i - i'\mu}$$

$$\Delta S(i, i') = S(i, i')\, f(i, i') + \frac{\Delta Q(i, i')}{i - i'\mu}$$

$$\Delta Y(i, i') = \left(\frac{T(i, i')}{i - i'\mu}\right) f(i, i') + \left(\frac{U(i+1, i')}{i+1-i'\mu}\right) f(i+1, i') + \left(\frac{V(i-1, i')}{i-1-i'\mu}\right) f(i-1, i')$$

$$\Delta W(i, i') = -\left(\frac{U(i+1, i')}{i+1-i'\mu}\right) f(i+1, i') + \left(\frac{V(i-1, i')}{i-1-i'\mu}\right) f(i-1, i')$$

wo ich die Indices $c$ und $s$ weggelassen habe, weil die Formeln unverändert für beide gelten. Ich bemerke noch dass die Quotienten, womit die $f$Functionen multiplicirt sind, durch die vorhergehenden Rechnungen gegeben sind. Hat man nun die vorstehenden Grössen berechnet, so wird

$$\begin{aligned}
\varDelta n\delta z &= \Sigma\varDelta R(i,i',c)\sin\{(i-i'\mu)\varepsilon+A\}-\Sigma\varDelta R(i,i',s)\cos\{(i-i'\mu)\varepsilon+A\}\\
2\varDelta\nu &= \Sigma\varDelta S(i,i',c)\cos\{(i-i'\mu)\varepsilon+A\}+\Sigma\varDelta S(i,i',s)\sin\{(i-i'\mu)\varepsilon+A\}\\
\frac{\varDelta u}{\cos i} &= \Sigma Y(i,i',s)\sin\{(i-i'\mu)\varepsilon+A\}+\Sigma Y(i,i',c)\cos\{(i-i'\mu)\varepsilon+A\}\\
\varDelta\frac{d\delta z}{dt} &= \Sigma P(i,i',c)\cos\{(i-i'\mu)\varepsilon+A\}+\Sigma P(i,i',s)\sin\{(i-i'\mu)\varepsilon+A\}\\
2\varDelta\frac{d\nu}{d\varepsilon} &= -\Sigma Q(i,i',c)\sin\{(i-i'\mu)\varepsilon+A\}+\Sigma Q(i,i',s)\cos\{(i-i'\mu)\varepsilon+A\}\\
\varDelta\frac{du}{\cos i\,d\varepsilon} &= \Sigma W(i,i',s)\cos\{(i-i'\mu)\varepsilon+A\}-\Sigma W(i,i',c)\sin\{(i-i'\mu)\varepsilon+A\}
\end{aligned}$$

Wenn $(n)-n_0$ sehr merklich ist, so kann es sich ereignen, dass die vorstehenden Ausdrücke für die Glieder, die den kleinsten Divisor enthalten, nicht ausreichen, in diesem Falle verfährt man am Besten, wenn man mit $(n)$ den betreffenden Divisor von Neuem berechnet, und damit die Divisionen, welche die Integrale erfordern, von Neuem ausführt.

## §. 6. Anwendung der Entwickelungen der §§. 4 und 5 auf die vom Jupiter, Saturn und Mars bewirkten Störungen der Egeria.

57.

Vor Allem sind nach den Formeln (13) und (26) die mit $A$, $C$ und $N$ bezeichneten Coefficienten zu berechnen, die blos von der Excentricität des gestörten Planeten abhängen, und daher mit dem störenden Planeten sich nicht ändern. Dass die mit $B$, $D$ und $M$ bezeichneten Coefficienten nicht gebraucht werden, habe ich schon oben angeführt. Mit der mehrmals angeführten Excentricität der Egeriabahn fand sich

$$\begin{aligned}
\log A_{-1} &= 7.55965\\
\log A_0 &= 9.108001n\\
\log A_1 &= 0.303387\\
\log A_2 &= 8.63088n\\
\log C_{-1} &= 7.55965\\
\log C_0 &= 8.63088n\\
\log C_1 &= 0.001573n\\
\log C_2 &= 8.63088
\end{aligned}$$

$$\log N_{-1} = 7.2554$$
$$\log N_0 = 8.803831n$$
$$\log N_1 = 9.700531$$
$$\log N_2 = 8.32676n$$

Hiemit ergaben sich zuerst die $G(i,i',c)$, $H(i,i',c)$, $G(i,i',s)$, $H(i,i',s)$ durch (15) und die $F(i,i',c)$ und $F(i,i',s)$ durch (17), die ich für Jupiter und Saturn alle einzeln anführen will.

Jupiter.

| | c | s |
|---|---|---|
| ½F(0,0) | | −0″03351 |
| G(1,0) | −26″0998 | +0.06702 |
| | | +0.03351 |
| F(1,0) | +1.364 | +0.362 |
| G(2,0) | +1.611 | +0.378 |
| H(0,0) | −2.49209 | −0.78967 |
| | +0.483 | −0.050 |
| F(2,0) | +5.934 | +2.198 |
| G(3,0) | −0.967 | −0.381 |
| H(1,0) | −7.005 | −2.579 |
| | −2.038 | −0.762 |
| 3,0 | −0.339 | −0.522 |
| | −0.031 | +0.042 |
| | +0.505 | +0.661 |
| | +0.135 | +0.181 |
| 4,0 | −0.155 | −0.096 |
| | +0.028 | +0.023 |
| | +0.180 | +0.105 |
| | +0.053 | +0.032 |
| −3,−1 | −0.104 | −0.138 |
| | +0.117 | +0.174 |
| | +0.025 | +0.014 |
| | +0.038 | +0.050 |
| −2,−1 | −0.830 | −0.129 |
| | +1.141 | +0.267 |
| | −0.054 | −0.125 |
| | +0.257 | +0.013 |
| −1,−1 | +1.201 | +1.697 |
| | −2.292 | −3.244 |
| | +0.575 | +0.897 |
| | −0.516 | −0.650 |
| 0,−1 | −0.417 | −1.090 |
| | −2.140 | −0.647 |
| | +2.945 | +2.735 |
| | +0.388 | +0.998 |

| | c | s |
|---|---|---|
| 1,−1 | +3″901 | +11″023 |
| | +1.344 | +4.545 |
| | −6.536 | −19.193 |
| | −1.291 | −3.625 |
| 2,−1 | −1.870 | +1.197 |
| | +0.653 | −0.841 |
| | +1.810 | −1.060 |
| | +0.593 | −0.704 |
| 3,−1 | +0.272 | −5.604 |
| | −0.063 | +1.253 |
| | −0.324 | +6.253 |
| | −0.115 | +1.902 |
| 4,−1 | −0.195 | +0.219 |
| | +0.030 | +0.014 |
| | +0.230 | −0.335 |
| | +0.065 | −0.102 |
| 5,−1 | −0.053 | +0.155 |
| | +0.013 | −0.035 |
| | +0.057 | −0.173 |
| | +0.017 | −0.053 |
| −3,−2 | −0.016 | −0.055 |
| | +0.020 | +0.074 |
| | +0.001 | 0.000 |
| | +0.005 | +0.019 |
| −2,−2 | −0.121 | +0.085 |
| | +0.173 | −0.098 |
| | −0.010 | −0.032 |
| | +0.042 | −0.045 |
| −1,−2 | +0.022 | +0.504 |
| | +0.029 | −1.150 |
| | −0.089 | +0.520 |
| | −0.038 | −0.126 |

| | c | s |
|---|---|---|
| 0,−2 | +0″947 | −0″865 |
| | −2.568 | +2.952 |
| | +0.904 | −1.365 |
| | −0.747 | +0.722 |
| 1,−2 | −13.957 | +11.694 |
| | +5.746 | −3.338 |
| | +15.551 | −14.187 |
| | +7.340 | −5.831 |
| 2,−2 | +89.825 | −63.473 |
| | −27.362 | +19.358 |
| | −92.475 | +65.392 |
| | −30.012 | +21.277 |
| 3,−2 | +4.363 | +0.120 |
| | −1.907 | +0.206 |
| | −3.259 | −0.880 |
| | −0.803 | −0.554 |
| 4,−2 | −3.957 | +1.096 |
| | +0.987 | −0.271 |
| | +4.346 | −1.194 |
| | +1.376 | −0.369 |
| 5,−2 | +0.054 | +0.057 |
| | +0.026 | −0.018 |
| | −0.121 | −0.049 |
| | −0.041 | −0.010 |
| 6,−2 | +0.127 | +0.008 |
| | −0.029 | −0.002 |
| | −0.141 | −0.007 |
| | −0.043 | −0.001 |
| −2,−3 | −0.035 | +0.028 |
| | +0.064 | −0.038 |
| | −0.016 | −0.001 |
| | +0.013 | −0.011 |

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| −1,−3 | +0.056 | +0.072 | 3,−4 | −8.067 | −21.982 | 7,−5 | −0.874 | −0.301 |
| | −0.055 | −0.179 | | +2.346 | +7.485 | | +0.252 | +0.083 |
| | −0.045 | +0.089 | | +8.101 | +22.828 | | +0.938 | +0.328 |
| | −0.044 | −0.018 | | +2.380 | +8.331 | | +0.316 | +0.110 |
| 0,−3 | +0.080 | −0.153 | 4,−4 | −12.380 | +33.150 | 1,−6 | −0.016 | +0.026 |
| | −0.9749 | +0.4492 | | +3.976 | −10.574 | | +0.0314 | +0.0197 |
| | +0,834 | −0.179 | | +12.397 | −33.773 | | −0.002 | −0.056 |
| | −0.061 | +0.117 | | +3.993 | −11.197 | | +0.013 | −0.010 |
| 1,−3 | −2.48168 | +1.40311 | 5,−4 | −2.493 | +2.650 | 2,−6 | +0.1961 | +0.0194 |
| | +2.90258 | +0.25719 | | +0.894 | −0.973 | | +0.0281 | −0.1099 |
| | +1.29794 | −2.14054 | | +2.348 | −2.300 | | −0.2972 | +0.0542 |
| | +1.71884 | −0.48024 | | +0.749 | −0.623 | | −0.0730 | −0.0363 |
| 2,−3 | +28.966 | −0.442 | 6,−4 | +0.978 | −1.279 | 3,−6 | −0.012 | −0.939 |
| | −9.654 | −0.549 | | −0.260 | +0.352 | | −0.340 | +0.259 |
| | +30.5410 | −0.0058 | | −1.068 | +1.380 | | +0.2398 | +1.0374 |
| | −11.229 | −0.997 | | −0.350 | +0.453 | | −0.112 | +0.357 |
| 3,−3 | −51.522 | −39.586 | 7,−4 | +0.062 | −0.053 | 4,−6 | −4.041 | +1.288 |
| | +16.186 | +12.477 | | −0.023 | +0.021 | | +1.584 | −0.418 |
| | +52.745 | +40.217 | | −0.052 | +0.040 | | +4.064 | −1.436 |
| | +17.409 | +13.108 | | −0.013 | +0.008 | | +1.607 | −0.266 |
| 4,−3 | −1.896 | −4.099 | 0,−5 | −0.001 | −0.018 | 5,−6 | +8.710 | +5.869 |
| | +0.790 | +1.538 | | −0.038 | +0.034 | | −2.864 | −2.040 |
| | +1.326 | +3.641 | | +0.039 | −0.002 | | −8.853 | −6.040 |
| | +0.220 | +1.080 | | 0.000 | +0.014 | | −3.007 | −2.211 |
| 5,−3 | +1.499 | +2.156 | 1,−5 | −0.057 | +0.126 | 6,−6 | −1.987 | −8.986 |
| | −0.401 | −0.541 | | +0.114 | +0.100 | | +0.634 | +2.901 |
| | −1.619 | −2.376 | | −0.007 | −0.275 | | +2.099 | +9.092 |
| | −0.521 | −0.761 | | +0.050 | −0.049 | | +0.746 | +3.007 |
| 6,−3 | +0.037 | +0.041 | 2,−5 | +0.809 | +0.143 | 7,−6 | +0.090 | −1.691 |
| | −0.017 | −0.028 | | −0.019 | −0.524 | | −0.046 | +0.583 |
| | −0.021 | −0.011 | | −1.072 | +0.189 | | −0.091 | +1.607 |
| | −0.001 | +0.002 | | −0.282 | −0.192 | | −0.047 | +0.499 |
| −1,−4 | +0.020 | +0.019 | 3,−5 | −0.054 | −4.944 | 8,−6 | −0.002 | +0.512 |
| | −0.034 | −0.051 | | −0.661 | +1.878 | | +0.002 | −0 068 |
| | +0.003 | +0.025 | | +0.360 | +5.022 | | +0.002 | −0.632 |
| | −0.011 | −0.007 | | −0.355 | +1.956 | | +0.002 | −0.188 |
| 0,−4 | −0.015 | −0.067 | 4,−5 | −12.829 | +10.195 | 2,−7 | +0.046 | +0.006 |
| | −0.164 | +0.089 | | +4.116 | −3.277 | | +0.006 | −0.028 |
| | +0.189 | +0.028 | | +13.234 | −10.338 | | −0.069 | +0.013 |
| | +0.010 | +0.050 | | +4.821 | −3.420 | | −0.017 | −0.009 |
| 1,−4 | −0.245 | +0.402 | 5,−5 | +18.319 | +1.216 | 3,−7 | −0.015 | −0.223 |
| | +0.615 | +0.433 | | −5.899 | −0.111 | | −0.088 | +0.028 |
| | −0.148 | −0.948 | | −18.589 | −1.090 | | +0.082 | +0.279 |
| | +0.222 | −0.113 | | −6.169 | −0.285 | | −0.021 | +0.084 |
| 2,−4 | +4.554 | +1.416 | 6,−5 | +2.379 | +0.999 | 4,−7 | −0.904 | +0.203 |
| | −1.508 | −1.750 | | −0.846 | −0.352 | | +0.340 | +0.142 |
| | −4.810 | −0.796 | | −2.186 | −0.978 | | +0.921 | −0.339 |
| | −1.764 | −1.130 | | −0.653 | −0.331 | | +0.357 | +0.006 |

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 5, —7 | +1″.832 | +2″.621 | 7, —8 | —3″.712 | +0″.039 | 9, —9 | +0″.543 | —0″.830 |
| | —0.497 | —1.031 | | +1.252 | +0.006 | | —0.178 | +0.264 |
| | —1.903 | —2.642 | | +3.757 | —0.030 | | —0.535 | +0.853 |
| | —0.568 | —1.052 | | +1.297 | +0.015 | | —0.170 | +0.287 |
| 6, —7 | +1.813 | —6.089 | 8, —8 | +1.435 | +1.564 | 10, —9 | +0.206 | —0.292 |
| | —0.652 | +2.030 | | —0.452 | —0.508 | | —0.071 | +0.095 |
| | —1.863 | +6.180 | | —1.486 | —1.563 | | —0.199 | +0.268 |
| | —0.702 | +2.121 | | —0.503 | —0.507 | | —0.064 | +0.089 |
| 7, —7 | —3.950 | +2.110 | 9, —8 | +0.438 | +0.518 | 4, —10 | —0.014 | +0.007 |
| | +1.280 | —0.675 | | —0.172 | —0.182 | | +0.003 | +0.004 |
| | +3.979 | —2.188 | | —0.401 | —0.496 | | —0.016 | —0.011 |
| | +1.309 | —0.753 | | —0.135 | —0.160 | | +0.005 | 0.000 |
| 8, —7 | —0.949 | +0.302 | 10, —8 | —0.076 | —0.107 | 5, —10 | +0.025 | +0.051 |
| | +0.311 | —0.103 | | +0.021 | +0.031 | | +0.008 | —0.017 |
| | +0.927 | —0.282 | | +0.084 | +0.116 | | —0.037 | —0.054 |
| | +0.289 | —0.083 | | +0.029 | +0.040 | | —0.004 | —0.017 |
| 9, —7 | +0.259 | —0.092 | 3, —9 | —0.007 | —0.014 | 6, —10 | +0.131 | —0.097 |
| | —0.075 | +0.030 | | —0.003 | +0.002 | | —0.055 | 0.000 |
| | —0.279 | +0.095 | | +0.010 | +0.017 | | —0.131 | +0.122 |
| | —0.095 | +0.033 | | 0.000 | +0.005 | | —0.055 | +0.025 |
| 2, —8 | +0.011 | 0.000 | 4, —9 | —0.055 | +0.025 | 7, —10 | —0.368 | —0.269 |
| | +0.002 | —0.008 | | +0.014 | +0.006 | | +0.094 | +0.125 |
| | —0.017 | +0.007 | | —0.063 | —0.035 | | +0.395 | +0.260 |
| | —0.004 | —0.001 | | +0.022 | —0.004 | | +0.121 | +0.116 |
| 3, —8 | —0.008 | —0.053 | 5, —9 | +0.112 | +0.104 | 8, —10 | —0.102 | +0.952 |
| | —0.019 | +0.007 | | —0.001 | —0.008 | | +0.067 | —0.320 |
| | +0.023 | +0.066 | | —0.141 | —0.135 | | +0.093 | —0.970 |
| | —0.004 | +0.020 | | —0.028 | —0.039 | | +0.058 | —0.338 |
| 4, —8 | —0.208 | +0.061 | 6, —9 | +0.287 | +0.026 | 9, —10 | +0.939 | —0.618 |
| | +0.056 | +0.049 | | —0.092 | —0.208 | | —0.315 | +0.202 |
| | +0.234 | —0.111 | | —0.331 | +0.159 | | —0.952 | +0.625 |
| | +0.082 | —0.001 | | —0.136 | —0.024 | | —0.329 | +0.209 |
| 5, —8 | +0.338 | +0.697 | 7, —9 | —1.427 | —0.528 | 10, —10 | —0.446 | —0.159 |
| | +0.010 | —0.291 | | +0.491 | +0.215 | | +0.150 | +0.052 |
| | —0.421 | —0.691 | | +1.431 | +0.551 | | +0.454 | +0.153 |
| | —0.073 | —0.285 | | +0.495 | +0.238 | | +0.158 | +0.046 |
| 6, —8 | +1.438 | —1.781 | 8, —9 | +0.603 | +1.978 | | | |
| | —0.587 | +0.567 | | —0.203 | —0.669 | | | |
| | —1.437 | +1.814 | | —0.599 | —1.999 | | | |
| | —0.586 | +0.600 | | —0.199 | —0.690 | | | |

## Saturn.

| | c | s | | c | s | | c | s |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | −1, −2 | −0".004 | −0".003 | 4, −3 | −0".014 | −0".039 |
| ½F(0,0) | | −0".00044 | | +0.007 | +0.005 | | +0.005 | +0.005 |
| G(1,0) | −1".1002 | +0.00087 | | −0.001 | −0.004 | | +0.012 | +0.062 |
| | | +0.00043 | | +0.002 | −0.002 | | +0.003 | +0.028 |
| F(1,0) | +0.051 | +0.005 | 0, −2 | −0.017 | +0.031 | 1, −4 | +0.011 | −0.016 |
| G(2,0) | +0.058 | +0.005 | | +0.038 | −0.102 | | −0.003 | 0.000 |
| H(0,0) | −0.08874 | −0.01024 | | −0.006 | +0.043 | | −0.013 | +0.021 |
| | +0.020 | 0.000 | | +0.015 | −0.028 | | −0.005 | +0.005 |
| F(2,0) | +0.215 | +0.042 | 1, −2 | +0.327 | −0.583 | 2, −4 | −0.071 | +0.013 |
| G(3,0) | −0.063 | −0.013 | | −0.171 | +0.271 | | +0.017 | −0.007 |
| H(1,0) | −0.225 | −0.043 | | −0.340 | +0.635 | | +0.075 | −0.002 |
| | −0.073 | −0.014 | | −0.184 | +0.323 | | +0.021 | +0.004 |
| 3, 0 | 0.000 | −0.004 | 2, −2 | −2.633 | +4.377 | 3, −4 | −0.089 | +0.326 |
| | −0.001 | +0.002 | | +0.860 | −1.428 | | +0.029 | −0.099 |
| | +0.003 | +0.003 | | +2.658 | −4.422 | | +0.094 | −0.323 |
| | +0.002 | +0.001 | | +0.885 | −1.473 | | +0.034 | −0.096 |
| −2, −1 | −0.015 | +0.001 | 3, −2 | +0.026 | −0.110 | 4, −4 | +0.238 | +0.452 |
| | +0.014 | +0.001 | | +0.004 | +0.014 | | −0.078 | −0.150 |
| | +0.005 | −0.002 | | −0.063 | +0.172 | | −0.240 | −0.450 |
| | +0.004 | 0.000 | | −0.033 | +0.076 | | −0.080 | −0.148 |
| −1, −1 | −0.037 | +0.028 | 4, −2 | +0.030 | −0.033 | 1, −5 | +0.001 | −0.002 |
| | +0.0627 | −0.0471 | | −0.010 | +0.011 | | −0.001 | 0.000 |
| | −0.015 | +0.010 | | −0.030 | +0.032 | | −0.001 | +0.002 |
| | +0.011 | −0.009 | | −0.010 | +0.010 | | −0.001 | 0.000 |
| 0, −1 | +0.0222 | −0.0141 | 0, −3 | −0.004 | +0.008 | 2, −5 | −0.008 | −0.005 |
| | −0.0803 | −0.0044 | | +0.010 | −0.015 | | +0.001 | 0.000 |
| | +0.0367 | +0.0320 | | −0.003 | +0.001 | | +0.008 | +0.007 |
| | −0.0214 | +0.0135 | | +0.003 | −0.006 | | +0.001 | +0.002 |
| 1, −1 | −0.259 | +0.161 | 1, −3 | +0.064 | −0.120 | 3, −5 | −0.031 | +0.033 |
| | −0.082 | +0.043 | | −0.036 | +0.019 | | +0.009 | −0.009 |
| | +0.4308 | −0.2611 | | −0.063 | +0.154 | | +0.032 | −0.031 |
| | +0.090 | −0.057 | | −0.035 | +0.053 | | +0.010 | −0.007 |
| 2, −1 | +0.107 | −0.128 | 2, −3 | −0.506 | +0.478 | 4, −5 | +0.037 | +0.133 |
| | −0.022 | +0.036 | | +0.162 | −0.125 | | −0.010 | −0.043 |
| | −0.116 | +0.132 | | +0.512 | −0.464 | | −0.036 | −0.131 |
| | −0.031 | +0.040 | | +0.168 | −0.111 | | −0.009 | −0.041 |
| 3, −1 | +0.101 | −0.033 | 3, −3 | −0.044 | +1.674 | 5, −5 | +0.128 | +0.082 |
| | −0.032 | +0.011 | | +0.017 | −0.554 | | −0.043 | −0.028 |
| | −0.102 | +0.032 | | +0.037 | −1.676 | | −0.126 | −0.080 |
| | −0.033 | +0.010 | | +0.010 | −0.556 | | −0.041 | −0.026 |

Im Anfang dieser beiden Tafeln habe ich die Bezeichnung der numerischen Grössen, die sie enthalten, in der ersten Columne angeführt, nachher habe ich mich begnügt, blos die Indices der $F$ Coefficienten anzugeben, die der darunter stehenden $G$ und $H$ Coefficienten folgen daraus von selbst. Jede vierte Zeile enthält die Summe der drei darüber stehenden, und giebt also die Coefficienten der im Vorhergehenden mit $\overline{T}$ bezeichneten Grösse, das ist die Coefficienten der Entwickelung von $\frac{r}{\cos\varphi}\left(\frac{d\Omega}{df}\right)$. Diese dienen zur Controle der folgenden Rechnungen, und werden auch bei der Berechnung der vom Quadrat der störenden Kraft abhängigen Glieder gebraucht.

Durch Anwendung der Formeln (28) und (31) ergaben sich ferner die folgenden Coefficienten, aus welchen die Breitenstörungen hervorgehen.

Jupiter.

| | s | c | | s | c | | s | c |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | 1, −1 | −0″.011 | −0″.164 | 3, −2 | −0″.116 | +0″.063 |
| ½T(0,0) | −0″.11567 | | | −2.156 | −1.198 | | −0.950 | +2.033 |
| U(1,0) | +0.11567 | +3″.328 | | +2.167 | +1.362 | | +1.066 | −2.096 |
| T(1,0) | +0.031 | −0.185 | 2, −1 | +0.136 | +0.104 | 4, −2 | +0.082 | −0.181 |
| U(2,0) | −1.394 | −7.418 | | +4.218 | +0.548 | | −0.013 | −0.032 |
| V(0,0) | +1.36263 | +7.60274 | | −4.354 | −0.652 | | −0.069 | +0.213 |
| T(2,0) | +0.125 | +0.643 | 3, −1 | −0.369 | −0.044 | 5, −2 | +0.002 | +0.004 |
| U(3,0) | +0.361 | +0.514 | | −0.196 | +0.067 | | +0.010 | −0.099 |
| V(1,0) | −0.186 | −1.157 | | +0.565 | −0.023 | | −0.012 | +0.095 |
| 3,0 | −0.035 | −0.046 | 4, −1 | +0.019 | −0.008 | −1, −3 | +0.023 | +0.002 |
| | +0.107 | +0.195 | | −0.153 | +0.033 | | +0.019 | −0.102 |
| | −0.072 | −0.149 | | +0.134 | −0.025 | | −0.042 | +0.100 |
| 4,0 | −0.009 | −0.017 | −2, −2 | +0.014 | −0.018 | 0, −3 | −0.044 | +0.184 |
| | −0.033 | −0.016 | | −0.107 | +0.004 | | +0.2973 | −0.1593 |
| | +0.042 | +0.033 | | +0.093 | +0.014 | | −0.253 | −0.025 |
| −3, −1 | −0.018 | −0.014 | −1, −2 | +0.148 | −0.050 | 1, −3 | −0.1743 | −0.3460 |
| | +0.029 | +0.076 | | +0.015 | −0.139 | | −0.3267 | +2.4159 |
| | −0.011 | −0.062 | | −0.163 | +0.189 | | +0.5010 | −2.0699 |
| −2, −1 | −0.045 | −0.093 | 0, −2 | −0.489 | +0.457 | 2, −3 | +0.050 | −0.093 |
| | −0.165 | −0.060 | | +2.146 | −1.053 | | −1.803 | −4.147 |
| | +0.210 | +0.153 | | −1.657 | +0.596 | | +1.7533 | +4.2398 |
| −1, −1 | +0.385 | +0.224 | 1, −2 | −0.028 | −0.016 | 3, −3 | +0.080 | +0.279 |
| | −0.893 | −1.236 | | −5.778 | +5.261 | | +0.178 | +1.036 |
| | +0.508 | +1.012 | | +5.806 | −5.245 | | −0.258 | −4.315 |
| 0, −1 | −0.109 | −0.011 | 2, −2 | +0.395 | −0.267 | 4, −3 | −0.010 | −0.084 |
| | +4.492 | +2.579 | | +1.426 | −0.974 | | −0.841 | −0.766 |
| | −4.383 | −2.568 | | −1.821 | +1.211 | | +0.851 | +0.850 |

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 5,−3 | +0".077 | +0".068 | 3,−5 | −0".002 | +0".115 | 3,−7 | +0".013 | +0".015 |
| | −0.020 | −0.024 | | +0.895 | −0.793 | | +0.031 | −0.068 |
| | −0.057 | −0.044 | | −0.893 | +0.678 | | −0.044 | +0.053 |
| 6,−3 | +0.001 | +0.002 | 4,−5 | −0.055 | +0.036 | 4,−7 | −0.040 | +0.006 |
| | +0.055 | +0.023 | | −0.348 | +1.263 | | +0.174 | +0.165 |
| | −0.056 | −0.025 | | +0.403 | −1.299 | | −0.134 | −0.176 |
| 0,−4 | −0.005 | +0.032 | 5,−5 | +0.035 | −0.082 | 5,−7 | +0.010 | −0.031 |
| | +0.096 | +0.014 | | +0.197 | −0.280 | | −0.444 | +0.027 |
| | −0.091 | −0.046 | | −0.232 | +0.362 | | +0.434 | +0.004 |
| 1,−4 | −0.123 | −0.078 | 6,−5 | −0.017 | +0.024 | 6,−7 | +0.028 | +0.001 |
| | +0.056 | +0.432 | | +0.069 | +0.261 | | +0.280 | −0.198 |
| | +0.067 | −0.354 | | −0.052 | −0.285 | | −0.308 | +0.197 |
| 2,−4 | +0.210 | −0.047 | 1,−6 | −0.006 | −0.005 | 7,−7 | −0.021 | +0.012 |
| | −1.574 | −0.857 | | −0.006 | +0.028 | | −0.094 | +0.024 |
| | +1.364 | +0.904 | | +0.012 | −0.023 | | +0.115 | −0.036 |
| 3,−4 | +0.069 | +0.060 | 2,−6 | +0.014 | −0.022 | 8,−7 | +0.009 | −0.003 |
| | +2.469 | −0.481 | | −0.082 | −0.022 | | +0.014 | −0.061 |
| | −2.538 | +0.421 | | +0.068 | +0.044 | | −0.023 | +0.064 |
| 4,−4 | −0.164 | −0.007 | 3,−6 | +0.026 | +0.059 | 3,−8 | +0.004 | +0.004 |
| | −0.595 | −0.139 | | +0.141 | −0.294 | | +0.011 | −0.017 |
| | +0.759 | +0.146 | | −0.167 | +0.235 | | −0.015 | +0.013 |
| 5,−4 | +0.049 | +0.042 | 4,−6 | −0.059 | −0.011 | 4,−8 | −0.012 | +0.008 |
| | +0.481 | −0.287 | | +0.286 | +0.690 | | +0.048 | +0.034 |
| | −0.530 | +0.275 | | −0.227 | −0.679 | | −0.036 | −0.042 |
| 6,−4 | −0.043 | +0.026 | 5,−6 | −0.013 | −0.041 | 5,−8 | +0.003 | −0.023 |
| | +0.030 | −0.049 | | −0.553 | −0.389 | | −0.144 | +0.080 |
| | +0.013 | −0.007 | | +0.566 | +0.430 | | +0.141 | −0.057 |
| 0,−5 | −0.004 | +0.008 | 6,−6 | +0.035 | +0.032 | 6,−8 | +0.015 | +0.008 |
| | +0.029 | 0.000 | | +0.104 | +0.154 | | +0.069 | −0.247 |
| | +0.025 | −0.008 | | −0.139 | −0.186 | | −0.084 | +0.239 |
| 1,−5 | −0.029 | −0.011 | 7,−6 | −0.009 | −0.013 | 7,−8 | −0.005 | +0.016 |
| | −0.017 | +0.094 | | −0.127 | −0.002 | | +0.045 | +0.166 |
| | +0.046 | −0.083 | | +0.136 | +0.015 | | −0.040 | −0.182 |
| 2,−5 | +0.077 | −0.066 | 2,−7 | +0.004 | −0.005 | 8,−8 | −0.002 | −0.0[illegible]3 |
| | −0.402 | −0.062 | | −0.023 | −0.009 | | +0.006 | −0.0[illegible]4 |
| | +0.325 | +0.128 | | +0.019 | +0.014 | | −0.004 | +0.062 |

## Saturn.

| | s | c | | s | c | | s | c |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | 3,0 | 0".000 | −0".001 | 0,−1 | −0".001 | −0".001 |
| T(0,0) | −0".00216 | | | 0.000 | +0.002 | | +0.057 | −0.075 |
| C(1,0) | +0.00216 | +0".083 | | 0.000 | −0.001 | | −0.056 | +0.076 |
| T(1,0) | +0.001 | −0.005 | −2,−1 | 0.000 | −0.001 | 1,−1 | −0.002 | 0.000 |
| C(2,0) | −0.026 | −0.259 | | −0.003 | +0.005 | | −0.025 | +0.011 |
| V(0,0) | +0.02537 | +0.26379 | | +0.003 | −0.004 | | +0.027 | −0.011 |
| T(2,0) | +0.002 | +0.023 | −1,−1 | +0.005 | −0.007 | 2,−1 | +0.001 | +0.002 |
| C(3,0) | +0.003 | +0.008 | | −0.011 | −0.006 | | +0.035 | −0.075 |
| V(1,0) | −0.005 | −0.031 | | +0.006 | +0.013 | | −0.036 | +0.073 |

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| −1, −2 | −0″,002 | 0″,000 | 2, −2 | −0″,018 | +0″,009 | 1, −3 | +0″,008 | +0″,001 |
| | −0.004 | +0.001 | | −0.017 | −0.004 | | +0.021 | −0.025 |
| | +0.006 | −0.001 | | +0.035 | −0.005 | | −0.029 | +0.024 |
| 0, −2 | +0.021 | −0.010 | 3, −2 | +0.001 | +0.001 | 2, −3 | −0.003 | +0.001 |
| | −0.046 | +0.013 | | +0.020 | −0.015 | | +0.084 | +0.007 |
| | +0.025 | −0.003 | | −0.021 | +0.014 | | −0.081 | −0.008 |
| 1, −2 | +0.001 | −0.001 | 0, −3 | +0.003 | −0.002 | | | |
| | +0.235 | −0.114 | | −0.009 | +0.002 | | | |
| | −0.236 | +0.115 | | +0.006 | 0.000 | | | |

58.

Um weiter gehen zu können braucht man die numerischen Werthe der Divisoren $i - i'\mu$, und diese erhält man sehr leicht aus den im §. 7 (I) für den Jupiter, und in §. 1 für den Saturn angeführten numerischen Werthen der Vielfachen von $\mu$. Es wird z. B. für den Jupiter

$$-1-\mu = -1.3485\ ,\quad -1-2\mu = -1.69696\ ,\quad 0-3\mu = -1.04543$$
$$0-\mu = -0.34848,\quad 0-2\mu = -0.69696\ ,\quad 1-3\mu = -0.0454334$$
$$1-\mu = +0.65152,\quad 1-2\mu = +0.303044,\quad 2-3\mu = +0.954567$$
$$2-\mu = +1.6515\ ,\quad 2-2\mu = +1.30304\ ,\quad 3-3\mu = +1.95457$$
$$\text{etc.}\qquad\qquad \text{etc.}\qquad\qquad \text{etc.}$$

u. s. w. Hiemit ergeben sich durch die Formeln (20), so wie durch die analogen des Art. 47 die folgenden Werthe der mit $P(i,i',c)$, $P(i,i',s)$, $Q(i,i',c)$ und $Q(i,i',s)$ bezeichneten Coefficienten.

Jupiter.

| | c | s | | c | s | | c | s |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| P(0,0) | −26″,100 | | 0, −1 | −4″,272 | +0″,106 | −1, −2 | −0″,022 | +1″,161 |
| Q(0,0) | | +0″,06702 | | −1.101 | +1.036 | | −0.075 | +1.843 |
| P(1,0) | +2.170 | +0.551 | 1, −1 | +25.559 | +74.748 | 0, −2 | −10.323 | +11.785 |
| Q(1,0) | +0.806 | +0.189 | | −17.942 | −52.323 | | −7.941 | +8.936 |
| P(2,0) | −4.360 | −1.407 | 2, −1 | +1.894 | −1.249 | 1, −2 | −63.958 | +56.382 |
| Q(2,0) | +6.683 | +2.452 | | −2.532 | +1.310 | | +26.723 | −22.917 |
| 3,0 | +0.132 | +0.168 | 3, −1 | −0.110 | +2.015 | 2, −2 | −248.099 | +175.47[illegible] |
| | −0.261 | −0.320 | | +0.179 | −3.443 | | +293.272 | −207.37[illegible] |
| 4,0 | +0.027 | +0.016 | 4, −1 | +0.039 | −0.064 | 3, −2 | −1.184 | −0.561 |
| | −0.054 | −0.030 | | −0.081 | +0.130 | | +1.924 | +0.737 |
| −3, −1 | −0.025 | −0.036 | 5, −1 | +0.007 | −0.021 | 4, −2 | +0.918 | −0.249 |
| | −0.044 | −0.071 | | −0.014 | +0.042 | | −1.658 | +0.455 |
| −2, −1 | −0.477 | −0.106 | −3, −2 | −0.003 | −0.012 | 5, −2 | −0.019 | −0.005 |
| | −0.862 | −0.235 | | −0.007 | −0.027 | | +0.042 | +0.012 |
| −1, −1 | +5.442 | +7.670 | −2, −2 | −0.054 | +0.034 | 6, −2 | −0.014 | 0.000 |
| | +6.821 | +9.692 | | −0.105 | +0.050 | | +0.028 | +0.002 |

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| −2, −3 | −0″.017 | +0″.009 | 4, −5 | +6″.194 | −4″.710 | 4, −8 | +0″.956 | −0″.450 |
| | −0.035 | +0.018 | | −9.167 | +7.215 | | −1.078 | +0.544 |
| −1, −3 | +0.041 | +0.107 | 5, −5 | −3.995 | −0.207 | 5, −8 | −0.191 | −0.346 |
| | +0.038 | +0.200 | | +6.848 | +0.386 | | +0.350 | +0.519 |
| 0, −3 | +20.973 | −9.650 | 6, −5 | −0.273 | −0.132 | 6, −8 | −0.342 | +0.401 |
| | +21.866 | −9.971 | | +0.510 | +0.233 | | +0.510 | −0.685 |
| 1, −3 | +56.4216 | −28.5659 | 7, −5 | +0.094 | +0.033 | 7, −8 | +0.528 | +0.001 |
| | +4.2822 | −1.7781 | | −0.180 | −0.064 | | −0.928 | +0.010 |
| 2, −3 | +697.620 | −0.615 | 1, −6 | −0.329 | −0.214 | 8, −8 | −0.151 | −0.154 |
| | −677.153 | −0.409 | | −0.346 | −0.244 | | +0.280 | +0.290 |
| 3, −3 | +34.373 | +26.101 | 2, −6 | −1.855 | −0.385 | 9, −8 | −0.030 | −0.037 |
| | −49.778 | −37.909 | | −0.241 | −0.071 | | +0.053 | +0.070 |
| 4, −3 | +0.237 | +0.865 | 3, −6 | −2.830 | −12.314 | 10, −8 | +0.006 | +0.008 |
| | −0.479 | −1.474 | | +2.461 | +11.553 | | −0.011 | −0.015 |
| 5, −3 | −0.250 | −0.368 | 4, −6 | +2.897 | −0.945 | 3, −9 | +0.039 | +0.090 |
| | +0.467 | +0.695 | | −3.924 | +1.538 | | +0.006 | +0.017 |
| 6, −3 | −0.001 | 0.000 | 5, −6 | −2.377 | −1.668 | 4, −9 | −0.518 | +0.289 |
| | +0.002 | −0.002 | | +3.905 | +2.641 | | +0.470 | −0.254 |
| −1, −4 | +0.015 | +0.022 | 6, −6 | +0.343 | +1.418 | 5, −9 | −0.103 | −0.103 |
| | +0.025 | +0.044 | | −0.593 | −2.535 | | +0.163 | +0.153 |
| 0, −4 | +0.348 | −0.190 | 7, −6 | −0.013 | +0.165 | 6, −9 | −0.102 | +0.040 |
| | +0.495 | −0.214 | | +0.015 | −0.312 | | +0.154 | −0.139 |
| 1, −4 | +1.743 | +0.375 | 8, −6 | 0.000 | −0.052 | 7, −9 | +0.232 | +0.100 |
| | +0.909 | +0.035 | | 0.000 | +0.119 | | −0.399 | −0.149 |
| 2, −4 | +18.787 | +3.267 | 2, −7 | −0.046 | −0.073 | 8, −9 | −0.066 | −0.225 |
| | −13.150 | −3.110 | | −0.037 | −0.041 | | +0.120 | +0.403 |
| 3, −4 | +9.244 | +26.851 | 3, −7 | −0.271 | −1.014 | 9, −9 | −0.043 | +0.071 |
| | −12.466 | −34.793 | | +0.130 | +0.653 | | +0.084 | −0.137 |
| 4, −4 | +4.071 | −11.241 | 4, −7 | +1.197 | −0.419 | 10, −9 | −0.013 | +0.018 |
| | −6.615 | +18.095 | | −1.510 | +0.661 | | +0.025 | −0.037 |
| 5, −4 | +0.404 | −0.359 | 5, −7 | −0.644 | −0.959 | 4, −10 | −0.058 | +0.040 |
| | −0.707 | +0.670 | | +1.080 | +1.403 | | +0.035 | −0.020 |
| 6, −4 | −0.130 | +0.168 | 6, −7 | −0.362 | +1.150 | 5, −10 | −0.052 | −0.078 |
| | +0.250 | −0.320 | | +0.585 | −1.968 | | +0.075 | +0.098 |
| 7, −4 | −0.003 | +0.003 | 7, −7 | +0.481 | −0.273 | 6, −10 | −0.051 | +0.041 |
| | +0.008 | −0.006 | | −0.888 | +0.493 | | +0.071 | −0.080 |
| 0, −5 | +0.038 | −0.035 | 8, −7 | +0.079 | −0.024 | 7, −10 | +0.074 | +0.055 |
| | +0.065 | −0.047 | | −0.156 | +0.046 | | −0.137 | −0.076 |
| 1, −5 | +0.524 | +0.376 | 9, −7 | −0.021 | +0.007 | 8, −10 | +0.016 | −0.123 |
| | +0.439 | +0.230 | | +0.040 | −0.013 | | −0.015 | +0.218 |
| 2, −5 | +4.569 | −0.117 | 2, −8 | +0.007 | −0.042 | 9, −10 | −0.088 | +0.057 |
| | −1.459 | −0.462 | | +0.003 | −0.034 | | +0.163 | −0.107 |
| 3, −5 | +1.061 | +16.395 | 3, −8 | −0.081 | −0.328 | 10, −10 | +0.034 | +0.011 |
| | −1.690 | −18.663 | | +0.013 | +0.090 | | −0.062 | −0.021 |

Saturn.

| | c | s | | c | s | | c | s |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $P(0,0)$ | −1″.100 | | 0, −2 | +0″.119 | −0″.286 | 1, −4 | +0″.046 | −0″.075 |
| $Q(0,0)$ | | +0″.00087 | | +0.048 | −0.109 | | −0.025 | +0.038 |
| $P(1,0)$ | +0.080 | +0.008 | 1, −2 | +1.567 | −2.916 | 2, −4 | +0.127 | +0.001 |
| $Q(1,0)$ | +0.029 | +0.003 | | −1.312 | +2.421 | | −0.166 | +0.002 |
| 2, 0 | −0.138 | −0.026 | 2, −2 | +2.480 | −4.125 | 3, −4 | +0.037 | −0.120 |
| | +0.204 | +0.039 | | −3.380 | +5.622 | | −0.057 | +0.196 |
| −2, −1 | −0.007 | 0.000 | 3, −2 | −0.026 | +0.064 | 4, −4 | −0.047 | −0.088 |
| | −0.010 | −0.002 | | +0.038 | −0.096 | | +0.080 | +0.151 |
| −1, −1 | −0.408 | +0.306 | 4, −2 | −0.005 | +0.005 | 1, −5 | +0.003 | −0.010 |
| | −0.454 | +0.341 | | +0.009 | −0.010 | | −0.002 | +0.003 |
| 0, −1 | −0.2837 | +0.0673 | 0, −3 | +0.029 | −0.046 | 2, −5 | +0.021 | +0.020 |
| | −0.0612 | +0.0230 | | +0.015 | −0.025 | | −0.027 | −0.024 |
| 1, −1 | −3.418 | +2.073 | 1, −3 | +0.238 | −0.561 | 3, −5 | +0.014 | −0.013 |
| | +3.028 | −1.839 | | −0.173 | +0.378 | | −0.022 | +0.021 |
| 2, −1 | −0.085 | +0.098 | 2, −3 | +0.626 | −0.548 | 4, −5 | −0.007 | −0.027 |
| | +0.127 | −0.141 | | −0.821 | +0.753 | | +0.014 | +0.047 |
| 3, −1 | −0.028 | +0.008 | 3, −3 | +0.012 | −0.567 | 5, −5 | −0.016 | −0.010 |
| | +0.047 | −0.014 | | −0.019 | +0.906 | | +0.030 | +0.019 |
| −1, −2 | −0.022 | −0.014 | 4, −3 | +0.002 | +0.014 | | | |
| | −0.025 | −0.020 | | −0.004 | −0.023 | | | |

Die durch die Formeln (34) erhaltenen $W(i,i,s)$ und $W(i,i,c)$ führe ich endlich noch an.

Jupiter.

| | s | c | | s | c | | s | c |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $W(-3,-1)$ | +0″.015 | +0″.046 | 3, −3 | −0″.330 | −1″.729 | 2, −6 | +0″.028 | −0″.016 |
| $W(-2,-1)$ | −0.185 | −0.090 | 4, −3 | +0.648 | +0.629 | 3, −6 | +1.769 | −2.433 |
| −1, −1 | −2.779 | −3.978 | 5, −3 | −0.015 | −0.010 | 4, −6 | −0.347 | −0.983 |
| 0, −1 | −3.642 | −2.053 | 6, −3 | −0.023 | −0.010 | 5, −6 | +0.437 | +0.324 |
| 1, −1 | −4.913 | −3.182 | 0, −4 | +0.282 | +0.055 | 6, −6 | −0.069 | −0.095 |
| 2, −1 | −8.274 | −1.208 | 1, −4 | −0.140 | −0.459 | 7, −6 | +0.057 | +0.004 |
| 3, −1 | +0.396 | −0.032 | 2, −4 | −2.482 | −1.761 | 2, −7 | +0.028 | +0.006 |
| 4, −1 | +0.083 | −0.016 | 3, −4 | −5.135 | +0.270 | 3, −7 | +0.080 | −0.077 |
| −2, −2 | −0.088 | −0.002 | 4, −4 | +0.638 | +0.130 | 4, −7 | −0.307 | −0.370 |
| −1, −2 | +0.082 | −0.270 | 5, −4 | −0.307 | +0.168 | 5, −7 | +0.403 | −0.005 |
| 0, −2 | −6.105 | +3.124 | 6, −4 | −0.001 | +0.001 | 6, −7 | −0.183 | +0.121 |
| 1, −2 | −3.898 | +3.490 | 0, −5 | +0.048 | +0.003 | 7, −7 | +0.049 | −0.014 |
| 2, −2 | −6.628 | +4.518 | 1, −5 | +0.040 | −0.317 | 8, −7 | −0.007 | +0.023 |
| 3, −2 | +1.106 | −2.223 | 2, −5 | −0.119 | −0.123 | 3, −8 | +0.010 | −0.003 |
| 4, −2 | −0.027 | +0.100 | 3, −5 | −3.862 | +2.982 | 4, −8 | −0.192 | −0.213 |
| 5, −2 | −0.006 | +0.048 | 4, −5 | +0.427 | −1.421 | 5, −8 | +0.161 | −0.072 |
| −1, −3 | +0.032 | −0.131 | 5, −5 | −0.149 | +0.226 | 6, −8 | −0.054 | +0.167 |
| 0, −3 | +6.667 | −3.494 | 6, −5 | −0.029 | −0.138 | 7, −8 | −0.021 | −0.089 |
| 1, −3 | −0.137 | −0.551 | 1, −6 | −0.072 | +0.319 | 8, −8 | −0.002 | +0.023 |
| 2, −3 | −37.667 | −91.498 | | | | | | |

Saturn.

| | s | c | | s | c | | s | c |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| W(-2, -1) | −0″004 | +0″005 | −1, −2 | −0″017 | +0″004 | 0, −3 | +0″012 | −0″003 |
| W(-1, -1) | −0.081 | −0.049 | 0, −2 | +0.044 | −0.016 | 1, −3 | +0.056 | −0.041 |
| 0, −1 | −0.016 | +0.020 | 1, −2 | +0.704 | −0.344 | 2, −3 | −0.173 | −0.017 |
| 1, −1 | −0.179 | +0.072 | 2, −2 | +0.055 | −0.006 | | | |
| 2, −1 | −0.054 | +0.111 | 3, −2 | −0.017 | +0.012 | | | |

59.

Aus den vorstehenden Zahlenwerthen ergaben sich nun die Störungen der mittleren Länge, des Logarithmus des Radius Vectors, und der auf der Bahn senkrechten Coordinate durch die Formeln (21) und (32), so wie durch die Ausdrücke der Art. 48 und 50 wie folgt, wobei die Formeln (24) und (35) als Controlen benutzt wurden.

Jupiter.

| $i, i'$ | $n\delta z$ | | $\nu$ | | $\frac{u}{\cos i}$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | sin | cos | cos | sin | sin | cos |
| 0,0 | | | | | | +3″65 |
| 0,0 | | −26″192$nt$ | +0″03351$nt$ | | | −0.11567$nt$ |
| 1,0 | +4″84 | −1.39 | −0.84 | −0″30 | −0″68 | −3.89 |
| 1,0 | −0.78683$nt$ | −2.49209$nt$ | +0.39484$nt$ | −1.24605$nt$ | −7.60274$nt$ | +1.36263$nt$ |
| 2,0 | −2.36 | +0.76 | +1.72 | +0.63 | −0.25 | −0.34 |
| 2,0 | +0.01675$nt$ | +0.05287$nt$ | | | | |
| 3,0 | +0.11 | −0.08 | −0.04 | −0.05 | −0.02 | −0.04 |
| −2,−1 | +0.30 | −0.18 | +0.18 | +0.05 | +0.08 | +0.04 |
| −1,−1 | −4.19 | +5.69 | −2.53 | −3.59 | +2.06 | +2.95 |
| 0,−1 | +16.04 | −9.73 | +1.58 | −1.48 | +10.46 | +5.90 |
| 1,−1 | +39.39 | −114.80 | −13.77 | −40.16 | −7.54 | −4.88 |
| 2,−1 | +0.49 | +2.71 | −0.77 | +0.40 | −5.01 | −0.73 |
| 3,−1 | −0.07 | −0.78 | +0.03 | −0.65 | +0.15 | −0.01 |
| 4,−1 | +0.01 | +0.04 | −0.01 | +0.02 | +0.02 | 0.00 |
| −2,−2 | +0.02 | −0.01 | +0.02 | −0.01 | +0.03 | 0.00 |
| −1,−2 | −0.25 | +0.39 | +0.02 | −0.54 | −0.05 | +0.16 |
| 0,−2 | +10.92 | +13.41 | +5.70 | −6.41 | +8.55 | −4.48 |
| 1,−2 | −174.86 | −159.82 | +44.09 | −37.81 | −12.86 | +11.51 |
| 2,−2 | −188.28 | −132.88 | +112.53 | −79.57 | −5.00 | +3.47 |
| 3,−2 | +4.04 | +3.47 | +0.42 | +0.16 | +0.48 | −0.97 |
| 4,−2 | +0.29 | +0.07 | −0.25 | +0.07 | −0.01 | +0.03 |
| −1,−3 | +0.41 | +0.25 | −0.01 | −0.05 | −0.02 | +0.06 |
| 0,−3 | −17.77 | −8.08 | −10.46 | +4.77 | −6.38 | +3.34 |
| 1,−3 | −570.65 | −619.16 | −47.13 | +19.57 | +3.01 | +12.13 |
| 2,−3 | +726.83 | +0.54 | +354.69 | −0.21 | −39.46 | −95.54 |
| 3,−3 | +2.43 | −13.35 | −12.73 | −9.70 | −0.17 | −0.88 |
| 4,−3 | −0.40 | +0.08 | −0.08 | −0.25 | +0.22 | +0.21 |
| 5,−3 | −0.07 | +0.10 | +0.06 | +0.09 | | |

| 0,−4 | −0.″20 | −0.″15 | −0.″18 | +0.″08 | −0.″20 | −0.″04 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1,−4 | −2.36 | +0.62 | −1.15 | −0.04 | +0.36 | +1.17 |
| 2,−4 | +30.24 | −3.48 | −10.85 | −2.57 | −4.10 | −2.91 |
| 3,−4 | +5.15 | −16.93 | −3.88 | −10.83 | −3.20 | +0.17 |
| 4,−4 | +1.40 | +4.74 | −1.27 | +3.47 | +0.25 | +0.05 |
| 5,−4 | +0.08 | −0.03 | −0.10 | +0.09 | −0.09 | +0.05 |
| 6,−4 | −0.03 | −0.04 | +0.03 | −0.04 | | |
| 0,−5 | −0.01 | −0.03 | −0.02 | +0.01 | −0.03 | 0.00 |
| 1,−5 | −0.44 | +0.51 | −0.30 | −0.16 | −0.05 | +0.43 |
| 2,−5 | +17.48 | +3.22 | −2.83 | −0.31 | −0.46 | −0.48 |
| 3,−5 | +0.48 | −13.20 | −0.67 | −7.42 | −3.07 | +2.37 |
| 4,−5 | +2.80 | +2.39 | −2.03 | +1.60 | +0.19 | −0.63 |
| 5,−5 | −1.30 | 0.00 | +1.05 | +0.06 | −0.05 | +0.07 |
| 6,−5 | −0.03 | +0.03 | +0.06 | +0.03 | −0.01 | −0.03 |
| 1,−6 | +0.23 | −0.13 | +0.16 | +0.11 | +0.07 | −0.29 |
| 2,−6 | +18.94 | +1.61 | +1.33 | +0.39 | −0.31 | +0.18 |
| 3,−6 | −3.16 | +13.48 | +1.35 | +6.35 | +1.95 | −2.68 |
| 4,−6 | +1.63 | +0.18 | −1.03 | +0.40 | −0.18 | −0.52 |
| 5,−6 | −0.87 | +0.58 | +0.67 | +0.45 | +0.15 | +0.11 |
| 6,−6 | +0.11 | −0.38 | −0.08 | −0.32 | −0.02 | −0.03 |
| 7,−6 | −0.01 | −0.02 | 0.00 | −0.03 | +0.01 | 0.00 |
| 2,−7 | +0.08 | −0.07 | +0.04 | +0.05 | −0.06 | −0.02 |
| 3,−7 | −0.57 | +1.77 | +0.12 | +0.58 | +0.14 | −0.14 |
| 4,−7 | +0.79 | +0.22 | −0.18 | +0.21 | −0.20 | −0.24 |
| 5,−7 | −0.27 | +0.39 | +0.21 | +0.27 | +0.16 | 0.00 |
| 6,−7 | −0.10 | −0.34 | +0.08 | −0.28 | −0.05 | +0.03 |
| 7,−7 | +0.11 | −0.07 | −0.10 | +0.05 | +0.01 | 0.00 |
| 2,−8 | 0.00 | −0.04 | 0.00 | +0.02 | | |
| 3,−8 | −0.58 | +1.45 | +0.03 | +0.21 | +0.05 | −0.01 |
| 4,−8 | +0.79 | +0.35 | −0.44 | +0.22 | −0.16 | −0.18 |
| 5,−8 | −0.10 | +0.16 | +0.08 | +0.11 | +0.07 | −0.03 |
| 6,−8 | −0.11 | −0.13 | +0.08 | −0.11 | −0.02 | +0.05 |
| 7,−8 | +0.13 | 0.00 | −0.11 | 0.00 | 0.00 | −0.02 |
| 8,−8 | −0.03 | +0.03 | +0.03 | +0.03 | | |
| 3,−9 | −0.45 | +0.57 | −0.02 | −0.06 | | |
| 4,−9 | −0.61 | −0.33 | +0.27 | −0.15 | | |
| 5,−9 | −0.04 | +0.06 | +0.04 | +0.04 | | |
| 6,−9 | −0.04 | −0.01 | +0.03 | −0.02 | | |
| 7,−9 | +0.06 | −0.03 | −0.05 | −0.02 | | |
| 8,−9 | −0.02 | +0.05 | +0.01 | +0.04 | | |
| 4,−10 | −0.11 | −0.08 | +0.03 | −0.02 | | |
| 5,−10 | −0.03 | +0.05 | +0.03 | +0.03 | | |
| 6,−10 | −0.02 | −0.02 | +0.01 | −0.02 | | |
| 7,−10 | +0.02 | −0.02 | −0.02 | −0.01 | | |
| 8,−10 | 0.00 | +0.03 | 0.00 | +0.02 | | |

Saturn.

| $i, i'$ | $n\delta z$ sin | $n\delta z$ cos | $\nu$ cos | $\nu$ sin | $\frac{u}{\cos i}$ sin | $\frac{u}{\cos i}$ cos |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0,0 | | | | | | +0,"07 |
| 0,0 | | −1,"104$nt$ | +0,"00044$nt$ | | | −0.00216$nt$ |
| 1,0 | +0,"17 | −0.02 | −0.03 | 0,"00 | −0,"02 | −0.14 |
| 1,0 | −0.01019$nt$ | −0.08874$nt$ | +0.00512$nt$ | −0.04437$nt$ | −0.26379$nt$ | +0.02537$nt$ |
| 2,0 | −0.15 | +0.03 | +0.05 | +0.01 | 0.00 | 0.00 |
| 2,0 | +0.00022$nt$ | +0.00188$nt$ | | | | |
| −1,−1 | +0.35 | +0.27 | +0.20 | −0.15 | +0.07 | +0.04 |
| 0,−1 | +0.87 | −0.24 | +0.22 | −0.08 | +0.12 | −0.15 |
| 1,−1 | −3.96 | −2.40 | +1.76 | −1.07 | −0.21 | +0.08 |
| 2,−1 | +0.08 | −0.01 | +0 03 | −0.04 | −0.03 | +0 06 |
| −1,−2 | +0.02 | 0.00 | +0.01 | +0.01 | +0.01 | 0.00 |
| 0,−2 | −0.19 | −0.58 | −0.09 | +0.19 | −0.16 | +0.06 |
| 1,−2 | +2.03 | +3.80 | −0.91 | +1.68 | +0.98 | −0.48 |
| 2,−2 | +1.40 | +2.33 | −0.98 | +1.64 | +0.03 | 0.00 |
| 3,−2 | −0.05 | −0.09 | +0.01 | −0.02 | −0.01 | 0.00 |
| 0,−3 | −0.05 | −0.05 | −0.02 | +0.03 | −0.03 | +0.01 |
| 1,−3 | +0.36 | +0.93 | −0.15 | +0.33 | +0.10 | −0.07 |
| 2,−3 | +0.39 | +0.32 | −0.26 | +0.24 | −0.11 | −0.01 |
| 3,−3 | −0.01 | +0.21 | 0.00 | +0.18 | 0.00 | 0.00 |
| 1,−4 | +0.09 | +0.17 | −0.03 | +0.04 | | |
| 2,−4 | +0.09 | −0.01 | −0.06 | 0.00 | | |
| 3,−4 | +0.01 | +0.05 | −0.01 | +0.04 | | |
| 4,−4 | −0.01 | +0.02 | +0.01 | +0.02 | | |

Eben so ergaben sich die folgenden Störungen vom

Mars,

| $i, i'$ | $n\delta z$ sin | $n\delta z$ cos | $\nu$ cos | $\nu$ sin | $\frac{u}{\cos i}$ sin | $\frac{u}{\cos i}$ cos |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0,0 | | +0,"171$nt$ | +0,"00008$nt$ | | | +0,"00034$nt$ |
| 1,0 | −0,"00180$nt$ | −0.00543$nt$ | +0.00090$nt$ | −0,"00272$nt$ | +0,"00962$nt$ | −0.00410$nt$ |
| 2,0 | +0.00004$nt$ | +0.00012$nt$ | | | | |
| 0,−1 | +0.01 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | | |
| 1,−1 | −0.01 | +0.04 | −0.09 | −0.05 | | |
| 2,−1 | +0.29 | −0.13 | 0.00 | −0.06 | | |
| 3,−1 | 0.00 | −0.03 | 0.00 | −0.01 | | |
| 2,−2 | +0.01 | −0.02 | 0.00 | +0.02 | | |
| 3,−2 | +0.02 | −0.12 | +0.02 | +0.08 | | |
| 4,−2 | +0.06 | +0.33 | +0.01 | −0.07 | | |
| 5,−2 | +0.01 | +0.04 | 0.00 | +0.02 | | |

wozu noch die im §. 2 berechnete Ungleichheit langer Periode kommt.

Ich füge diesem die Coefficienten von $\delta\frac{h}{h_0}$ hinzu, die bei der Berechnung der vom Quadrat der störenden Kraft abhängigen Glieder gebraucht werden.

Jupiter.

| $\delta\frac{h}{h_0}$ | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| i, i' | cos | sin | i, i' | cos | sin |
| 0,0 | −0".03351nt | | 4,−3 | −0".07 | −0".37 |
| 1,0 | −0.48 | +0".05 | 5,−3 | +0.13 | +0.19 |
| 2,0 | +1.02 | +0.38 | 1,−4 | +0.56 | −0.29 |
| 3,0 | −0.04 | −0.06 | 2,−4 | +2.91 | +1.86 |
| −2,−1 | +0.11 | +0.01 | 3,−4 | −1.48 | −5.19 |
| −1,−1 | −0.38 | −0.48 | 4,−4 | −1.53 | +4.30 |
| 0,−1 | +1.11 | +2.86 | 5,−4 | −0.21 | +0 17 |
| 1,−1 | +1.98 | +5.56 | 6,−4 | +0.08 | −0.10 |
| 2,−1 | −0.36 | +0.43 | 1,−5 | +0.07 | −0.07 |
| 3,−1 | +0.04 | −0.72 | 2,−5 | +1.09 | +0.75 |
| −1,−2 | −0.02 | −0.07 | 3,−5 | +0.28 | −1.56 |
| 0,−2 | −1.07 | +1.04 | 4,−5 | −2.13 | +1.52 |
| 1,−2 | −24.22 | +19.24 | 5,−5 | +1.89 | +0.09 |
| 2,−2 | +23.03 | −16.33 | 6,−5 | +0.15 | +0.08 |
| 3,−2 | +0.35 | +0.24 | 2,−6 | −0.80 | −0.40 |
| 4,−2 | −0.42 | +0.11 | 3,−6 | +0.12 | −0.39 |
| 0,−3 | −0.06 | +0.11 | 4,−6 | −0.84 | +0.14 |
| 1,−3 | +37.83 | −10.57 | 5,−6 | +1.03 | +0.76 |
| 2,−3 | +11.76 | +1.05 | 6,−6 | −0.19 | −0.77 |
| 3,−3 | −8.91 | −6.71 | 7,−6 | +0.01 | −0.10 |

Saturn.

| $\delta\frac{h}{h_0}$ | | |
|---|---|---|
| i, i' | cos | sin |
| 0,0 | −0".00044nt | |
| 1,0 | −0.02 | 0".00 |
| 2,0 | +0.04 | +0.01 |

Vom Mars kommt höchstens $\delta\frac{h}{h_0} = -\ 0''.00008nt$ in Betracht, welches Glied auch so klein ist, dass ich es hätte weglassen können.

60.

Im Vorhergehenden sind die den Integralen hinzuzufügenden Constanten noch nicht angesetzt. Addiren wir die Glieder der Abtheilung für $i' = 0$, die für alle störenden Planeten gleiche Argumente haben,

und fügen die Constanten nach den Vorschriften des vor. § hinzu, so ergiebt sich

$$nz = c + \left\{1 - 27''125 + k - \frac{e}{2} k_1\right\} nt$$
$$+ \left\{5''01 + \left(1 - \frac{e^2}{2}\right) k_1\right\} \sin\varepsilon + \left\{-1''41 - k_2\right\} \cos\varepsilon$$
$$- 0{,}79882 nt \sin\varepsilon \qquad - 2{,}58626 nt \cos\varepsilon$$
$$+ \left\{-2{,}50 - \frac{e}{4} k_1\right\} \sin 2\varepsilon \qquad + \left\{0{,}79 + \frac{e}{4} k_2\right\} \cos 2\varepsilon$$
$$+ 0{,}01701 nt \sin 2\varepsilon \qquad + 0{,}05487 nt \cos 2\varepsilon$$
$$+ 0{,}11 \sin 3\varepsilon \qquad - 0{,}08 \cos 3\varepsilon$$
$$+ \text{etc.} \qquad + \text{etc.}$$

$$2\nu = 2C + 0''06805 nt$$
$$+ \{-1''75 - k_1\} \cos\varepsilon + \{-0''61 - k_2\} \sin\varepsilon$$
$$+ 0''80172 nt \cos\varepsilon \qquad - 2''58626 nt \sin\varepsilon$$
$$+ 3{,}56 \cos 2\varepsilon \qquad + 1{,}28 \sin 2\varepsilon$$
$$- 0{,}08 \cos 3\varepsilon \qquad - 0{,}10 \sin 3\varepsilon$$
$$+ \text{etc.} \qquad + \text{etc.}$$

$$\frac{u}{\cos i} = + 3''72 - el_1 - 0''11749 nt$$
$$+ \{-0''70 + l\} \sin\varepsilon + \{-4''03 + l_1\} \cos\varepsilon$$
$$- 7''85691 nt \sin\varepsilon \qquad + 1''38390 nt \cos\varepsilon$$
$$- 0{,}25 \sin 2\varepsilon \qquad - 0{,}34 \cos 2\varepsilon$$
$$- 0{,}02 \sin 3\varepsilon \qquad - 0{,}04 \cos 3\varepsilon$$
$$+ \text{etc.} \qquad + \text{etc.}$$

$$\frac{d\delta z}{dt} = - 26''919 + k - 0''03402 nt$$
$$+ \{2''25 + k_1\} \cos\varepsilon + \{0''56 + k_2\} \sin\varepsilon$$
$$- 0''80172 nt \cos\varepsilon \qquad + 2''58626 nt \sin\varepsilon$$
$$- 4{,}61 \cos 2\varepsilon \qquad - 1{,}47 \sin 2\varepsilon$$
$$+ 0{,}13 \cos 3\varepsilon \qquad + 0{,}17 \sin 3\varepsilon$$
$$+ \text{etc.} \qquad + \text{etc.}$$

$$2\frac{d\nu}{d\varepsilon} = -\left(\frac{dW}{d\eta}\right) = + 0''03$$
$$+ \{-0''84 + k_1\} \sin\varepsilon + \{0''19 - k_2\} \cos\varepsilon$$
$$- 0''80172 nt \sin\varepsilon \qquad - 2''58626 nt \cos\varepsilon$$
$$- 7{,}00 \sin 2\varepsilon \qquad + 2{,}53 \cos 2\varepsilon$$
$$+ 0{,}26 \sin 3\varepsilon \qquad - 0{,}32 \cos 3\varepsilon$$
$$+ \text{etc.} \qquad + \text{etc.}$$

$$\left(\frac{d^2W}{d\eta^2}\right) = + 27''090$$
$$+ \{-0''48 - k_1\} \cos\varepsilon + \{-0''19 - k_2\} \sin\varepsilon$$
$$+ 0''80172 nt \cos\varepsilon \quad - 2''58626 nt \sin\varepsilon$$
$$+ 7{,}68 \cos 2\varepsilon \quad + 2{,}79 \sin 2\varepsilon$$
$$- 0{,}25 \cos 3\varepsilon \quad - 0{,}34 \sin 3\varepsilon$$
$$+ \text{etc.} \quad + \text{etc.}$$

$$\delta\frac{h}{h_0} = K - 0''03402 nt$$
$$- 0''50 \cos\varepsilon \quad + 0''05 \sin\varepsilon$$
$$+ 1{,}06 \cos 2\varepsilon + 0{,}39 \sin 2\varepsilon$$
$$- 0{,}04 \cos 3\varepsilon - 0{,}06 \sin 3\varepsilon$$
$$+ \text{etc.} \quad + \text{etc.}$$

$$\frac{du}{\cos i d\varepsilon} = \frac{1}{\cos i}\left(\frac{dR}{d\eta}\right) = - 0''17$$
$$+ \{0''70 + l\} \cos\varepsilon + \{-3''84 - l_1\} \sin\varepsilon$$
$$- 7''85791 nt \cos\varepsilon - 1''38390 nt \sin\varepsilon$$
$$- 0{,}55 \cos 2\varepsilon \quad + 1{,}03 \sin 2\varepsilon$$
$$- 0{,}06 \cos 3\varepsilon \quad + 0{,}12 \sin 3\varepsilon$$
$$+ \text{etc.} \quad + \text{etc.}$$

wo die etc. Zeichen sich auf die im Vorhergeheuden enthaltenen numerischen Werthe der von $i' = 1$, etc. abhängigen Glieder beziehen.

61.

Es müssen nun zur Bestimmung der Constanten die für die Zeitepoche statt findenden numerischen Werthe von $n\delta z$, $\frac{d\delta z}{dt}$, $\nu$, $\frac{d\nu}{d\varepsilon}$, $\frac{u}{\cos i}$ und $\frac{du}{\cos i d\varepsilon}$ berechnet werden, und zu dem Ende ergab sich aus Bouvard's Jupitertafeln mit Hinzufügung des Betrages der grossen Ungleichheit für 1851 Dec. 5,0 m. Z. Gr.

$$c = 206^\circ\ 48'\ 57''5$$

und eben so aus dessen Saturntafeln

$$c' = 307^\circ\ 31'\ 44''0$$

Aus dem im Art. 1 angeführten Werthe von $c_0$, nemlich

$$c_0 = 19^\circ\ 31'\ 43''6$$

fand sich

$$\varepsilon_0 = 21^\circ\ 17'\ 41''3$$

und hiemit für den Jupiter

$$c' + \mu\,(\varepsilon_0 - c) = 207^\circ\ 25'\ 53''0$$

und für den Saturn

$$c' + \mu\,(\varepsilon_0 - c) = 307^\circ\ 46'\ 36''2$$

Nachdem hieraus die erforderlichen Bögen gebildet, und die Substitutionen in die vorhergehenden Ausdrücke ausgeführt worden waren, ergab sich

$$\begin{aligned}
(n\delta z)_0 &= -\ 0''54 + 230''55 - 6''95 = +\ 223''06 \\
\left(\frac{d\delta z}{dt}\right)_0 &= -28.80 - 995.62 - 7.23 = -1031.65 \\
2(\nu)_0 &= +\ 1.52 + 1031.92 + 7.23 = +1040.67 \\
2\left(\frac{d\nu}{d\varepsilon}\right)_0 &= -\ 2.87 + 336.17 - 8.25 = +\ 325.05 \\
\left(\frac{u}{\cos i}\right)_0 &= -\ 0.74 + 55.06 + 0.92 = +\ 55.24 \\
\left(\frac{du}{\cos i\,d\varepsilon}\right)_0 &= -\ 0.53 + 96.37 - 0.37 = +\ 95.47
\end{aligned}$$

Von den drei getrennten Theilen, in welchen ich diese Grössen angegeben habe, ist der erste aus den im vor. Art. für $i' = 0$ angegebenen Gliedern, nachdem darin $t = 0$ gesetzt worden war, entstanden, der zweite ergab sich aus den übrigen Jupiter-, und der dritte aus den übrigen Saturnstörungen. Die unbedeutenden periodischen Marsstörungen habe ich hiebei übergangen. Durch Anwendung der Ausdrücke (41), (42) und (43) bekam ich hieraus

$$\begin{aligned}
c &= 19^\circ\ 33'\ 27''9 \\
k &= +\ 39''37 \\
k_1 &= +\ 806''49 \\
k_2 &= +\ 663{,}22 \\
l &= -\ 109{,}57 \\
l_1 &= -\ 18{,}24
\end{aligned}$$

und die Substitution dieser Werthe in die Ausdrücke des vor. Art. gab mit Zuziehung der Ausdrücke (39) und (40) für $C$ und $K$,

$$nz = 19^\circ\ 33'\ 27''.9 + 858''.2946t$$
$$+ 808''.60 \sin\varepsilon \qquad - 664''.63 \cos\varepsilon$$
$$- 0''.79882nt \sin\varepsilon \qquad - 2''.58626nt \cos\varepsilon$$
$$- 19.61 \sin 2\varepsilon \qquad + 14.86 \cos 2\varepsilon$$
$$+ 0.01701nt \sin 2\varepsilon \qquad + 0.05487nt \cos 2\varepsilon$$
$$+ 0.11 \sin 3\varepsilon \qquad - 0.08 \cos 3\varepsilon$$
$$+ \text{etc.} \qquad + \text{etc.}$$

$$2\nu = - 48''.39 \qquad + 0''.06850nt$$
$$- 808''.24 \cos\varepsilon \qquad - 663''.83 \sin\varepsilon$$
$$+ 0''.80172nt \cos\varepsilon \qquad - 2''.58626nt \sin\varepsilon$$
$$+ 3.56 \cos 2\varepsilon \qquad + 1.28 \sin 2\varepsilon$$
$$- 0.08 \cos 2\varepsilon \qquad - 0.10 \sin 3\varepsilon$$
$$+ \text{etc.} \qquad + \text{etc.}$$

$$\frac{u}{\cos i} = + 5''.27 \qquad - 0''.11749nt$$
$$- 110''.27 \sin\varepsilon \qquad - 22''.27 \cos\varepsilon$$
$$- 7''.85691nt \sin\varepsilon \qquad + 1''.38390nt \cos\varepsilon$$
$$- 0.25 \sin 2\varepsilon \qquad - 0.34 \cos 2\varepsilon$$
$$- 0.02 \sin 3\varepsilon \qquad - 0.04 \cos 3\varepsilon$$
$$+ \text{etc.} \qquad + \text{etc.}$$

$$\frac{dz}{dt} = 1 + 12''.45 \qquad - 0''.03402nt$$
$$+ 808''.74 \cos\varepsilon \qquad + 663''.78 \sin\varepsilon$$
$$- 0.80172nt \cos\varepsilon \qquad + 2.58626nt \sin\varepsilon$$
$$- 4.61 \cos 2\varepsilon \qquad - 1.47 \sin 2\varepsilon$$
$$+ 0.13 \cos 3\varepsilon \qquad + 0.17 \sin 3\varepsilon$$
$$+ \text{etc.} \qquad + \text{etc.}$$

$$2\frac{d\nu}{d\varepsilon} = -\left(\overline{\frac{dW}{d\eta}}\right) = + 0''.03$$
$$+ 805{,}65 \sin\varepsilon \qquad - 663{,}03 \cos\varepsilon$$
$$- 0.80172nt \sin\varepsilon \qquad - 2.58626nt \cos\varepsilon$$
$$- 7.00 \sin 2\varepsilon \qquad + 2.53 \cos 2\varepsilon$$
$$+ 0.26 \sin 3\varepsilon \qquad - 0.32 \cos 3\varepsilon$$
$$+ \text{etc.} \qquad + \text{etc.}$$

$$\overline{\left(\frac{d^2W}{d\eta^2}\right)} = +\ 27''.090$$
$$\begin{aligned} &- 807''.33 \cos\varepsilon &&- 663''.41 \sin\varepsilon \\ &+ 0''.80172 nt \cos\varepsilon &&- 2''.58626 nt \sin\varepsilon \\ &+ 7.68 \cos 2\varepsilon &&+ 2.78 \sin 2\varepsilon \\ &- 0.25 \cos 3\varepsilon &&- 0.34 \sin 3\varepsilon \\ &+ \text{etc.} &&+ \text{etc.} \end{aligned}$$

$$\delta\frac{h}{h_0} = +\ 35''.94 \quad -\ 0''.03402 nt$$
$$\begin{aligned} &- 0''.50 \cos\varepsilon &&+ 0''.05 \sin\varepsilon \\ &+ 1.06 \cos 2\varepsilon &&+ 0.39 \sin 2\varepsilon \\ &- 0.04 \cos 3\varepsilon &&- 0.06 \sin 3\varepsilon \\ &+ \text{etc.} &&+ \text{etc.} \end{aligned}$$

$$\frac{du}{\cos i d\varepsilon} = \overline{\left(\frac{dR}{d\eta}\right)} \frac{1}{\cos i} = -\ 0''.17$$
$$\begin{aligned} &- 108''.87 \cos\varepsilon &&+ 14''.40 \sin\varepsilon \\ &- 7''.85691 nt \cos\varepsilon &&- 1''.38390 nt \sin\varepsilon \\ &- 0.55 \cos 2\varepsilon &&+ 1.03 \sin 2\varepsilon \\ &- 0.06 \cos 3\varepsilon &&+ 0.12 \sin 3\varepsilon \\ &+ \text{etc.} &&+ \text{etc.} \end{aligned}$$

wo für die constanten Glieder nicht der doppelte, sondern der einfache Betrag angesetzt ist.

Diese sind, nachdem man die übrigen im Vorhergehenden berechneten Störungen, von $i' = 1$ an, an die Stelle der etc. gesetzt hat, die vollständigen Werthe der ersten Annäherung von $nz$, $\nu$, $\frac{u}{\cos i}$, etc. Der Coefficient von $t$ im Ausdruck von $nz$ ist der wahre Werth der mittleren Bewegung, in so weit die erste Annäherung ihn geben kann, und vorausgesetzt, dass der zu Grunde gelegte Werth von $n$ in der That der osculirende Werth der mittleren Bewegung für die Zeitepoche ist; ein Umstand, der später erörtert werden wird. Da hier die Unterschiede zwischen dem osculirenden und dem wahren Werthe der mittleren Bewegung so wie zwischen $c$ und $c_0$ sehr klein sind, nemlich $= 0''.0915$ und bez. $= 1'\ 44''.3$, so habe ich nicht für nöthig gehalten, die im Art. 55 erklärte Verbesserung der zuerst erhaltenen Werthe der Constanten anzuwenden, sondern im Vorhergehenden die zuerst erhaltenen Werthe derselben angesetzt und benutzt.

62.

Die Verbesserung der Störungscoefficienten, welche aus dem eben gefundenen Werthe

$$(n) - n_0 = - 0.''0915$$

hervorgeht, kann sogleich durch die Ausdrücke (44) berechnet werden, und giebt die folgenden, den oben gefundenen Coefficienten der Jupiterstörungen hinzuzufügenden Verbesserungen,

| $i, i'$ | $n\delta z$ | | $2\nu$ | | $\frac{u}{\cos i}$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | sin | cos | cos | sin | sin | cos |
| 1,—2 | —0.″10 | —0.″09 | +0.″03 | —0.″03 | | |
| 2,—2 | —0.11 | —0.08 | +0.12 | —0.08 | | |
| 0,—3 | +0.04 | +0.02 | +0.05 | —0.02 | +0.″02 | —0.″01 |
| 1,—3 | +2.63 | +3.03 | +0.21 | —0.09 | —0.01 | —0.02 |
| 2,—3 | —1.48 | 0.00 | +1.50 | 0.00 | +0.09 | +0.23 |
| 3,—3 | +0.05 | 0.00 | —0 01 | —0.01 | | |

Mit Ausnahme der Glieder, die den kleinsten Divisor bekommen, ist wie man sieht, diese Verbesserung sehr unbedeutend, aber für diese hat der kleine Unterschied zwischen $n_0$ und $(n)$ doch ein paar Secunden geben können.

Für die im §. 2 berechnete, vom Mars verursachte Ungleichheit langer Periode habe ich den Divisor neu berechnet. Mit $n = 858.''2946$ ergiebt sich

$$5\mu = 10{,}990724$$

also

$$11 - 5\mu = + 0.009276$$

die genannte Ungleichheit wird hiemit

$$n\delta z = + 3.''04 \sin\{(11 - 5\mu)\varepsilon - 5(c' - c\mu)\}$$
$$+ 6{,}73 \cos\{(11 - 5\mu)\varepsilon - 5(c' - c\mu)\}$$

und es hat also der kleine Unterschied zwischen $n_0$ und $(n)$ hier wieder ein paar Secunden bewirkt.

63.

Ich will jetzt noch zu der Berechnung der Coefficienten von $n\delta z$ und $\nu$ ein Beispiel anführen, und wähle dazu aus den Jupiterstörungen die erste Columne für $i' = 2$, welche eine der grössten Abtheilungen

ist. Die decadischen Ergänzungen der Logarithmen der hier eintretenden Divisoren sind die folgenden:

| | |
|---|---|
| für —1, —2 ... 9.328*n* | für 2, —2 ... 9.885041 |
| —3, —2 ... 9.432*n* | 3, —2 ... 9.63770 |
| —2, —2 ... 9.5691*n* | 4, —2 ... 9.4811 |
| —1, —2 ... 9.7704*n* | 5. —2 ... 9.3662 |
| 0, —2 ... 0.15679*n* | 6, —2 ... 9.276 |
| 1, —2 ... 0.518494 | 7, —2 ... 9.201 |

die gleich wie die im Art. 57 angeführten Logarithmen der *A* und *C* Coefficienten auf den untern Rand eines Streifen Papiers geschrieben wurden. Ich lasse die Rechnung genau so folgen, wie ich sie gestellt habe, und werde darauf ihre Erklärung geben. Im Original erstrecken sich die Coefficienten, die hinzugezogen wurden, in dieser Abtheilung von $i = -3$ bis $i = 7$, wozu noch eine Columne für die zur Controle angewandte Summe der Coefficienten kommt, da aber diese Anzahl der Columnen nicht in das Format dieser Schriften gebracht werden kann, so sehe ich mich genöthigt abzukürzen, und hier nur die Columnen von $i = -2$ bis $i = 5$ anzuführen.

| | | —2 | —1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | 8.591 | 7 903 | 8.929*n* | 0.5195 | 1.47576*n* | 0.2504*n* | 0.1106 | 7.778*n* |
| *A* | —1 | | | | 8.078 | 9.035*n* | 7.810*n* | 7.670 | |
| | 0 | 7.699*n* | 7.011*n* | 8.037 | 9.6275*n* | 0.5838 | 9.358 | 9.219*n* | 6.88 |
| | 1 | 8.894 | 8.206 | 9.232*n* | 0.8229 | 1.77915*n* | 0.5538*n* | 0.4140 | 8 081*n* |
| | 2 | 7.22*n* | | 7.560 | 9.150*n* | 0.1066 | 8.881 | 8.741*n* | |
| | | 8.945*n* | 8.568*n* | 0.1694 | 0.7888 | 1.50805*n* | 0.3006*n* | 0.2025 | 8.204*n* |
| *C* | —1 | | | 7.729 | 8.348 | 9.0677*n* | 7.860*n* | 7.762 | |
| | 0 | 7.576 | 7.199 | 8.800*n* | 9.4196*n* | 0.1389 | 8.931 | 8.833*n* | 6.83 |
| | 1 | 8.947 | 8.570 | 0.1710*n* | 0.7904*n* | 1.50962 | 0.3022 | 0.2041*n* | 8.206 |
| | 2 | 7.576*n* | 7.199*n* | 8.800 | 9.4196 | 0.1389*n* | 8.931*n* | 8.833 | 6.83*n* |
| | | | | +0.012 | —0.109 | —0.006 | +0.005 | | |
| | | —0.005 | —0.001 | +0.011 | —0.424 | +3.835 | +0.228 | —0.166 | +0.001 |
| | | +0.010 | +0.078 | +0.016 | —0.171 | +6.651 | —60.139 | —3.579 | +2.594 |
| | | | | —0.002 | | +0.004 | —0.141 | +1.278 | +0.076 |
| | | | +0.005 | +0.022 | —0.117 | —0.007 | +0.006 | | |
| | | +0 004 | +0.002 | —0.063 | —0 268 | +1.877 | +0.085 | —0.068 | +0.001 |
| | | +0.011 | +0.089 | +0.037 | —1.482 | —6.171 | +32 331 | +2.005 | —1.600 |
| | | | | —0.004 | —0.002 | +0.068 | +0.263 | —1.877 | —0.085 |
| *G* | | +0.005 | +0.077 | +0.037 | —0.704 | +10.484 | —60.047 | —2.467 | +2.671 |
| | | +0.015 | +0 096 | —0.008 | —1.864 | —4.738 | +32.685 | +0.560 | —1.684 |
| | | | | | | +0.012 | —0 109 | —0 006 | +0.003 |
| | | —0.005 | —0.001 | +0.011 | —0.424 | +3.835 | +0.228 | —0.166 | +0.001 |
| | | +0.016 | —0.171 | +6.651 | —60 139 | —3.579 | +2.594 | —0.012 | —0.084 |
| | | +0.004 | —0.141 | +1.278 | +0.076 | —0.055 | | +0.002 | |
| | | | | | —0 005 | —0.022 | +0.117 | +0.007 | —0.006 |
| | | —0.004 | —0.002 | +0 063 | +0.263 | —1 377 | —0 085 | +0.068 | —0.001 |
| | | —0.087 | +1·482 | +6.171 | —32.331 | —2.005 | +1.600 | —0.016 | —0.056 |
| | | —0.068 | —0.263 | +1.377 | +0.085 | —0.068 | +0.001 | +0.002 | |
| *H* | | +0.015 | —0,313 | +7.940 | —60.487 | +0.218 | +2.748 | —0.182 | —0.078 |
| | | —0.104 | +1.217 | +7.611 | —31.988 | —3.472 | +1.633 | +0.061 | —0.063 |

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $-F$ | +0 082 | −0.030 | −0.832 | +10.649 | −59.919 | −2.583 | +2 667 | −0 048 |
| | +0.039 | +0.008 | −0 085 | +3.308 | −29.906 | −1.780 | +1.290 | −0.006 |
| | 9.083n | 8.342 | 9.9624 | 1.14479n | 1.953397 | 0.6398 | 0.5974n | 8.732 |
| | 8.652 | 8.112n | 0.1192n | 1.66328n | 1.838438 | 0.2775 | 0.0785n | 8.098 |
| | 8.801 | 9.238 | 8 462 | 0.4096n | 0.7594 | 1.43715n | 0.2803n | 9.994 |
| | 7.870n | 9.008n | 8.619n | 0.9281n | 0.6444 | 1.07485n | 9.7614n | 9.360 |
| | 8.949n | 9.9562 | 1.19176 | 1.966024n | 0 5131n | 0 6381 | 9.083n | 9.149n |
| | 8.518 | 9.7266n | 1.34855n | 2.484518n | 0.3981n | 0.2758 | 8.564n | 8 515n |

| | |
|---|---|
| 0, −2, −2 | +0.″045 |
| −1, −1, −2 | −0.102 |
| 1, −3, −2 | +0.003 |
| | −0.054 |
| | −0.105 |
| 0, −1, −2 | −0.013 |
| −1, 0, −2 | −0.042 |
| 1, −2, −2 | +0.033 |
| | −0.022 |
| | −0.075 |
| 0, 0, −2 | −1.316 |
| −1, 1, −2 | −8.474 |
| 1, −1, −2 | −0.533 |
| | −10.323 |
| | −7.941 |
| 0, 1, −2 | −46.055 |
| −1, 2, −2 | +4.410 |
| 1, 0, −2 | −22.313 |
| | −63.958 |
| | +26.723 |

| | |
|---|---|
| 0, 2, −2 | +68.″935 |
| −1, 3, −2 | −11.881 |
| 1, 1, −2 | −305.153 |
| | −248.099 |
| | +293.272 |
| 0, 3, −2 | +1.894 |
| −1, 4, −2 | −0.577 |
| 1, 2, −2 | −2.501 |
| | −1.184 |
| | +1.924 |
| 0, 4, −2 | −1.198 |
| −1, 5, −2 | +0.229 |
| 1, 3, −2 | +1.887 |
| | +0.918 |
| | −1.658 |
| 0, 5, −2 | +0.013 |
| −1, 6, −2 | +0.005 |
| 1, 4, −2 | −0.037 |
| | −0.019 |
| | +0.042 |

Die erste Zeile dieser Rechnung enthält über jeder Columne den Werth des Index $i$, welchem alle in der Columne befindlichen Zahlen angehören; die zweite Zeile enthält die Logarithmen der $6$ Coefficienten, nemlich die der Zahlen, welche sich in der cos überschriebenen Columne der im Art. 84 (I) gegebenen Entwickelung von $(i)a\Omega$ in der Abtheilung für $i' = 2$ befinden. Hierauf folgen die Logarithmen der Producte mit den vier $A$ Coefficienten. Alsdann kommen die Logarithmen der $c$ Coefficienten, das ist der Zahlen, die in der cos überschriebenen Columne und der Abtheilung für $i' = 2$ in der a. a. O. befindlichen Entwickelung von $ar\left(\frac{d\Omega}{dr}\right)$ vorkommen, und die vier folgenden Zeilen geben die Logarithmen der Producte dieser Coefficienten mit den vier $C$ Coefficienten. Die hierauf folgenden zwei Abtheilungen enthalten diese Producte selbst, die nach Maassgabe des Ausdrucks (15) für $G(i,i',c)$ unter einander ge-

stellt sind. Die nun folgende, mit $G$ bezeichnete, Abtheilung enthält die Summen dieser Producte, und die Summe von den in dieser Abtheilung je über einander stehenden zwei Zahlen ist also der betreffende $G$ Coefficient. Es folgen nun die im Art. 39 erklärten, für die Erlangung der $H$ Coefficienten nöthigen, Verschiebungen der schon in den vorhergehenden Abtheilungen enthaltenen Producte, worauf die mit $H$ bezeichnete Abtheilung die zwei Summen derselben giebt, aus denen die $H$ Coefficienten selbst folgen. Diese Werthe dieser Coefficienten wurden nun in die erste der im Art. 57 befindlichen Tafeln am gehörigen Orte eingetragen, und dabei Platz für die noch zu berechnenden $F$ Coefficienten gelassen. Die Berechnung dieser ist in der mit $-F$ bezeichneten Abtheilung enthalten. Es wurde zufolge der Gleichung (17) erst das arithmetische Mittel aus den bezüglichen $G$ und $H$ Coefficienten genommen, und diesem der $6$ Coefficient hinzugefügt. Die Summe von je zwei Zahlen dieser Abtheilung ist also der betreffende $F$ Coefficient mit umgekehrtem Zeichen. Die $F$ Coefficienten selbst wurden hierauf auch der genannten Tafel des Art. 57 einverleibt.

Die drei letzten Abtheilungen enthalten nun blos die Divisionen der $F$, $G$ und $H$ Coefficienten mit den Werthen von $i - i'\mu$. Die Quotienten habe ich hierauf mit Hinzufügung ihrer Indices und des Index von $\eta$ angeführt, und daraus nach Maassgabe der Ausdrücke (20) die $P$ und $Q$ Coefficienten durch Addition und Subtraction berechnet, die sich in der ersten Tafel des Art. 58 befinden.

Die fernere Rechnung steht wie folgt.

| | −2 | −1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | .623 | 8.580n | 9.8733n | 0.86570 | 1.47730n | 9.9047n | 0.140 | 8.613n |
| | 8.192n | 8.350 | 0.0301 | 1.88419 | 1.86234n | 9.5424n | 9.621 | 7.979n |
| $\delta\frac{h_0}{h}$ | −0.016 | +0.022 | +1.072 | +24.221 | −23.033 | −0.349 | +0.418 | −0.010 |
| | 9.021n | 8.8751n | 0.89988n | 1.42689 | 2 467274 | 0.2842 | 0.2196n | 8.623 |
| | 8.590 | 8.6455 | 1.05667 | 1.94538 | 2.352312 | 9.9219 | 9.7007n | 7.989 |
| $2\nu$ | +0.039 | +0.044 | +11.394 | +88.182 | +225.067 | +0.885 | −0.502 | +0.010 |
| | −0.054 | −0.022 | −10.323 | −63.958 | −248.099 | −1.184 | +0.918 | −0.019 |
| $\delta\frac{h_0}{h}$ | −0 015 | +0.022 | +1.071 | +24.224 | −23.032 | −0.349 | +0.416 | −0.009 |
| | 8 732n | 8.342n | 1.0136n | 1.8059n | 2.89463n, | 0.073n | 9.963 | 8.279n |
| | 7.360 | 6.97 | 9.6413 | 0.4336 | 1.02237 | 8.701 | 8.591n | 6.9 |
| | −0.054 | −0.022 | −10.323 | −63.958 | −248.099 | −1.184 | +0.918 | −0.019 |
| | | +0.002 | +0 001 | +0.438 | +2.714 | +10.528 | +0.050 | −0.039 |
| | +0.001 | +0.438 | +2.714 | +10.528 | +0.050 | −0.039 | +0.001 | +0.001 |
| | −0.053 | +0.418 | −7.608 | −52.992 | −245 335 | +9 805 | +0.969 | −0.057 |
| | 8.723n | 9.621 | 0.8813n | 1.72421n | 2.38976n | 0.9687 | 9.986 | 8.756n |
| | 8.292 | 9.391n | 1.0381 | 2.24270n | 2.27480n | 0.6064 | 9.467 | 8.122n |
| $n\delta z$ | +0.02 | −0.25 | +10.92 | −174.86 | −183.28 | +4.04 | +0.29 | −0.01 |

Unter den Werthen des Index $i$ stehen hier zunächst die Logarithmen der Coefficienten von $\overline{T}$, die in der ersten Tafel des Art. 57 angeführt sind, und woraus durch Division mit $i - i'\mu$ zufolge des Ausdrucks (23) die $\Pi$ Coefficienten, nemlich die Coefficienten der Function $\delta\frac{h_0}{h}$ hervorgehen, die in der vierten Zeile enthalten sind. Hierauf folgen die Logarithmen der $Q$ Coefficienten, und darauf die Berechnung der Coefficienten von $2\nu$ nach dem zweiten Ausdruck (21). Zu diesen Coefficienten habe ich die $P$ Coefficienten, das ist die Coefficienten von $\frac{d\delta z}{dt}$ addirt, woraus wieder die Coefficienten von $\delta\frac{h_0}{h}$ erhalten wurden, deren Uebereinstimmung mit den eben auf die andere Art berechneten Werthen derselben zufolge der (24) eine Controle für die Richtigkeit der Rechnung giebt. Hierauf kommen die Logarithmen der $P$ Coefficienten, und die der Producte derselben mit $-\frac{1}{2}e$, und darauf die Zahlen deren Summe zufolge der ersten (21) auch mit $i - i'\mu$ dividirt werden muss. Den Schluss der Rechnung bilden diese Division, und die dadurch sich ergebenden Coefficienten von $n\delta z$.

Da die Berechnung der Coefficienten von $\frac{u}{\cos i}$ auf ähnliche Art ausgeführt wird, und etwas einfacher ist, so habe ich nicht für nöthig gehalten davon ein Beispiel anzuführen.

## §. 7. Von der Säcularänderung der mittleren Länge.

### 64.

Die Säcularänderung der mittleren Länge besteht aus den, dem Quadrat und den höheren Potenzen der Zeit, proportionalen Gliedern im Ausdruck für $nz$. Da aus dem Vorhergehenden erhellt, dass unter den von den ersten Potenzen der störenden Kräfte abhängigen Gliedern keine solchen Glieder vorhanden sind, so kann die Säcularänderung der mittleren Länge nur von der Ordnung der Quadrate und Producte der störenden Kräfte sein. Wenn man die Cuben und höheren Potenzen dieser Kräfte übergeht, so reducirt sich die genannte Säcularänderung auf das dem Quadrat der Zeit proportionale Glied in $nz$. Das der Zeit selbst proportionale Glied im Ausdruck von $nz$, oder mit anderen Worten die wahre mittlere Bewegung — nie jedoch blos irgend ein Theil derselben — nebst den eben genannten, dem Quadrat und den höheren

Potenzen der Zeit proportionalen Gliedern können die Säcularänderung der mittleren Länge (oder Anomalie) für die Zeitepoche genannt werden, denn diese Glieder stehen zu diesem Element in derselben Relation wie die Säcularänderungen der übrigen Elemente zu den Werthen dieser für die Zeitepoche. Man hat indess, so viel ich weiss, diese Benennung nie angewandt, sondern immer nur die oben genannten Glieder als die Säcularänderung der mittleren Länge überhaupt bezeichnet.

Die in der ersten Abhandlung für die von den Quadraten und Producten der störenden Kräfte überhaupt abhängigen Glieder entwickelten Formeln sind streng und allgemein gültig, man muss also unter den andern Gliedern dieser Ordnung auch die Säcularänderung der mittleren Länge durch dieselben richtig erhalten. Aber in Bezug auf diese Säcularänderung ist eine Gattung von Gliedern vorhanden, die, sei die angewandte Methode welche sie will, — wenn sie nur überhaupt nicht fehlerhaft ist, — in Folge des bekannten Satzes, dass auch mit Rücksicht auf die Quadrate und Producte der störenden Kräfte unter den osculirenden Elementen die grosse Achse der Ellipse keiner Säcularänderung unterworfen ist, sich vollständig gegen einander aufheben müssen. Da in der numerischen Rechnung, wegen der stets statt findenden Unsicherheit der letzten der angewandten Decimalstellen diese vollständige Aufhebung im Allgemeinen nicht statt finden wird, so wird es nothwendig diese Glieder im Voraus kennen zu lernen, damit man sie auch in dem Falle weglassen kann, wo die numerische Rechnung die vollständige Aufhebung derselben nicht bewirkt hat.

Da die Säcularänderung der mittleren Länge für die Planeten überhaupt gemeiniglich sehr klein ist, so würde man manchmal ohne diese Weglassung, eben wegen der erwähnten Unsicherheit der letzten Decimale ein ungenaues Resultat für dieselbe erhalten können. Durch die Sätze, die im Folgenden bewiesen werden, gelangt man nicht nur zur Kenntniss der einander aufhebenden Glieder, sondern auch zur Kenntniss der Glieder, aus welchen einzig und allein die Säcularänderung der mittleren Länge entstehen kann.

65.

Bei der Berechnung der Störungen zweiter Ordnung in Bezug auf die störenden Kräfte zeigen sich Glieder, die dem Quadrat, und Glieder,

die dem Cubus der Zeit proportional sind, und in Bezug auf welche die folgenden Sätze statt finden.

1ter Satz.

„Abgesehen von den in der ersten Annäherung den Integralen hinzugefügten willkührlichen Constanten, verhält sich in der Entwickelung von $\frac{d\delta W_0}{d\epsilon}$ nach den Cosinussen und Sinussen der Vielfachen von $\epsilon$ und $\eta$ der Coefficient des mit $\cos\eta$ multiplicirten Gliedes zum constanten Gliede wie 1 zu $\frac{1}{2}e$."

Der hier Bezug habende Ausdruck ist der im Art. 43 (I) gegebene, nemlich,

$$\frac{d\delta W_0}{d\epsilon} = A\frac{an\delta z}{r} + B\nu + C\delta\frac{h}{h_0} + D\frac{u}{\cos i} + E\frac{u_1}{\cos i}$$

$$(45) \quad . \; . \; . \quad + Fn'\delta z' + G\nu' + H\frac{u'}{\cos i'}$$

und das im Satze angegebene Verhältniss der beiden dort genannten Coefficienten ist dasselbe, welches sich in der ersten Annäherung auch zu erkennen gab. Denn durch die Gleichung (19) hatten wir dort

$$F(0,0,s) = eH(0,0,s)$$

und es bedeutet für die erste Annäherung $F(0,0,s)$ das Doppelte des constanten Gliedes und $H(0,0,s)$ den Coefficienten des mit $\cos\eta$ multiplicirten Gliedes in $\frac{dW}{d\epsilon}$.

Vermöge dieses Verhältnisses zwischen diesen beiden Coefficienten konnte im Vorhergehenden kein dem Quadrat von $t$ oder $\epsilon$ proportionales Glied in $nz$ erscheinen, und es wird daher zufolge des obigen Satzes bei der Berücksichtigung der Quadrate und Producte der störenden Massen, wenn man vorläufig die im Satze ausgeschlossenen Glieder weglässt, auch kein $t^2$ oder $\epsilon^2$ proportionales Glied in $nz$ entstehen können.

Um dieses deutlich zu machen bemerke ich, dass in der ersten Annäherung

$$n\delta z = \int\frac{r}{a}\overline{W}_0\,d\epsilon$$

und in der zweiten Annäherung mit Weglassung der im Satze ausgeschlossenen Glieder

$$n\delta z = \int\frac{r}{a}\,\delta\overline{W}_0\,d\epsilon$$

ist, setzt man daher

$$dW_0 \text{ oder } d\delta W_0 = (\tfrac{1}{2}ek + k\cos\eta)\,d\varepsilon$$

so wird

$$\overline{W_0} \text{ oder } \overline{\delta W_0} = \tfrac{1}{2}ek\varepsilon + k\varepsilon\cos\varepsilon$$

Durch die Multiplication dieses Ausdrucks mit dem Werthe $1-e\cos\varepsilon$ von $\frac{r}{a}$ verschwindet das Glied $\frac{1}{2}ek\varepsilon$, welches hier allein im Stande wäre ein $\varepsilon^2$ oder $t^2$ proportionales Glied im Integral, das ist in $n\delta z$ hervor zu bringen.

66.

Um den obigen Satz zu beweisen, werde ich zuerst den folgenden damit verwandten beweisen.

2ter Satz.

„Mit Uebergehung der in der ersten Annäherung den Integralen hinzugefügten willkührlichen Constanten ist in der Entwickelung von $\frac{d\delta W_0}{dt}$ nach den Cosinussen und Sinussen der Vielfachen der mittleren Anomalien das constante Glied gleich Null."

Der Uebergang von diesem zweiten Satze zum ersten wird nachher leicht zu bewerkstelligen sein. Berücksichtigen wir zuerst nur das Quadrat der störenden Kraft, und setzen demzufolge

$$\frac{d\delta W_0}{dt} = A_1 n\delta z + B_1\nu + C_1\delta\frac{h}{h_0} + D_1\frac{u}{\cos i} + E_1\frac{u_1}{\cos i} \quad . \quad . \quad (46)$$

so ist

$$A_1 = \left(\frac{dT_1}{dg}\right)$$

$$T_1 = \frac{an}{r}T,\ B_1 = \frac{an}{r}B,\ C_1 = \frac{an}{r}C,\ D_1 = \frac{an}{r}D,\ E_1 = \frac{an}{r}E$$

wo $T$, $B$, $C$, $D$, $E$ dieselben Ausdrücke sind, die im Art. 43 (I) u. f. eingeführt wurden. Die Form dieser Ausdrücke ist die folgende

$$\Xi_1 + \Upsilon\cos\eta + \Psi\sin\eta$$

wie schon aus den oben für die erste Annäherung entwickelten Functionen erkannt werden kann. Da in der Entwickelung von $\sin\eta$ nach den Sinussen der Vielfachen des Bogens $\gamma$, welcher zur mittleren Anomalie $g$ in derselben Beziehung stehen soll, wie $\eta$ zu $\varepsilon$, kein constantes Glied enthalten ist, und in der Entwickelung von $\cos\eta$ nach den Cosinussen der Vielfachen von $\gamma$ das constante Glied $= -\frac{1}{2}e$ ist, so wird, wenn man dem vorstehenden Ausdruck die folgende Form giebt

$$(47) \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad \Xi + \Upsilon(\cos\eta + \tfrac{1}{2}e) + \Psi \sin\eta$$

$\Xi$ die einzige Function sein, die nach der Entwickelung in Bezug auf $\gamma$, $g$ und $g'$ möglicher Weise ein constantes Glied haben könnte, indem alle aus dem übrigen Theil des vorstehenden Ausdrucks durch die genannte Entwickelung entstehenden Glieder nothwendiger Weise mit $\cos\gamma$, $\cos 2\gamma$, etc. oder mit $\sin\gamma$, $\sin 2\gamma$, etc. multiplicirt sein müssen. Wir brauchen daher in den folgenden Entwickelungen nur auf die oben durch $\Xi$ dargestellten Glieder Rücksicht zu nehmen.

Wenn $\Xi dt$ mit dem Differential der halben grossen Achse in der Theorie der Veränderung der willkührlichen Constanten identisch wäre, so könnte ich auf den für dieses Differential längst vorhandenen Beweis verweisen, da aber diese Identität nicht statt findet, so muss der Beweis für $\Xi$ vollständig durchgeführt werden.

67.

Der Ausdruck von $T_1$ ist zufolge der ersten Abhandlung, und wenn wir nur auf die Glieder erster Ordnung in Bezug auf die störenden Massen Rücksicht nehmen, die hier blos in jedem der Factoren des Ausdrucks (46) verlangt werden, der folgende:

$$T_1 = M_1 a\left(\frac{d\Omega}{d\varepsilon}\right) + N_1 ar\left(\frac{d\Omega}{dr}\right)$$

wo:

$$M_1 = \frac{an}{r\cos^3\varphi}\Big\{-3(1-\tfrac{1}{2}e^2) + 2e\cos\varepsilon - \tfrac{1}{2}e^2\cos 2\varepsilon$$
$$+ e^2\cos(\eta+\varepsilon) - 3e\cos\eta + (4-e^2)\cos(\eta-\varepsilon) - e\cos(\eta-2\varepsilon)\Big\}$$

$$N_1 = \frac{an}{r\cos^3\varphi}\Big\{e\sin\varepsilon - \tfrac{1}{2}e^2\sin 2\varepsilon$$
$$+ e^2\sin(\eta+\varepsilon) - e\sin\eta - (2-e^2)\sin(\eta-\varepsilon) + e\sin(\eta-2\varepsilon)\Big\}$$

ist. Es ist nun ein Leichtes die beiden Factoren $M_1$ und $N_1$ auf die Form des Ausdrucks (47) zu bringen, man erhält

$$M_1 = -3\frac{an}{r} - (\cos\eta + \tfrac{1}{2}e)\frac{an}{r\cos^3\varphi}\Big\{3e - 4\cos\varepsilon + e\cos 2\varepsilon\Big\}$$
$$+ \sin\eta \,.\, \frac{an}{r\cos^3\varphi}\Big\{(4-2e^2)\sin\varepsilon - e\sin 2\varepsilon\Big\}$$

$$N_1 = (\cos\eta + \tfrac{1}{2}e)\frac{an}{r\cos^3\varphi}\Big\{2\sin\varepsilon - e\sin 2\varepsilon\Big\}$$
$$- \sin\eta \,.\, \frac{an}{r\cos^3\varphi}\Big\{e + 2(1-e^2)\cos\varepsilon - e\cos 2\varepsilon\Big\}$$

durch deren Substitution man zuerst

$$=-3\frac{a^2n}{r}\left(\frac{d\Omega}{d\varepsilon}\right)$$
$$-(\cos\eta+\tfrac{1}{2}e)\frac{a^2n}{r\cos^2\varphi}\left\{\left[3e-4\cos\varepsilon+e\cos 2\varepsilon\right]\left(\frac{d\Omega}{d\varepsilon}\right)-\left[2\sin\varepsilon-e\sin 2\varepsilon\right]r\left(\frac{d\Omega}{dr}\right)\right\}$$
$$+\sin\eta\,.\,\frac{a^2n}{r\cos^2\varphi}\left\{\left[(4-2e^2)\sin\varepsilon-e\sin 2\varepsilon\right]\left(\frac{d\Omega}{d\varepsilon}\right)-\left[e+2\cos^2\varphi\cos\varepsilon-e\cos 2\varepsilon\right]r\left(\frac{d\Omega}{dr}\right)\right\}$$

erhält. Es ist aber

$$\left.\begin{aligned}\left(\frac{d\Omega}{d\varepsilon}\right)&=\frac{r}{a}\left(\frac{d\Omega}{dg}\right)\\ \frac{r}{a}\left(\frac{d\Omega}{dg}\right)&=\frac{a\cos\varphi}{r}\left(\frac{d\Omega}{df}\right)+ae\sin\varepsilon\left(\frac{d\Omega}{dr}\right)\\ \frac{r}{a}\left(\frac{d\Omega}{de}\right)&=\frac{a}{r\cos\varphi}(2-e^2-e\cos\varepsilon)\sin\varepsilon\left(\frac{d\Omega}{df}\right)-a(\cos\varepsilon-e)\left(\frac{d\Omega}{dr}\right)\end{aligned}\right\}\quad(48)$$

Multiplicirt man die zweite dieser Gleichungen mit $\frac{2r}{a^2e}$, oder mit der gleichen Function $\frac{2-2e\cos\varepsilon}{ae}$, so giebt sie

$$(2\sin\varepsilon-e\sin 2\varepsilon)\left(\frac{d\Omega}{dr}\right)=\frac{1}{r}\left(\frac{2+e^2}{e}-4\cos\varepsilon+e\cos 2\varepsilon\right)\left(\frac{d\Omega}{d\varepsilon}\right)-\frac{2\cos\varphi}{ae}\left(\frac{d\Omega}{df}\right)$$

und eliminirt man $\left(\frac{d\Omega}{df}\right)$ und $\left(\frac{d\Omega}{dg}\right)$ zwischen den drei Gleichungen (48), so erhält man

$$\left\{(4-2e^2)\sin\varepsilon-e\sin 2\varepsilon\right\}\left(\frac{d\Omega}{d\varepsilon}\right)-\left\{e+2\cos^2\varphi\cos\varepsilon-e\cos 2\varepsilon\right\}\left(\frac{d\Omega}{dr}\right)=\frac{2\cos^2\varphi}{a}\left(\frac{d\Omega}{de}\right)\quad.\quad(49)$$

Hiemit vereinfacht sich der eben gefundene Ausdruck von $T_1$, und geht in den folgenden über

$$T_1=-3an\left(\frac{d\Omega}{dg}\right)+\frac{2an}{e}\left\{\left(\frac{d\Omega}{dg}\right)-\frac{1}{\cos\varphi}\left(\frac{d\Omega}{df}\right)\right\}(\cos\eta+\tfrac{1}{2}e)+2an\left(\frac{d\Omega}{de}\right)\sin\eta\quad(50)$$

Nehmen wir nun hier blos auf die Glieder Rücksicht, die dem Vorhergehenden zufolge von $\gamma$ unabhängig sind, so wird sogleich

$$A_1=-3an\left(\frac{d^2\Omega}{dg^2}\right)$$

Setzen wir ferner $V_1=\frac{na}{r}V$, so giebt die Vergleichung des Ausdrucks für $V$ der ersten Abhandlung mit dem obigen Ausdruck für $T_1$ sogleich zu erkennen, dass mit bloser Rücksicht auf die von $\gamma$ unabhängigen Glieder

$$V_1=-3\frac{a^2n}{r}\left(\frac{d.r\left(\frac{d\Omega}{dr}\right)}{d\varepsilon}\right)$$

ist, welchen Ausdruck man leicht in den folgenden verwandelt,

$$V_1=-3anr\left(\frac{d^2\Omega}{drdg}\right)-3\frac{a^2ne\sin\varepsilon}{r}\left(\frac{d\Omega}{dr}\right)$$

Setzt man ferner $X_1=\frac{an}{r}X$, so geben die Ausdrücke (66) (I) und (67) (I)

für $X$ leicht zu erkennen, dass die oft erwähnten Glieder in $X_1$ folgenden Ausdruck haben:

$$X_1 = -3\frac{a^2n}{r\cos^2\varphi}\left\{e^2 - e\cos\varepsilon\right\}\left(\frac{d\Omega}{d\varepsilon}\right) + 3\frac{a^2n}{\cos^2\varphi}e\sin\varepsilon\left(\frac{d\Omega}{dr}\right)$$

den man durch die beiden ersten Gleichungen (48) leicht in folgenden verwandelt:

$$X_1 = 3\frac{a^2ne(\cos\varepsilon - e)}{r^2\cos\varphi}\left(\frac{d\Omega}{df}\right) + 3\frac{a^2ne\sin\varepsilon}{r}\left(\frac{d\Omega}{dr}\right)$$

es wird also, da $B_1 = V_1 + X_1$ ist,

$$B_1 = -3anr\left(\frac{d^2\Omega}{drdg}\right) + 3\frac{a^2ne(\cos\varepsilon - e)}{r^2\cos\varphi}\left(\frac{d\Omega}{df}\right)$$

Da ferner

$$\overline{T_1} = \frac{an}{\cos\varphi}\left(\frac{d\Omega}{df}\right)$$

und $C_1 = 2(T_1 + X_1 + \overline{T_1})$ ist, so geben die vorstehenden Ausdrücke

$$C_1 = 2\frac{an}{\cos\varphi}\left(1 - \frac{3a}{r}\right)\left(\frac{d\Omega}{df}\right)$$

Aus den Ausdrücken (72) (I) folgt endlich sogleich

$$D_1 = -3a^2n\left(\frac{d^2\Omega}{dZdg}\right)$$

$$E_1 = -3\frac{a^2n}{r}\left(\frac{d\Omega}{dZ}\right)$$

Substituirt man nun die eben gefundenen Ausdrücke von $A_1$, $B_1$, etc. in Ausdruck (46), so wird wegen $u_1 = \frac{du}{dt}\frac{r}{an}$,

$$\frac{d\delta W_0}{dt} = -3an\left(\frac{d^2\Omega}{dg^2}\right)n\delta z - 3an\left\{r\left(\frac{d^2\Omega}{drdg}\right) - \frac{a^2e(\cos\varepsilon - e)}{r^2\cos\varphi}\left(\frac{d\Omega}{df}\right)\right\}\nu$$
$$+ 2\frac{an}{\cos\varphi}\left(1 - \frac{3a}{r}\right)\left(\frac{d\Omega}{df}\right)\delta\frac{h}{h_0} - 3a^2n\left(\frac{d^2\Omega}{dZdg}\right)\frac{u}{\cos i} - 3a^2\left(\frac{d\Omega}{dZ}\right)\frac{\frac{du}{dt}}{\cos i}$$

in welchen noch die analytischen Ausdrücke für $n\delta z$, $\nu$, $\delta\frac{h}{h_0}$, $u$ und $\frac{du}{dt}$ zu substituiren sind.

### 68.

Den Ausdruck für $\delta\frac{h}{h_0}$ erhalten wir unmittelbar aus der ersten Abhandlung wie folgt,

$$\delta\frac{h}{h_0} = -\frac{an}{\cos\varphi}\int\left(\frac{d\Omega}{df}\right)dt$$

und zur Ermittelung der Ausdrücke für $n\delta z$ und $\nu$ wird der Ausdruck (50) für $T_1$ dienen, indem ohne Rücksicht auf die willkührlichen Constanten,

$$n\delta z = n\int\left(\int \overline{T_1 dt}\right)dt$$

ist. Für $\nu$ werde ich hier die Gleichung

$$\nu = -\tfrac{1}{2}\frac{d\delta z}{dt} - \tfrac{1}{2}\delta\frac{h}{h_0} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (51)$$

anwenden. Multiplicirt man (50) mit $dt$, integrirt und verwandelt nach der Integration $\tau$ in $t$, so bekommt man erstlich

$$\begin{aligned}\frac{d\delta z}{dt} = (\overline{\int T_1 dt}) &= -3an\int\left(\frac{d\Omega}{dg}\right)dt \\ &+ \frac{2an}{e}(\cos\varepsilon + \tfrac{1}{2}e)\int\left\{\left(\frac{d\Omega}{dg}\right) - \frac{1}{\cos\varphi}\left(\frac{d\Omega}{df}\right)\right\}dt \\ &+ 2an\sin\varepsilon\int\left(\frac{d\Omega}{de}\right)dt\end{aligned}$$

Multiplicirt man diesen Ausdruck mit $ndt$, oder dessen Werth $(1-e\cos\varepsilon)\,d\varepsilon$, integrirt durch die theilweise Integration, und setzt für $\sin 2\varepsilon$ und $\cos 2\varepsilon$ ihre Werthe $2\sin\varepsilon\cos\varepsilon$ und $2\cos^2\varepsilon - 1$, so ergiebt sich zuerst

$$\begin{aligned}n\delta z = &-3an^2\iint\left(\frac{d\Omega}{dg}\right)dt^2 + \frac{an}{e}\left\{(2-e^2)\sin\varepsilon - e\sin\varepsilon\cos\varepsilon\right\}\int\left\{\left(\frac{d\Omega}{dg}\right) - \frac{1}{\cos\varphi}\left(\frac{d\Omega}{df}\right)\right\}dt \\ &- an\left\{\tfrac{1}{2}e + 2\cos\varepsilon - e\cos^2\varepsilon\right\}\int\left(\frac{d\Omega}{de}\right)dt \\ &- \frac{an}{e}\int\left\{\{(2-e^2)\sin\varepsilon - e\sin\varepsilon\cos\varepsilon\}\left\{\left(\frac{d\Omega}{dg}\right) - \frac{1}{\cos\varphi}\left(\frac{d\Omega}{df}\right)\right\} - \{\tfrac{1}{2}e^2 + 2e\cos\varepsilon - e^2\cos^2\varepsilon\}\left(\frac{d\Omega}{de}\right)\right\}dt\end{aligned}$$

Die Gleichung (49) giebt aber leicht

$$\{(2-e^2)\sin\varepsilon - e\sin\varepsilon\cos\varepsilon\}\left(\frac{d\Omega}{dg}\right) = \cos^2\varphi\left(\frac{d\Omega}{de}\right) + a\{e + (1-e^2)\cos\varepsilon - e\cos^2\varepsilon\}\left(\frac{d\Omega}{dr}\right)$$

und die dritte Gleichung (48) giebt

$$\frac{1}{\cos\varphi}\{(2-e^2)\sin\varepsilon - e\sin\varepsilon\cos\varepsilon\}\left(\frac{d\Omega}{df}\right) = \frac{r^2}{a^2}\left(\frac{d\Omega}{de}\right) + r(\cos\varepsilon - e)\left(\frac{d\Omega}{dr}\right)$$

hieraus folgt

$$\{(2-e^2)\sin\varepsilon - e\sin\varepsilon\cos\varepsilon\}\left\{\left(\frac{d\Omega}{dg}\right) - \frac{1}{\cos\varphi}\left(\frac{d\Omega}{df}\right)\right\} = -\{e^2 - 2e\cos\varepsilon + e^2\cos^2\varepsilon\}\left(\frac{d\Omega}{de}\right) + 2er\left(\frac{d\Omega}{dr}\right)$$

Es wird daher schliesslich

$$\begin{aligned}n\delta z = &-3an^2\iint\left(\frac{d\Omega}{dg}\right)dt^2 - 2an\int r\left(\frac{d\Omega}{dr}\right)dt \\ &+ \frac{an}{e}(2-e^2-e\cos\varepsilon)\sin\varepsilon\int\left\{\left(\frac{d\Omega}{dg}\right) - \frac{1}{\cos\varphi}\left(\frac{d\Omega}{df}\right)\right\}dt + an\{e - 2\cos\varepsilon + e\cos^2\varepsilon\}\int\left(\frac{d\Omega}{de}\right)dt\end{aligned}$$

Die Gleichung (51) giebt sofort durch Hülfe der schon entwickelten Grössen

$$\begin{aligned}\nu = &\tfrac{3}{2}an\int\left(\frac{d\Omega}{dg}\right)dt + \frac{an}{2\cos\varphi}\int\left(\frac{d\Omega}{df}\right)dt \\ &- \frac{an}{e}(\cos\varepsilon + \tfrac{1}{2}e)\int\left\{\left(\frac{d\Omega}{dg}\right) - \frac{1}{\cos\varphi}\left(\frac{d\Omega}{df}\right)\right\}dt - an\sin\varepsilon\int\left(\frac{d\Omega}{de}\right)dt\end{aligned}$$

Um den Ausdruck für $u$ zu erhalten, bemerke ich, dass zufolge der ersten Abhandlung mit blosser Rücksicht auf die erste Potenz der störenden Massen

$$u = \overline{\left(\int U_1 dt\right)}$$

wird, wo

$$U_1 = \frac{a}{\cos\varphi} r \eta \sin u - f \left(\frac{d\Omega}{dZ}\right) \cos i$$

ist. Nach der Ausführung der Integration ergiebt sich daher

$$\frac{u}{\cos i} = \frac{a r \sin f}{\cos\varphi} \int \left(\frac{d\Omega}{dZ}\right) r \cos f \, . \, dt - \frac{a r \cos f}{\cos\varphi} \int \left(\frac{d\Omega}{dZ}\right) r \sin f \, . \, dt$$

und da man um $\frac{du}{dt}$ zu erhalten nur ausserhalb der Integralzeichen zu differentiiren braucht, und man hier $n dt = dg$ setzen darf, so wird

$$\frac{\frac{du}{dt}}{\cos i} = \frac{a^2}{\cos\varphi} \frac{d \cdot r \sin f}{dg} \int \left(\frac{d\Omega}{dZ}\right) r \cos f \, . \, dt - \frac{a^2}{\cos\varphi} \frac{d \cdot r \cos f}{dg} \int \left(\frac{d\Omega}{dZ}\right) r \sin f \, . \, dt$$

Substituirt man nun diese Werthe von $u$, $\frac{du}{dt}$, etc. in den am Ende des vor. Art. gefundenen Ausdruck, so findet man erstlich

$$\frac{d \cdot n\delta z}{dt} = [\text{illegible}] \int r \left(\frac{d\Omega}{dr}\right) dt$$

$$+ [\text{illegible}] \, dt + 3a^2 n^2 C \int \left(\frac{d\Omega}{de}\right) dt$$

$$+ [\text{illegible}] \, E \int r \sin f \left(\frac{d\Omega}{dZ}\right) dt$$

$$- [\text{illegible}]$$

wo zur Abkürzung

$$A = [\text{illegible}] \left(\frac{r\,\Omega}{\partial r\,\partial g}\right) - \frac{a^2(e^2 - 2e^2 \cos\varepsilon + e\cos^2\varepsilon)}{r^2 \cos\varphi} \left(\frac{d\Omega}{df}\right)$$

$$B = [\text{illegible}] \left(\frac{r\,\Omega}{\partial r\,\partial g}\right)$$

$$C = [\text{illegible}] \left(-3e^2 - 2e^2\cos\varepsilon + (3e - 2e^3)\cos^2\varepsilon\right) \left(\frac{d\Omega}{df}\right)$$

$$+ [\text{illegible}] \sin\varepsilon \, r \left(\frac{r\,\Omega}{\partial r\,\partial g}\right) - \frac{ae}{r^2 \cos\varphi} (\cos\varepsilon - e) \sin\varepsilon \left(\frac{d\Omega}{df}\right)$$

$$D = [\text{illegible}]$$

$$E = [\text{illegible}]$$

$$F = [\text{illegible}]$$

[illegible]. Diese Coefficienten sind einer wesentlichen Reduction fähig.

62.

Die [illegible] letzten Gleichungen (48) kann man leicht wie folgt [illegible]

$$0 = \left(\frac{d\Omega}{dg}\right) - \frac{a^2 \cos\varphi}{r^2}\left(\frac{d\Omega}{df}\right) - \frac{a^2 e \sin\varepsilon}{r}\left(\frac{d\Omega}{dr}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (52)$$

$$0 = \left(\frac{d\Omega}{de}\right) - \frac{a^2 \sin\varepsilon}{r^2 \cos\varphi}(2-e^2-e\cos\varepsilon)\left(\frac{d\Omega}{df}\right) + \frac{a^2}{r}(\cos\varepsilon - e)\left(\frac{d\Omega}{dr}\right) \qquad (53)$$

Eliminirt man hieraus $\left(\frac{d\Omega}{df}\right)$, so ergiebt sich

$$0 = (2-e^2-e\cos\varepsilon)\sin\varepsilon\left(\frac{d\Omega}{dg}\right) - \cos^2\varphi\left(\frac{d\Omega}{de}\right) - (\cos\varepsilon + e)\, r\left(\frac{d\Omega}{dr}\right)$$

und differentiirt man diese nach $g$, so wird

$$0 = (2-e^2-e\cos\varepsilon)\sin\varepsilon\left(\frac{d^2\Omega}{dg^2}\right) - \cos^2\varphi\left(\frac{d^2\Omega}{dedg}\right) - (\cos\varepsilon + e)\, r\left(\frac{d^2\Omega}{drdg}\right)$$
$$+ (e + 2\cos\varepsilon)\left(\frac{d\Omega}{dg}\right) + \frac{a^2}{r}(1-e^2-2e\cos\varepsilon)\sin\varepsilon\left(\frac{d\Omega}{dr}\right) \qquad (54)$$

Multiplicirt man nun (52) mit $\frac{1}{e}(1+e^2-2e\cos\varepsilon)$, und addirt das Product zu (54), so entsteht

$$0 = (2-e^2-e\cos\varepsilon)\sin\varepsilon\left(\frac{d^2\Omega}{dg^2}\right) - \cos^2\varphi\left(\frac{d^2\Omega}{dedg}\right) - (\cos\varepsilon + e)\, r\left(\frac{d^2\Omega}{drdg}\right)$$
$$+ \frac{1+2e^2}{e}\left(\frac{d\Omega}{dg}\right) - \frac{a^2\cos\varphi}{er^2}(1+e^2-2e\cos\varepsilon)\left(\frac{d\Omega}{df}\right) - 2\frac{a^2}{r}e^2\sin\varepsilon\left(\frac{d\Omega}{dr}\right)$$

Addirt man diese Gleichung zur Gleichung für den Coefficienten $A$, und bedenkt dass

$$r\left(\frac{d^2\Omega}{drdg}\right) + \frac{a^2 e\sin\varepsilon}{r}\left(\frac{d\Omega}{dr}\right) = \left(\frac{d.r\left(\frac{d\Omega}{dr}\right)}{dg}\right)$$

ist, so wird

$$A = -\cos^2\varphi\left(\frac{d^2\Omega}{dedg}\right) - 2e\left(\frac{d.r\left(\frac{d\Omega}{dr}\right)}{dg}\right) - \frac{1}{e\cos\varphi}\left(\frac{d\Omega}{df}\right) + \frac{1+2e^2}{e}\left(\frac{d\Omega}{dg}\right)$$

Multiplicirt man (52) mit $\frac{1}{e}(1-e^2-2e\cos\varepsilon)$, und addirt (54) zum Product, so entsteht

$$0 = (2-e^2-e\cos\varepsilon)\sin\varepsilon\left(\frac{d^2\Omega}{dg^2}\right) - \cos^2\varphi\left(\frac{d^2\Omega}{dedg}\right) - (\cos\varepsilon + e)\, r\left(\frac{d^2\Omega}{drdg}\right)$$
$$+ \frac{1}{e}\left(\frac{d\Omega}{dg}\right) - \frac{a^2\cos\varphi}{er^2}(1-e^2-2e\cos\varepsilon)\left(\frac{d\Omega}{df}\right)$$

Subtrahirt man diese Gleichung von der Gleichung für $B$, so bekommt man

$$B = \cos^2\varphi\left(\frac{d^2\Omega}{dedg}\right) + \frac{3-2e^2}{3e\cos\varphi}\left(\frac{d\Omega}{df}\right) - \frac{1}{e}\left(\frac{d\Omega}{dg}\right)$$

Multiplicirt man (52) mit $\frac{r^2}{a^2 e}$, und differentiirt sie hierauf nach $g$, so wird

$$0 = \frac{r^2}{a^2 e}\left(\frac{d^2\Omega}{dg^2}\right) - \frac{\cos\varphi}{e}\left(\frac{d^2\Omega}{dfdg}\right) - r\sin\varepsilon\left(\frac{d^2\Omega}{drdg}\right)$$
$$+ 2\sin\varepsilon\left(\frac{d\Omega}{dg}\right) - \frac{a^2}{r}(e + \cos\varepsilon - 2e\cos^2\varepsilon)\left(\frac{d\Omega}{dr}\right) \quad . \qquad (55)$$

Multiplicirt man hierauf (52) mit $-2\sin\varepsilon$, und addirt dieses Product

9*

zur Summe aus (53) und (55), so kommt

$$0 = \frac{1}{e}(1 - 2e\cos\varepsilon + e^2\cos^2\varepsilon)\left(\frac{d^2\Omega}{dg^2}\right) - \frac{\cos\varphi}{e}\left(\frac{d^2\Omega}{dfdg}\right) - r\sin\varepsilon\left(\frac{d^2\Omega}{drdg}\right)$$
$$+ \left(\frac{d\Omega}{de}\right) + \frac{a^2 e\sin\varepsilon}{r^2\cos\varphi}(\cos\varepsilon - e)\left(\frac{d\Omega}{df}\right)$$

Die Addition dieser Gleichung zur Gleichung für $C$ giebt

$$C = \frac{\cos^2\varphi}{e}\left(\frac{d^2\Omega}{dg^2}\right) - \frac{\cos\varphi}{e}\left(\frac{d^2\Omega}{dfdg}\right) + \left(\frac{d\Omega}{de}\right)$$

Setzt man ferner

$$P = r\cos f\left(\frac{d\Omega}{dZ}\right); \quad Q = r\sin f\left(\frac{d\Omega}{dZ}\right)$$

so geben die Gleichungen für die Coefficienten $D$ und $E$ sogleich zu erkennen, dass

$$D = \left(\frac{dQ}{dg}\right); \quad E = \left(\frac{dP}{dg}\right)$$

ist. Substituirt man nun die eben gefundenen Ausdrücke der Coefficienten $A$, $B$, $C$, $D$ und $E$ in den Ausdruck für $\frac{d\delta W_0}{dt}$ des vor. Art., so bekommt man

$$\frac{d\delta W_0}{dt} = 9a^2n^3\left(\frac{d^2\Omega}{dg^2}\right)\iint\left(\frac{d\Omega}{dg}\right)dt^2 + 3a^2n^2\,\frac{1+2e^2}{e^2}\left(\frac{d\Omega}{dg}\right)\int\left(\frac{d\Omega}{dg}\right)dt$$
$$+ a^2n^2\,\frac{3-2e^2}{e^2\cos^2\varphi}\left(\frac{d\Omega}{df}\right)\int\left(\frac{d\Omega}{df}\right)dt + 3a^2n^2\left(\frac{d\Omega}{de}\right)\int\left(\frac{d\Omega}{de}\right)dt$$
$$- 3\,\frac{a^2n^2}{e^2\cos\varphi}\left\{\left(\frac{d\Omega}{df}\right)\int\left(\frac{d\Omega}{dg}\right)dt + \left(\frac{d\Omega}{dg}\right)\int\left(\frac{d\Omega}{df}\right)dt\right\}$$
$$+ 6a^2n^2\left\{\left(\frac{d^2\Omega}{dg^2}\right)\int r\left(\frac{d\Omega}{dr}\right)dt - \left(\frac{d.r\left(\frac{d\Omega}{dr}\right)}{dg}\right)\int\left(\frac{d\Omega}{dg}\right)dt\right\}$$
$$+ 3\,\frac{a^2n^2\cos\varphi}{e}\left\{\left(\frac{d^2\Omega}{dedg}\right)\int\left(\frac{d\Omega}{df}\right)dt - \left(\frac{d^2\Omega}{dfdg}\right)\int\left(\frac{d\Omega}{de}\right)dt\right\}$$
$$+ 3\,\frac{a^2n^2\cos^2\varphi}{e}\left\{\left(\frac{d^2\Omega}{dg^2}\right)\int\left(\frac{d\Omega}{de}\right)dt - \left(\frac{d^2\Omega}{dedg}\right)\int\left(\frac{d\Omega}{dg}\right)dt\right\}$$
$$+ 3\,\frac{a^2n^2}{\cos\varphi}\left\{\left(\frac{dP}{dg}\right)\int Q\,dt - \left(\frac{dQ}{dg}\right)\int P\,dt\right\}$$

ein Ausdruck, durch welchen leicht gezeigt werden kann, dass der obige zweite Satz statt findet.

70.

Sei nach der Entwickelung

$$\Omega = \Sigma k\cos(ig + i'g' + K)$$

wo $k$ und $K$ die durch die Entwickelung erlangten numerischen Werthe, und $i$ und $i'$ irgend zwei ganze Zahlen bedeuten, dann wird

$$\left(\frac{d^2\Omega}{dg^2}\right) = -\Sigma i^2 k \cos(ig + i'g' + K)$$
$$\iint\left(\frac{d\Omega}{dg}\right) dt^2 = \Sigma \frac{ik}{(in+i'n')^2} \sin(ig + i'g' + K)$$

Die Multiplication dieser Ausdrücke mit einander zeigt sogleich, dass im ersten Gliede des eben gefundenen Ausdrucks für $\frac{d\delta W_0}{dt}$ kein constantes Glied enthalten ist. Aus dem obigen Ausdruck für $\Omega$ bekommen wir ferner

$$\left(\frac{d\Omega}{dg}\right) = -\Sigma ik \sin(ig + i'g' + K)$$
$$\int\left(\frac{d\Omega}{dg}\right) dt = \Sigma \frac{ik}{in+i'n'} \cos(ig + i'g' + K)$$

aus deren Product wieder kein constantes Glied hervorgehen kann. Das zweite Glied des Ausdrucks für $\frac{d\delta W_0}{dt}$ enthält also auch kein constantes Glied, und da das dritte und vierte Glied dem zweiten völlig ähnlich sind, so können diese auch keine constanten Glieder enthalten. Sei ferner

$$\left(\frac{d\Omega}{df}\right) = \Sigma l \sin(ig + i'g' + L)$$

dann wird

$$\int\left(\frac{d\Omega}{df}\right) = -\Sigma \frac{l}{in+i'n'} \cos(ig + i'g' + L)$$

Die Verbindung dieser Ausdrücke mit den vorstehenden giebt, wenn wir blos auf die constanten Glieder Rücksicht nehmen,

$$\left(\frac{d\Omega}{df}\right)\int\left(\frac{d\Omega}{dg}\right) dt = \Sigma \frac{ikl}{in+i'n'} \sin(L - K)$$
$$\left(\frac{d\Omega}{dg}\right)\int\left(\frac{d\Omega}{df}\right) dt = \Sigma \frac{ikl}{in+i'n'} \sin(K - L)$$

in der Summe dieser beiden Ausdrücke heben sich, wie man sieht, die constanten Glieder, und folglich enthält das fünfte Glied von $\frac{d\delta W_0}{dt}$ auch kein constantes Glied. Die vier übrigen Glieder von $\frac{d\delta W_0}{dt}$ haben gleiche Form, und wir brauchen also nur Eins derselben, z. B. das letzte zu betrachten. Sei daher

$$P = \Sigma k' \cos(ig + i'g' + K')$$
$$Q = \Sigma l' \sin(ig + i'g' + L')$$

woraus

$$\int P dt = \Sigma \frac{k'}{in+i'n'} \sin(ig + i'g' + K')$$
$$\int Q dt = -\Sigma \frac{l'}{in+i'n'} \cos(ig + i'g' + L')$$

$$\left(\frac{dP}{dg}\right) = -\Sigma ik' \sin(ig + i'g' + K')$$
$$\left(\frac{dQ}{dg}\right) = \Sigma il \cos(ig + i'g' + L')$$

hervorgeht. Es wird also, wenn wir nur die constanten Glieder berücksichtigen,

$$\left(\frac{dP}{dg}\right)\int Qdt = \Sigma \frac{ik'l'}{in + i'n'} \sin(K' - L')$$
$$\left(\frac{dQ}{dg}\right)\int Pdt = \Sigma \frac{ik'l'}{in + i'n'} \sin(K' - L')$$

und in dem Unterschied dieser beiden Ausdrücke heben sich wieder die constanten Glieder.

Es ist hiemit der im Art. 66 aufgestellte Satz für die Quadrate der störenden Kräfte bewiesen.

71.

Um diesen Satz auch für die Producte der störenden Massen zu beweisen, kommen drei Gattungen von Gliedern in Betracht. Erstens sind die Glieder zu betrachten, die ein zweiter störender Planet in Verbindung mit den eben betrachteten Gliedern von $\Omega$ hervorbringen kann, und in Bezug auf diese ist der Beweis schon im Vorhergehenden enthalten. Denn die betreffenden Störungsglieder sind in diesem Falle mit

$$\frac{\cos}{\sin}\left\{ig + i''g'' + K''\right\}$$

multiplicirt, die in dem Ausdruck für $\frac{d\delta W_0}{dt}$ mit Gliedern von der Form

$$\frac{\cos}{\sin}\left\{ig + i'g' + K\right\}$$

verbunden werden müssen. Nun ist aber klar, dass die Verbindung von derartigen Gliedern nur dann überhaupt constante Glieder erzeugen kann, wenn

$$i' = 0 \text{ und zugleich } i'' = 0$$

ist, aber der Fall $i' = 0$ ist in den Ausdrücken des vor. Art. einbegriffen, und folglich ist der Satz auch für diese Gattung von Störungen schon bewiesen.

Zweitens kommen die Störungen in Betracht, die der hier als störender betrachtete Planet von dem gestörten erleidet. Da diese Störungen von denselben Argumenten abhängen, wie die bei den Quadraten der störenden Kräfte in Betracht gekommenen, aber die Coefficienten, womit sie multiplicirt sind, andere Werthe haben, so muss für diese

Störungen der Beweis besonders geführt werden. Streng genommen könnte ich hier diesen Beweis übergehen, da die kleinen Planeten, die den eigentlichen Gegenstand dieser Abhandlungen ausmachen, keinen merklichen Einfluss auf die übrigen ausüben, aber anderer Anwendungen wegen, deren die hier entwickelten Formeln fähig sind, werde ich den Beweis mit aufnehmen.

Drittens sind die Störungen zu betrachten, die der störende Planet von irgend einem anderen Planeten erleidet, da aber diese mit

$$\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\left\{i'g' + i''g'' + K_1\right\}$$

multiplicirt sind, so können sie überhaupt nur constante Glieder in $\frac{d\delta W_0}{dt}$ hervorbringen, wenn

$$i = 0 \text{ und } i'' = 0$$

sind, und dieser Umstand macht, wie man weiter unten sehen wird, ihre Betrachtung sehr einfach.

## 72.

Der Ausdruck (45) giebt in Bezug auf die hier zu betrachtenden, von den Producten der störenden Kräfte abhängigen, Glieder

$$\frac{d\delta W_0}{dt} = F_1 n'\delta z' + G_1 \nu' + H_1 \frac{u'}{\cos i'}$$

wo

$$F_1 = \frac{an}{r}F;\; G_1 = \frac{an}{r}G;\; H_1 = \frac{an}{r}H$$

ist. Zufolge des Art. 46 (I) haben wir sogleich

$$F_1 = \left(\frac{dT_1}{dg'}\right);\; G_1 = -V_1 - T_1$$

und wenn wir hier wieder nur die Glieder betrachten, die zufolge der Form (47) überhaupt nur constante Glieder bekommen können, so wird sogleich vermittelst der im Vorhergehenden entwickelten Ausdrücke

$$F_1 = -3an\left(\frac{d^2\Omega}{dg\,dg'}\right);\; G_1 = 3an\left(\frac{d.r\left(\frac{d\Omega}{dr}\right)}{dg}\right) + 3an\left(\frac{d\Omega}{dg}\right)$$

für welchen letzteren Ausdruck wir auch setzen dürfen

$$G_1 = -3anr'\left(\frac{d^2\Omega}{dr'\,dg}\right)$$

weil $\Omega$ eine homogene Function von $r$ und $r'$ von der Ordnung $-1$ ist. Der Ausdruck (72) (I) für $H$ giebt ferner sogleich zu erkennen, dass

$$H_1 = -3aa'n\left(\frac{d^2\Omega}{dZ'dg}\right)$$

ist. Hiemit wird im jetzigen Falle

$$(56) \quad . \quad . \quad \frac{d\delta W_0}{dt} = -3an\left(\frac{d^2\Omega}{dgdg'}\right)n'\delta z' - 3anr'\left(\frac{d^2\Omega}{dr'dg}\right)\nu' - 3aa'n\left(\frac{d^2\Omega}{dZ'dg}\right)\frac{u'}{\cos i'}$$

73.

Die im Art. 68 entwickelten Ausdrücke für $n\delta z$, $\nu$ und $u$ können wir ohne Weiteres auf $n'\delta z'$, $\nu'$ und $u'$ dadurch ausdehnen, dass wir alle Grössen, die sich darin auf den gestörten Planeten beziehen, in die dem störenden zukommenden verwandeln, und umgekehrt. Wir bekommen daher jetzt auf dieselbe Art wie oben zuerst

$$\begin{aligned}\frac{d\delta W_0}{dt} &= 9ana'n'^2\left(\frac{d^2\Omega}{dg'dg}\right)\int\!\!\int\left(\frac{d\Omega'}{dg'}\right)dt^2 + 6ana'n'\left(\frac{d^2\Omega}{dg'dg}\right)\int r'\left(\frac{d\Omega'}{dr'}\right)dt \\ &+ 3\frac{ana'n'}{e'}A'\int\left(\frac{d\Omega'}{dg'}\right)dt + 3\frac{ana'n'}{e'\cos\varphi'}B'\int\left(\frac{d\Omega'}{df'}\right)dt + 3ana'n'C'\int\left(\frac{d\Omega'}{de'}\right)dt \\ &- 3\frac{ana'n'}{\cos\varphi}D'\int r'\cos f'\left(\frac{d\Omega'}{dZ'}\right)dt - 3\frac{ana'n'}{\cos\varphi}E'\int r'\sin f'\left(\frac{d\Omega'}{dZ'}\right)dt\end{aligned}$$

wo zur Abkürzung

$$\begin{aligned}A' &= -(2-e'^2-e'\cos\varepsilon')\sin\varepsilon'\left(\frac{d^2\Omega}{dg'dg}\right) + (\cos\varepsilon'-e')r'\left(\frac{d^2\Omega}{dr'dg}\right) \\ B' &= (2-e'^2-e'\cos\varepsilon')\sin\varepsilon'\left(\frac{d^2\Omega}{dg'dg}\right) - (\cos\varepsilon'+e')r'\left(\frac{d^2\Omega}{dr'dg}\right) \\ C' &= -(e'-2\cos\varepsilon'+e'\cos^2\varepsilon')\left(\frac{d^2\Omega}{dg'dg}\right) + \sin\varepsilon'.r'\left(\frac{d^2\Omega}{dr'dg}\right) \\ D' &= r'\sin f'\left(\frac{d^2\Omega}{dZ'dg}\right);\quad E' = r'\cos f'\left(\frac{d^2\Omega}{dZ'dg}\right)\end{aligned}$$

gesetzt ist. Gehen wir nun hier von den Gleichungen

$$\begin{aligned}0 &= \left(\frac{d\Omega}{dg'}\right) - \frac{a'^2\cos\varphi'}{r'^2}\left(\frac{d\Omega}{df'}\right) - \frac{a'^2e'\sin\varepsilon'}{r'}\left(\frac{d\Omega}{dr'}\right) \\ 0 &= \left(\frac{d\Omega}{de'}\right) - \frac{a'^2\sin\varepsilon'}{r'^2\cos\varphi'}(2-e'^2-e'\cos\varepsilon')\left(\frac{d\Omega}{df'}\right) + \frac{a'^2}{r'^2}(\cos\varepsilon'-e')\left(\frac{d\Omega}{dr'}\right)\end{aligned}$$

aus, die den Gleichungen (52) und (53) analog sind, so finden wir auf dieselbe Art wie im Art. 69 die zwei folgenden Gleichungen

$$\begin{aligned}0 &= (2-e'^2-e'\cos\varepsilon')\sin\varepsilon'\left(\frac{d^2\Omega}{dg'dg}\right) - \cos^2\varphi'\left(\frac{d^2\Omega}{de'dg}\right) - (\cos\varepsilon'+e')r'\left(\frac{d^2\Omega}{dr'dg}\right) \\ 0 &= \frac{1}{e'}(1-2e'\cos\varepsilon'+e'^2\cos^2\varepsilon')\left(\frac{d^2\Omega}{dg'dg}\right) - \frac{\cos\varphi'}{e'}\left(\frac{d^2\Omega}{df'dg}\right) - r'\sin\varepsilon'\left(\frac{d^2\Omega}{dr'dg}\right)\end{aligned}$$

Addirt man die erste dieser zum Ausdruck für $A'$, subtrahirt sie vom Ausdruck für $B'$, und addirt man die zweite zum Ausdruck für $C'$, so bekommt man

$$A' = -\cos^2\varphi' \left(\frac{d^2\Omega}{de'dg}\right) - 2e'r'\left(\frac{d^2\Omega}{dr'dg}\right)$$
$$B' = \cos^2\varphi' \left(\frac{d^2\Omega}{de'dg}\right)$$
$$C' = \frac{\cos^3\varphi'}{e'}\left(\frac{d^2\Omega}{dg'dg}\right) - \frac{\cos\varphi'}{e'}\left(\frac{d^2\Omega}{df'dg}\right)$$

Substituirt man diese Ausdrücke, so wird

$$\begin{aligned}\frac{d\delta W_0}{dt} &= 9ana'n'^2\left(\frac{d^2\Omega}{dg'dg}\right)\iint\left(\frac{d\Omega'}{dg'}\right)dt^2 \\ &+ 6ana'n'\left\{\left(\frac{d^2\Omega}{dgdg'}\right)\int r'\left(\frac{d\Omega'}{dr'}\right)dt - r'\left(\frac{d^2\Omega}{dr'dg}\right)\int\left(\frac{d\Omega'}{dg'}\right)dt\right\} \\ &+ 3\frac{ana'n'\cos\varphi'}{e'}\left\{\left(\frac{d^2\Omega}{de'dg}\right)\int\left(\frac{d\Omega'}{df'}\right)dt - \left(\frac{d^2\Omega}{df'dg}\right)\int\left(\frac{d\Omega'}{de'}\right)dt\right\} \\ &+ 3\frac{ana'n'\cos^3\varphi'}{e'}\left\{\left(\frac{d^2\Omega}{dg'dg}\right)\int\left(\frac{d\Omega'}{de'}\right)dt - \left(\frac{d^2\Omega}{de'dg}\right)\int\left(\frac{d\Omega'}{dg'}\right)dt\right\} \\ &+ 3\frac{ana'n'}{\cos\varphi'}\left\{r'\cos f'\left(\frac{d^2\Omega}{dZ'dg}\right)\int r'\sin f'\left(\frac{d\Omega'}{dZ'}\right)dt - r'\sin f'\left(\frac{d^2\Omega}{dZ'dg}\right)\int r'\cos f'\left(\frac{d\Omega'}{dZ'}\right)dt\right\}\end{aligned}$$

Erwägen wir nun, dass

$$\Omega' = \frac{m}{m'}\Omega + m(xx' + yy' + zz')\left(\frac{1}{r'^3} - \frac{1}{r^3}\right)$$

ist, und substituiren zuerst $\frac{m}{m'}\Omega$ für $\Omega'$ in den vorstehenden Ausdruck, so besteht derselbe aus Gliedern, die dieselbe Form haben, wie die Glieder des Ausdrucks im Art. 69. Das Glied $\frac{m}{m'}\Omega$ von $\Omega'$ kann also kein constantes Glied in $\frac{d\delta W_0}{dt}$ hervorbringen, und es bleibt nur noch das zweite Glied des obigen Ausdrucks von $\Omega'$ zu betrachten übrig.

## 71.

In §. 3 ist gezeigt worden, dass die Differentialgleichungen für $n\delta z$, $\nu$ und $u$ an sich integrabel werden, wenn man

$$m(xx' + yy' + zz')\left(\frac{1}{r^3} - \frac{1}{r'^3}\right)$$

für $\Omega$ darin substituirt. Da es dieser Ausdruck ist, welcher hier substituirt werden muss, so können wir die dort gegebenen Integrale für unsern Zweck anwenden. Beziehen wir sie auf den störenden Planeten, so werden sie

$$n'\delta z' = m\frac{n'h'}{k^2}(yX' - xY')$$
$$\nu' = m\frac{n'h'}{k^2}\left(x\frac{dY'}{dg'} - y\frac{dX'}{dg'}\right)$$
$$\frac{a'u'}{\cos i'} = mz$$

wo

$$z = r \sin J \sin(f + \Pi)$$

gesetzt, und die Coordinaten überhaupt auf die ideale Bahnebene des störenden Planeten bezogen werden müssen. Dieser Lage der Coordinaten entspricht auch der im Art. 34 (I) aufgestellte Ausdruck für $\left(\frac{d\Omega}{dZ'}\right)$. Substituirt man nun die vorstehenden Ausdrücke in den Ausdruck (56), so wird dieser

$$\frac{d\delta W_0}{dt} = -3anm\frac{n'h'}{k^2}\left\{\left(\frac{d^2\Omega}{dgdg'}\right)(yX'-xY') + r'\left(\frac{d^2\Omega}{dgdr'}\right)\left(x\frac{dY'}{dg'} - y\frac{dX'}{dg'}\right)\right\}$$
$$-3anm\left(\frac{d^2\Omega}{dgdZ'}\right)z$$

Es ist aber

$$\left(\frac{d^2\Omega}{dgdg'}\right) = \left(\frac{d^2\Omega}{dgdX'}\right)\frac{dX'}{dg'} + \left(\frac{d^2\Omega}{dgdY'}\right)\frac{dY'}{dg'}$$
$$r'\left(\frac{d^2\Omega}{dgdr'}\right) = \left(\frac{d^2\Omega}{dgdX'}\right)X' + \left(\frac{d^2\Omega}{dgdY'}\right)Y'$$

substituirt man diese und erwägt, dass

$$\frac{k^2}{n'h'} = X'\frac{dY'}{dg'} - Y'\frac{dX'}{dg'}$$

ist, so wird

$$\frac{d\delta W_0}{dt} = -3anm\left\{\left(\frac{d^2\Omega}{dgdX'}\right)x + \left(\frac{d^2\Omega}{dgdY'}\right)y + \left(\frac{d^2\Omega}{dgdZ'}\right)z\right\}$$
$$= -3anm\left(\frac{d\,.\left\{\left(\frac{d\Omega}{dX'}\right)x + \left(\frac{d\Omega}{dY'}\right)y + \left(\frac{d\Omega}{dZ'}\right)z\right\}}{dg}\right)$$
$$+ 3anm\left\{\left(\frac{d\Omega}{dX'}\right)\frac{dx}{dg} + \left(\frac{d\Omega}{dY'}\right)\frac{dy}{dg} + \left(\frac{d\Omega}{dZ'}\right)\frac{dz}{dg}\right\}$$

Da das erste Glied dieses Ausdrucks ein vollständiges Differential nach $g$ ist, so kann es kein constantes Glied enthalten, aber auch das zweite Glied ist ein vollständiges Differential nach $g$, und kann deshalb auch kein constantes Glied enthalten. Um dieses zu zeigen, müssen wir den Ausdruck der Störungsfunction vornehmen, nemlich

$$\Omega = m'D - m'E$$

wo

$$D = \frac{1}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}};\quad E = \frac{xx' + yy' + zz'}{r'^3}$$

ist, und in welchem nach den Differentiationen nach $x'$, $y'$ und $z'$, $X'$ für $x'$, $Y'$ für $y'$ und $z' = 0$ gesetzt werden muss. Aus dem Ausdruck für $D$ geht hervor, dass

$$\left(\frac{dD}{dX'}\right) = -\left(\frac{dD}{dx}\right);\quad \left(\frac{dD}{dY'}\right) = -\left(\frac{dD}{dy}\right);\quad \left(\frac{dD}{dZ'}\right) = -\left(\frac{dD}{dz}\right)$$

ist, woraus

$$\left(\frac{dD}{dX'}\right)\frac{dx}{dg}+\left(\frac{dD}{dY'}\right)\frac{dy}{dg}+\left(\frac{dD}{dZ'}\right)\frac{dz}{dg}=-\left(\frac{dD}{dg}\right)$$

folgt. Da ferner

$$\left(\frac{dE}{dX'}\right)=\frac{x}{r'^3}-3\frac{X'}{r'^5}(xX'+yY')$$
$$\left(\frac{dE}{dY'}\right)=\frac{y}{r'^3}-3\frac{Y'}{r'^5}(xX'+yY')$$
$$\left(\frac{dE}{dZ'}\right)=\frac{z}{r'^3}$$

wird, so erhält man

$$\left(\frac{d\Omega}{dX'}\right)\frac{dx}{dg}+\left(\frac{d\Omega}{dY'}\right)\frac{dy}{dg}+\left(\frac{d\Omega}{dZ'}\right)\frac{dz}{dg}=-m'\left(\frac{dD}{dg}\right)$$
$$-\frac{m'}{r'^3}\frac{d\,(x^2+y^2+z^2)}{2dg}+\tfrac{3}{2}m'\frac{X'^2}{r'^5}\frac{d.x^2}{dg}+3m'\frac{X'Y'}{r'^5}\frac{d.xy}{dg}+\tfrac{3}{2}m'\frac{Y'^2}{r'^5}\frac{d.y^2}{dg}$$

Da nun die Coordinaten des störenden Planeten kein $g$ enthalten, so ist die linke Seite dieser Gleichung ein vollständiges Differential nach $g$. W. z. b. w.

Also auch die Störungen, die der gestörte Planet in der Bewegung des störenden hervorbringt, können in $\frac{d\delta W_0}{dt}$ kein constantes Glied hervorbringen.

In Bezug auf dritte im Art. 71 aufgezählte Gattung von Störungen wurde dort bemerkt, dass sie nur aus Gliedern der Differentialquotienten von $\Omega$, die folgende Form haben

$$k\cos(i'g'+K)$$

entstehen können, aber im Ausdruck (56) sind alle Differentialquotienten von $\Omega$ nach $g$ differentiirt, und die Glieder der genannten Form sind also in diesem Ausdruck nicht vorhanden. Es können also auch die Störungen, die der störende Planet von irgend einem dritten erleidet, in $\frac{d\delta W_0}{dt}$ kein constantes Glied hervorbringen.

## 75.

Im Vorhergehenden ist der Satz des Art. 66 vollständig bewiesen, und es ist also nur noch der Uebergang zu dem Satze des Art. 65 zu bewirken. Die einzigen Glieder, die hiebei in Betracht kommen, sind die, welche $g'$ nicht enthalten, und wir dürfen daher für den jetzigen Zweck, und mit Rücksicht auf die Form (47) setzen,

$$\frac{d\delta W_0}{dt}=nk_1\cos g+nk_2\cos 2g+nk_3\cos 3g+\text{etc.}$$
$$+(\cos\eta+\tfrac{1}{2}e)\{nl_0+nl_1\cos g+nl_2\cos 2g+nl_3\cos 3g+\text{etc.}\}\quad(57)$$

wo dem Vorhergehenden zufolge das constante Glied Null ist, und ich die mit den Sinussen multiplicirten Glieder weggelassen habe, weil sie auf keinen Fall in der jetzt zu betrachtenden Umwandelung ein constantes Glied hervorbringen können. Es ist nun

$$\frac{d\delta W_0}{d\varepsilon} = \frac{1}{n}\frac{d\delta W_0}{dt}(1 - e\cos\varepsilon)$$

und es ist also die Entwickelung der Functionen

$$(1 - e\cos\varepsilon)\cos ig$$

in Reihen zu betrachten, die nach den Cosinussen der Vielfachen der excentrischen Anomalie $\varepsilon$ fortschreiten. Bezeichnet man aber mit $y$ die zur excentrischen, und mit $z$ die zur mittleren Anomalie gehörige imaginäre Exponentialfunction, so habe ich früher bewiesen, dass ohne Ausnahme

$$\begin{aligned} z^i = J^{(i)}_{\frac{ie}{2}} + J^{(i-1)}_{\frac{ie}{2}}\, y + J^{(i-2)}_{\frac{ie}{2}}\, y^2 + \text{etc.} \\ + J^{(i+1)}_{\frac{ie}{2}}\frac{1}{y} + J^{(i+2)}_{\frac{ie}{2}}\frac{1}{y^2} + \text{etc.} \end{aligned}$$

ist, woraus

$$\begin{aligned} z^{-i} = J^{(i)}_{\frac{ie}{2}} + J^{(i+1)}_{\frac{ie}{2}}\, y + J^{(i+2)}_{\frac{ie}{2}}\, y^2 + \text{etc.} \\ + J^{(i-1)}_{\frac{ie}{2}}\frac{1}{y} + J^{(i-2)}_{\frac{ie}{2}}\frac{1}{y^2} + \text{etc.} \end{aligned}$$

folgt. Geht man zum Reellen über, so ergiebt sich

$$\cos ig = J^{(i)}_{\frac{ie}{2}} + \left\{J^{(i+1)}_{\frac{ie}{2}} + J^{(i-1)}_{\frac{ie}{2}}\right\}\cos\varepsilon + \left\{J^{(i+2)}_{\frac{ie}{2}} + J^{(i-2)}_{\frac{ie}{2}}\right\}\cos 2\varepsilon + \text{etc.}$$

und hieraus

$$\begin{aligned} (1 - e\cos\varepsilon)\cos ig = J^{(i)}_{\frac{ie}{2}} - \frac{e}{2}J^{(i+1)}_{\frac{ie}{2}} - \frac{e}{2}J^{(i-1)}_{\frac{ie}{2}} \\ + \left\{J^{(i+1)}_{\frac{ie}{2}} + J^{(i-1)}_{\frac{ie}{2}} - eJ^{(i)}_{\frac{ie}{2}} - \frac{e}{2}J^{(i+2)}_{\frac{ie}{2}} - \frac{e}{2}J^{(i-2)}_{\frac{ie}{2}}\right\}\cos\varepsilon + \text{etc.} \end{aligned}$$

Aber zwischen den $J$Functionen findet mit Ausnahme von $i = 0$ folgende Relation statt

$$0 = J^{(i)}_{\frac{ie}{2}} - \frac{e}{2}J^{(i+1)}_{\frac{ie}{2}} - \frac{e}{2}J^{(i-1)}_{\frac{ie}{2}}$$

Hieraus folgt, dass in den Entwickelungen der Functionen $(1 - e\cos\varepsilon)$ $\cos ig$ keine constanten Glieder vorhanden sind, wenn $i$ von Null verschieden ist. Die Verwandelung des obigen Ausdrucks (57) giebt also

$$\frac{d\delta W_0}{d\varepsilon} = \tfrac{1}{2}el_0 + l_0\cos\eta + \text{Gliedern anderer Form,}$$

und es verhält sich hier der Coefficient von $\cos\eta$ zum constanten Gliede wie 1 zu $\frac{1}{2}e$. W. z. b. w.

## 76.

### 3ter Satz.

„Die in der ersten Annäherung den Integralen hinzugefügten willkührlichen Constanten bringen in der Entwickelung von $\frac{d\delta W_0}{d\varepsilon}$ nach den Cosinussen und Sinussen der Vielfachen von $\varepsilon$ und $\eta$ sowohl constante Glieder, wie Glieder von der Form $knt$ und $k'nt \cos\eta$ hervor, in welchen die Coefficienten nicht in dem eben für die anderen Glieder gefundenen Verhältniss zu einander stehen."

Betrachten wir, um diesen Satz zu beweisen, zuerst wieder die Entwickelung von $\frac{d\delta W_0}{dt}$ nach den mittleren Anomalien. Die Function $\left(\frac{d\Omega}{dg}\right)$ hat kein constantes Glied, sei aber

$$n\int\left(\frac{d\Omega}{dg}\right)dt = p$$

dann ist $p$ die diesem Integral hinzugefügte willkührliche Constante. Sei ferner

$$n\int\left(\frac{d\Omega}{dg}\right)dt + \tfrac{3}{2}r\left(\frac{d\Omega}{dr}\right) = \pi$$

dann ist $\pi$ aus der willkührlichen Constante $p$ und dem in der Entwickelung von $r\left(\frac{d\Omega}{dr}\right)$ entstehenden constanten Gliede zusammengesetzt. Seien ferner in den übrigen, in dem Ausdruck des Art. 69 unter dem Integralzeichen stehenden, Functionen die durch die Entwickelungen entstehenden constanten Glieder die folgenden,

$$\left(\frac{d\Omega}{df}\right) = \alpha; \quad \left(\frac{d\Omega}{de}\right) = \beta;$$
$$P = \theta; \qquad Q = \varkappa;$$

dann geben die Integrale

$$n\int\left\{n\int\left(\frac{d\Omega}{dg}\right)dt + \tfrac{3}{2}r\left(\frac{d\Omega}{dr}\right)\right\}dt = \pi nt + q$$
$$n\int\left(\frac{d\Omega}{df}\right)dt = \alpha nt + 6; \quad n\int\left(\frac{d\Omega}{de}\right)dt = \beta nt + c$$
$$n\int P dt = \theta nt + h; \quad n\int Q dt = \varkappa nt + k$$

wo $p$, $q$, $6$, $c$, $h$, $k$ die sechs willkührlichen Constanten sind, die zufolge der Grundzüge der Integralrechnung jedenfalls mit den in der That im §. 5 eingeführten willkührlichen Constanten identificirt werden können.

Betrachten wir nun wieder die Ausdrücke der Art. 69 und 73 für $\frac{d\delta W_0}{dt}$, so zeigt sich sogleich, dass die in diesen mit einem Differential nach $g$ multiplicirten Glieder keine Glieder von der im Satze genannten Form hervorbringen können, indem in den Differentialquotienten nach $g$ keine ähnlichen vorhanden sind. Es können also namentlich die beiden eben $h$ und $k$ genannten Constanten keine derartigen Glieder einführen. Anders verhält sich die Sache aber in Bezug auf die drei folgenden Glieder des Ausdrucks von $\frac{d\delta W_0}{dt}$ im Art. 69:

$$a^2n^2\frac{3-2e^2}{e^3\cos^2\varphi}\left(\frac{d\Omega}{df}\right)\int\left(\frac{d\Omega}{df}\right)dt+3a^2n^2\left(\frac{d\Omega}{de}\right)\int\left(\frac{d\Omega}{de}\right)dt$$
$$-3\frac{a^2n^2}{e^3\cos\varphi}\left(\frac{d\Omega}{df}\right)\int\left(\frac{d\Omega}{dg}\right)dt$$

Diese geben, nachdem die obigen Werthe der Differentialquotienten und der Integrale darin substituirt worden sind,

$$\frac{d\delta W_0}{dt}=a^2n\frac{3-2e^2}{e^3\cos^2\varphi}(\alpha^2nt+\alpha b)+3a^2n(\beta^2nt+\beta c)-3\frac{a^2n}{e^3\cos\varphi}\alpha p$$

und diese sind die einzigen Glieder dieser Art, die vorkommen können, denn in allen übrigen Gliedern von $\frac{d\delta W_0}{dt}$ sind die Integrale mit Differentialquotienten nach $g$ multiplicirt.

Da wir nun im vor. Art. gesehen haben, dass in der Entwickelung von $\frac{d\delta W_0}{dt}$ das Verhältniss $\frac{1}{2}e$ zu 1 zwischen dem constanten Gliede und dem Coefficienten des mit $\cos\eta$ multiplicirten vom Nichtvorhandensein des constanten Gliedes in $\frac{d\delta W_0}{dt}$ bedingt war, so kann für die vorstehenden Glieder dieses Verhältniss nicht statt finden, wie auch die Coefficienten von $\cos\eta$ und $t\cos\eta$ beschaffen sein mögen. W. z. b. w.

## 77.

Multipliciren wir den eben entwickelten Ausdruck mit $dt$ und integriren, so wird

$$\overline{\delta W_0}=a^2\frac{3-2e^2}{e^3\cos^2\varphi}(\tfrac{1}{2}\alpha^2n^2t^2+\alpha bnt)+3a^2(\tfrac{1}{2}\beta^2n^2t^2+\beta cnt)-\frac{3a^2}{e^3\cos\varphi}\alpha pnt$$

und es scheint daher, dass diese Glieder in $n\delta z$ Glieder hervorbringen würden, die dem Quadrat und dem Cubus der Zeit proportional wären. Aber dass dieses nicht der Fall ist, zeigt der folgende

4te Satz.

„In der Entwickelung von $\frac{d\delta z}{d\varepsilon}$ nach den Cosinussen und Sinussen der Vielfachen von $\varepsilon$ sind die aus den im Vorhergehenden betrachteten Gliedern entstehenden, und bez. $t$ und $t^2$ proportionalen, Glieder gleich Null."

Da zufolge des Art. 75 in den Entwickelungen der Functionen $(1-e\cos\varepsilon)\cos ig$ keine constanten Glieder vorhanden sind, so ist klar, dass der obige Satz bedingt, dass auch in der Entwickelung von $\frac{d\delta z}{dt}$ nach den Cosinussen und Sinussen der mittleren Anomalie $g$ keine $t$ und $t^2$ proportionalen Glieder enthalten seien. Wir brauchen also blos dieses zu beweisen. Da nun aber die Gleichung (40) (I)

$$\frac{d\delta z}{dt} = \overline{\delta W_0} + \left(\frac{\overline{dW_0}}{dy}\right) n\delta z + \nu^2$$

giebt, und der betreffende Ausdruck von $\overline{\delta W_0}$ schon zu Anfang dieses Art. gegeben ist, so brauchen wir nur noch die beiden letzten Glieder des vorstehenden Ausdrucks zu entwickeln.

Substituiren wir die im vor. Art. gegebenen Ausdrücke der Integrale in die Ausdrücke für $n\delta z$ und $\nu$, die im Art. 68 entwickelt worden sind, so wird

$$\begin{aligned} n\delta z = &- 3a(\pi nt + q) \\ &+ \frac{a}{e}(2-e^2-e\cos\varepsilon)\sin\varepsilon\left(p - \frac{\alpha nt+\theta}{\cos\varphi}\right) + a(e-2\cos\varepsilon+e\cos^2\varepsilon)(\beta nt+c) \\ \nu = &\ \tfrac{1}{2}ap + \frac{a}{2\cos\varphi}(\alpha nt + \theta) \\ &- \frac{a}{e}(\cos\varepsilon + \tfrac{1}{2}e)\left(p - \frac{\alpha nt+\theta}{\cos\varphi}\right) - a\sin\varepsilon(\beta nt + c) \end{aligned}$$

und da man hier $\left(\frac{\overline{dW_0}}{dy}\right)$ erhält, wenn man den a. a. O. entwickelten Ausdruck für $\frac{d\delta z}{dt}$ ausserhalb der Integralzeichen nach $g$ differentiirt und mit $dg$ dividirt, so ergiebt sich

$$\left(\frac{\overline{dW_0}}{dy}\right) = -\frac{2a^2\sin\varepsilon}{er}\left(p - \frac{\alpha nt+\theta}{\cos\varphi}\right) + \frac{2a^2\cos\varepsilon}{r}(\beta nt + c)$$

Multiplicirt man diesen Ausdruck mit dem vorstehenden Ausdruck von $n\delta z$, erhebt den von $\nu$ ins Quadrat, und nimmt blos auf die Glieder Rücksicht, die Glieder hervorbringen können, die $t$ und $t^2$ proportional sind, so wird zuerst

$$\left(\overline{\frac{dW_0}{d\gamma}}\right) n\delta z = -6\frac{a^3\cos\varepsilon}{r}(\beta nt + c)(\pi nt + q)$$
$$-\frac{2a^3}{e^2 r}(2 - e^2 - e\cos\varepsilon)\sin^2\varepsilon\left(p - \frac{\alpha nt + \sigma}{\cos\varphi}\right)^2$$
$$+\frac{2a^3}{r}(e - 2\cos\varepsilon + e\cos^2\varepsilon)\cos\varepsilon(\beta nt + c)^2$$

oder

$$\left(\overline{\frac{dW_0}{d\gamma}}\right) n\delta z = -6\frac{a^3\cos\varepsilon}{r}(\beta nt + c)(\pi nt + q)$$
$$-\frac{2a^3}{e^2}\left(\frac{a\sin^2\varepsilon}{r}\cos^2\varphi + \sin^2\varepsilon\right)\left(p - \frac{\alpha nt + \sigma}{\cos\varphi}\right)^2$$
$$+\frac{2a^3}{e}\left(\frac{r\cos\varepsilon}{a} - \frac{a\cos\varepsilon}{r}\cos^2\varphi\right)(\beta nt + c)^2$$

und

$$\nu^2 = \frac{a^2}{4}\left(3p + \frac{\alpha nt + \sigma}{\cos\varphi}\right)^2$$
$$+\frac{a^2}{e^2}(\cos^2\varepsilon + e\cos\varepsilon + \tfrac{1}{4}e^2)\left(p - \frac{\alpha nt + \sigma}{\cos\varphi}\right)^2$$
$$+ a^2\sin^2\varepsilon(\beta nt + c)^2$$

wo in den Coefficienten nur die constanten Glieder, die ihre Entwickelung nach den Cosinussen der Vielfachen von $g$ giebt, beibehalten werden dürfen. Da

$$\frac{\cos\varepsilon}{r} = \frac{d.\sin\varepsilon}{adg}$$

ist, so enthält die Entwickelung dieser Function kein constantes Glied. Da ferner

$$\frac{a\sin^2\varepsilon}{r} = \frac{a}{2r} - \frac{a\cos 2\varepsilon}{2r} = \frac{a}{2r} - \frac{d.\sin 2\varepsilon}{4dg}$$

und in der Entwickelung von $\frac{a}{r}$ das constante Glied $= 1$ ist, so ist $\frac{1}{2}$ das constante Glied in $\frac{a\sin^2\varepsilon}{r}$. Da ferner in der Entwickelung von $\cos i\varepsilon$ für $i = 1$ das constante Glied $= -\frac{1}{2}e$, und für $i > 1$ das constante Glied Null ist, so ergeben sich leicht die constanten Glieder der Entwickelung der übrigen in den beiden obigen Ausdrücken vorkommenden Coefficienten. Es folgt hieraus leicht, dass die folgenden Werthe substituirt werden müssen.

$$\frac{\cos\varepsilon}{r} = 0$$
$$\frac{a\sin^2\varepsilon}{r} = \frac{1}{2}$$
$$\sin^2\varepsilon = \frac{1}{2}$$
$$\frac{r}{a}\cos\varepsilon = -e$$
$$\cos^2\varepsilon = \frac{1}{2}$$
$$e\cos\varepsilon = -\frac{1}{2}e^2$$

und mit bloser Bezugnahme auf die $t$ und $t^2$ proportionalen Glieder wird daher

$$\overline{\left(\frac{dW_0}{dy}\right)} n\delta z = -\frac{2a^2(2-e^2)}{e^2\cos^2\varphi}\left(\tfrac{1}{2}\alpha^2 n^2 t^2 + \alpha 6nt\right) - 4a^2\left(\tfrac{1}{2}\beta^2 n^2 t^2 + \beta cnt\right) + \frac{2a^2(2-e^2)}{e^2\cos\varphi}\,\alpha pnt$$

$$\nu^2 = \frac{a^2}{e^2\cos^2\varphi}\left(\tfrac{1}{2}\alpha^2 n^2 t^2 + \alpha 6nt\right) + a^2\left(\tfrac{1}{2}\beta^2 n^2 t^2 + \beta cnt\right) - \frac{a^2(1-2e^2)}{e^2\cos\varphi}\,\alpha pnt$$

also

$$\overline{\left(\frac{dW_0}{dy}\right)} n\delta z + \nu^2 = -\frac{a^2(3-2e^2)}{e^2\cos^2\varphi}\left(\tfrac{1}{2}\alpha^2 n^2 t^2 + \alpha 6nt\right) - 3a^2\left(\tfrac{1}{2}\beta^2 n^2 t^2 + \beta cnt\right) + \frac{3a^2}{e^2\cos\varphi}\,\alpha pnt$$

Vergleicht man diesen Ausdruck mit dem obigen Ausdruck für $\delta\overline{W_0}$, so findet man

$$\delta\overline{W_0} + \overline{\left(\frac{dW_0}{dy}\right)} n\delta z + \nu^2 = 0$$

W. z. b. w.

Da man in der Berechnung der Störungen nach der hier erklärten Methode $\frac{d\delta z}{dt}$ zuvor, und darauf erst $\frac{d\delta z}{d\varepsilon}$ bekommt, so will ich noch auf folgenden Satz aufmerksam machen.

### 5ter Satz.

„In der Entwickelung von $\frac{d\delta z}{dt}$ nach den Cosinussen und Sinussen der Vielfachen von $\varepsilon$, verhalten sich die Coefficienten der $t$ und $t^2$ proportionalen Glieder zu denen von $t\cos\varepsilon$ und $t^2\cos\varepsilon$ wieder wie $\frac{1}{2}e$ zu 1."

welcher eine nothwendige Folge des vierten Satzes ist. Denn da zufolge dieses Satzes die Coefficienten der $t$ und $t^2$ proportionalen Glieder in $\frac{d\delta z}{d\varepsilon}$ gleich Null sind, und

$$n\frac{d\delta z}{d\varepsilon} = (1 - e\cos\varepsilon)\frac{d\delta z}{dt}$$

ist, so muss nothwendig

$$\frac{d\delta z}{dt} = \tfrac{1}{2}eft + \tfrac{1}{2}ef't^2 + ft\cos\varepsilon + f't^2\cos\varepsilon + \text{etc.}$$

sein, wo $f$ und $f'$ die durch die Rechnung erhaltenen numerischen Coefficienten bedeuten. Denn wenn diese Relation nicht statt fände, so würden nach der Multiplication mit $1 - e\cos\varepsilon$ die $t$ und $t^2$ proportionalen Glieder nicht Null sein können.

78.

Im Vorhergehenden ist somit bewiesen, dass die in $\left(\frac{d\delta W_0}{d\varepsilon}\right)$ entstehenden constanten und $t$ proportionalen, so wie die in $\left(\frac{\overline{dW_0}}{d\gamma}\right)n\delta z$ und $\nu^2$ entstehenden $t$ und $t^2$ proportionalen Glieder zur Säcularänderung der mittleren Länge nichts beitragen, sondern sich gegen einander aufheben. Sollte sich daher in der Rechnung, wegen der Unrichtigkeit der letzten Decimalstelle diese Aufhebung nicht vollständig zeigen, so muss man dennoch diese Glieder im Resultat weglassen.

Es folgt hieraus, dass die Säcularänderung der mittleren Länge nur aus den Gliedern entstehen kann, die $\eta$ neben $\varepsilon$ enthalten. Setzen wir

$$\frac{d\delta W_0}{d\varepsilon} = knt \sin(\eta - \varepsilon)$$

wo $k$ der durch die Entwickelungen zu berechnende numerische Coefficient ist, der nur aus sehr wenigen Gliedern zusammen gesetzt ist, so wird

$$\delta\overline{W}_0 = knt$$

und

$$n\delta z = \int \frac{r}{a} \delta\overline{W}_0 d\varepsilon = \tfrac{1}{2}kn^2t^2$$

wenn wir hier die in den Integralen mit entstehenden Glieder anderer Form weglassen. Da ausserdem nur kleinere Glieder dieser Form entstehen können, so ist

$$\tfrac{1}{2}kn^2t^2$$

das Hauptglied der Säcularänderung der mittleren Länge, wenn man die Grössen von der Ordnung der Cuben und der höheren Potenzen der störenden Kräfte übergeht.

## §. 8. Integration der in den Breitenstörungen aus der Variation des Factors cos $i$ entstehenden Glieder.

79.

Im Art. 48 (I) wurde der folgende allgemeine Ausdruck für die von den Quadraten und Producten der störenden Kräfte abhängigen Breitenstörungen gegeben,

$$\frac{d\delta R_0}{d\varepsilon} = A''\frac{an\delta z}{r} + B''\nu + C''\delta\frac{h}{h_0} + D''\frac{u}{\cos i} + E''\frac{u_1}{\cos i} + F''n'\delta z' + G''\nu' + H''\frac{u'}{\cos i'}$$

und die Ausdrücke für die Coefficienten $A''$, $B''$, etc. abgeleitet. Es gab sich hiebei zu erkennen, dass die Ausdrücke für die Coefficienten $D''$ und $E''$ aus zwei Theilen von verschiedener Form bestehen, die dort mit $D''_1$, $E''_1$ und $D''_2$, $E''_2$ bezeichnet wurden. Der erste Theil eines jeden dieser beiden Coefficienten rührt von der Veränderung der Störungsfunction her, während der andere Theil aus der Veränderung des Factors $\cos i$ entsteht, womit der strenge Ausdruck des Differentials der Breitenstörungen multiplicirt ist. Ich will diesem zufolge hier das Differential von $\delta R_0$ in die zwei entsprechenden Theile theilen, und diese mit $d\delta_1 R_0$ und $d\delta_2 R_0$ bezeichnen, so dass

$$\frac{d\delta_1 R_0}{dt} = A''\frac{an\delta z}{r} + B''\nu + C''\delta\frac{h}{h_0} + D''_1\frac{u}{\cos i} + E''_1\frac{u_1}{\cos i} + F''n'\delta z' + G''\nu' + H''\frac{u'}{\cos i'}$$

$$\frac{d\delta_2 R_0}{dt} = D''_2\frac{u}{\cos i} + E''_2\frac{u'}{\cos i'}$$

wird. Hierauf bekommt man nach der Integration

$$\delta R_0 = \delta_1 R_0 + \delta_2 R_0$$

und setzt man nach der Verwandelung von $\eta$ in $\varepsilon$

$$\delta_1 u = \overline{\delta_1 R_0};\; \delta_2 u = \overline{\delta_2 R_0}$$

so wird

$$\delta u = \delta_1 u + \delta_2 u$$

80.

Ich werde jetzt zeigen, dass der Ausdruck von $d\delta_2 R_0$ theils an sich integrabel ist, theils auf die im Art. 10 (I) mit $\Gamma$ bezeichnete Function hingeführt werden kann. Im Art. 48 (I) wurde gefunden

$$D''_2 = -\frac{\varrho r^2}{a\cos^2\varphi}\sin(\omega - f)\{\sin(f + \pi - \theta) + e\sin(\pi - \theta)\}\left(\frac{d\Omega}{dZ}\right)\sin i$$

$$E''_2 = -\frac{\varrho r^2}{a\cos^2\varphi}\sin(\omega - f)\cos(f + \pi - \theta)\left(\frac{d\Omega}{dZ}\right)\sin i$$

substituirt man diese Werthe, und geht durch die Gleichung $d\varepsilon = \frac{a}{r}ndt$ zum Differential nach $t$ über, so wird zuerst

$$\frac{d\delta_2 R_0}{dt} = -\frac{n\varrho r}{\cos^2\varphi}\sin(\omega - f)\left(\frac{d\Omega}{dZ}\right)\sin i\left\{[\sin(f + \pi - \theta) + e\sin(\pi - \theta)]\frac{u}{\cos\varphi\cos i} + \cos(f + \pi - \theta)\frac{u_1}{\cos i}\right\}$$

Da hier $u = \frac{r}{a}s$ ist, so giebt der im Art. 9 (I) gegebene Ausdruck für $s$,

$$u = q\frac{r}{a}\sin(f + \pi - \theta) - p\frac{r}{a}\cos(f + \pi - \theta) \quad . \quad . \quad . \quad (58)$$

woraus man durch die Differentiation nach $\varepsilon$ erhält,

$$u_1 = q\frac{r}{a\cos\varphi}[\cos(f+\pi-\theta)+e\sin(\pi-\theta)] + p\frac{r}{a\cos\varphi}[\sin(f+\pi-\theta)+e\sin(\pi-\theta)]$$

Durch die Elimination von $p$ ergiebt sich aus diesen beiden Gleichungen

$$(59)\quad q = \frac{u}{\cos^2\varphi}[\sin(f+\pi-\theta)+e\sin(\pi-\theta)] + \frac{u_1}{\cos\varphi}\cos(f+\pi-\theta)$$

Aus Art. 10 (I) erhalten wir ferner

$$\frac{dp}{dt} = \frac{an}{\cos\varphi}r\sin(f+\pi-\theta)\left(\frac{d\Omega}{dZ}\right)\cos i$$
$$\frac{dq}{dt} = \frac{an}{\cos\varphi}r\cos(f+\pi-\theta)\left(\frac{d\Omega}{dZ}\right)\cos i$$

und durch Hülfe dieser drei Gleichungen wird

$$\frac{d\delta_2 R_0}{dt} = -\left\{\frac{\varrho}{a}\sin(\omega+\pi-\theta)\,q\frac{dq}{dt} - \frac{\varrho}{a}\cos(\omega+\pi-\theta)\,q\frac{dp}{dt}\right\}\frac{\sin i}{\cos^2 i}$$

Das erste Glied dieses Ausdrucks ist an sich integrabel, und für die Integration des zweiten bemerke ich, dass identisch

$$\int q\,dp = \tfrac{1}{2}pq + \tfrac{1}{2}\int(q\,dp - p\,dq)$$
$$= \tfrac{1}{2}pq + \Gamma\cos^2 i$$

zufolge Art. 10 (I). Integrirt man daher und verwandelt darauf $\varrho$ in $r$ und $\omega$ in $f$, so wird

$$\delta_2 u = -\left\{q\frac{r}{a}\sin(f+\pi-\theta) - p\frac{r}{a}\cos(f+\pi-\theta)\right\}\frac{q}{2\cos^2 i}\sin i$$
$$+\Gamma\frac{r}{a}\cos(f+\pi-\theta)\cos i\sin i$$

oder nach der Substitution der Ausdrücke (58) und (59) für $u$ und $q$,

$$\delta_2 u = -\frac{u^2}{2\cos^2 i}\cdot\frac{\sin(f+\pi-\theta)+e\sin(\pi-\theta)}{\cos^2\varphi}\sin i - \frac{uu_1}{2\cos^2 i}\cdot\frac{\cos(f+\pi-\theta)}{\cos\varphi}\sin i$$
$$+\Gamma\frac{r}{a}\cos(f+\pi-\theta)\cos i\sin i$$

wo zufolge (23) (I)

$$\Gamma = \frac{1}{2\cos\varphi\cos i}\int\frac{r}{a}\cdot\frac{u}{\cos i}\cdot a^2\left(\frac{d\Omega}{dZ}\right)d\varepsilon$$

ist. Hiemit ist die oben angekündigte Integration ausgeführt. Wir haben im Art. 59 gesehen, dass für die Egeria in $\frac{u}{\cos i}$ der grösste Coefficient $= 95''5$ ist, hieraus folgt, dass der grösste Coefficient in $\frac{u^2}{2\cos^2 i}$ und $\frac{uu_1}{2\cos^2 i}$ sehr nahe $= 0''01$ ist, die beiden ersten Glieder von $\delta_2 u$ sind also in unserm Beispiel selbst in dem Falle, dass man die Fundamentalebene so wählen wollte, dass $\sin i$ nahe gleich Eins würde, unmerklich, und dieses ist daher um so mehr der Fall, wenn man die Ecliptik oder den Aequator als Fundamentalebene annimmt. Es wird sich in der Folge in Bezug auf das dritte Glied von $\delta_2 u$ nahe dasselbe herausstellen.

# ELEKTRISCHE UNTERSUCHUNGEN

VON

**W. G. HANKEL.**

**ZWEITE ABHANDLUNG**

## ÜBER DIE THERMOELEKTRISCHEN EIGENSCHAFTEN DES BORACITES.



Bekanntlich entdeckte schon Hauy die Eigenschaft des Boracites durch Temperaturänderungen elektrisch zu werden; aber abweichend von den bis dahin bekannten thermoelektrischen Krystallen des Turmalins, brasilianischen Topases und Kieselzinkerzes, welche sämmtlich nur eine elektrische Axe zeigten, glaubte er an dem Boracite vier elektrische Axen in symmetrischer Lage gegen den Würfel annehmen zu müssen. Jede dieser vier Axen legte Hauy durch zwei einander diametral entgegengesetzte Würfelecken (eine abgestumpfte und eine nicht abgestumpfte), und fand in ihren Richtungen die elektrischen Kräfte dergestalt vertheilt, dass derjenige Eckpunkt einer Axe, welcher abgestumpft war, positive, der gegenüberliegende nicht abgestumpfte dagegen negative Elektricität darbot.

Die vorstehenden Angaben Hauy's über die Vertheilung der Elektricität an Boracitwürfeln mit abwechselnd abgestumpften Ecken beziehen sich nur auf das Auftreten derselben während des Erkaltens nach mässiger Erhitzung. Dass die Polaritäten der verschiedenen Ecken beim Erhitzen in gleicher Weise wie beim Turmalin die umgekehrten von den beim Erkalten auftretenden sein würden, unterlag wohl keinem Zweifel; als beobachtete Thatsache scheint indess diese Umkehrung doch erst von Gross*) angeführt zu werden. Nach ihm sollen auch, wenn an den Boracitkrystallen sich die Flächen beider Tetraeder finden, beim Erkalten die stärker abgestumpften Ecken jedes Mal positiv, die weniger abgestumpften negativ sein.

Die eben namhaft gemachte Regel über die Polarität der Würfelecken würde indess nicht in allen Fällen zutreffen, indem es Boracitwürfel gibt, bei welchen die beim Erkalten negativen Ecken die grös-

*) Nach Volger, Versuch einer Monographie des Boracits (Hannover 1855) S. 28

seren Tetraederflächen tragen. Köhler*) hat deshalb zur unzweideutigen Bestimmung der in den einzelnen Würfelecken auftretenden Elektricitäten den Unterschied in der Oberflächenbeschaffenheit der Tetraederflächen benutzt. Wenn nämlich bei einem Boracitkrystalle die Flächen beider Tetraeder vorhanden sind, so zeigen sich die Flächen des einen glatt und glänzend, die des andern dagegen matt. Diejenigen vier Ecken des Boracitwürfels, zu denen glatte Tetraederflächen gehören (mögen sie an einer Ecke ausgebildet sein oder nicht), sind beim Erwärmen negativ, beim Erkalten positiv, während auf den übrigen vier Ecken, denen die matten Tetraederflächen entsprechen, gerade die umgekehrte Polarität beobachtet wird.

Alle bisher erwähnten Beobachtungen scheinen nur bei wenig hohen Temperaturen angestellt worden zu sein.

Schon Canton fand, wie Priestley in seiner Geschichte der Elektricität erwähnt, dass, als er einen Turmalin in drei Stücke zerbrach, jedes der erhaltenen Bruchstücke gerade wie der ganze Turmalin zwei elektrische Pole zeigte, eine Erscheinung, die auch bei noch weiterer Zerkleinerung des Turmalins beobachtet werden kann. Gleiches gilt von den übrigen durch Temperaturänderungen elektrisch werdenden, sogenannten thermoelektrischen Krystallen.

Man hat deshalb einen thermoelektrischen Krystall, z. B. einen Turmalin, nicht unpassend mit einem Magnete verglichen. So wie aber ein Magnet seine Eigenschaften nur der magnetischen Vertheilung in seinen sämmtlichen Molecülen verdankt, ebenso ist auch die an einem thermoelektrischen Krystalle wahrnehmbare Elektricität nur ein Ausdruck seiner sämmtlichen in elektrische Vertheilung getretenen Molecüle. Bei einem Magnetstabe nimmt die anziehende Kraft von den Enden nach der Mitte hin ab, und in ähnlicher Weise scheint sich auch, wenigstens nach den bisherigen Angaben, im Allgemeinen (besondere Versuche fehlen noch) die Stärke der Elektricität an der Oberfläche eines Turmalins zu verhalten, wenn seine Temperatur steigt oder fällt.

Viel verwickelter als am Turmalin gestalten sich aber die thermoelektrischen Erscheinungen am Boracit. In den vier Eckpunkten jeder Würfelfläche hat, wie oben erwähnt, Hauy vier elektrische Pole gefunden, und man durfte mit Rücksicht auf die eigenthümlichen krystallo-

*) Poggendorff's Annalen Bd. 17. 150.

graphischen Verhältnisse dieses Minerals nicht ohne Weiteres behaupten, dass von sämmtlichen Ecken aus die Intensitäten der vier elektrischen Pole in gleicher Weise nach der Mitte der Fläche hin abnehmen würden, dergestalt dass diese Mitte selbst keine Elektricität besässe.

Durch solche Erwägungen ward ich schon im Jahre 1835 veranlasst, die Beantwortung der Frage nach dem elektrischen Verhalten der Flächen eines Boracitwürfels zu versuchen. Es ergab sich aus den damaligen Beobachtungen, dass die Mitten der Würfelflächen in der That nicht ohne Elektricität waren, dass vielmehr auch auf ihnen eine eigenthümliche Elektricitätserregung wahrgenommen werden konnte.

Als ich dann, um die oft schwache elektrische Intensität in der Mitte der Würfelflächen der Boracitkrystalle zu verstärken, höhere Temperaturen anwandte, bemerkte ich eine eigenthümliche Unregelmässigkeit in der Vertheilung der beiden Elektricitäten unter die Ecken des Würfels, woraus bei genauerer Untersuchung die schon 1840 von mir in meiner Habilitationsdissertation (*Quaestionis de thermoelectricitate crystallorum pars altera,* Halle 1840) und bald darauf im 50. Bd. S. 471 ff. von Poggendorff's Annalen veröffentlichte Entdeckung hervorging, dass sämmtliche elektrische Pole des Boracits sowohl beim Erwärmen als auch beim Erkalten eine zweifache Umkehrung oder einen zweifachen Wechsel in der Beschaffenheit der an ihnen auftretenden Elektricitäten zeigen.

Die wunderbaren Umkehrungen in den elektrischen Polen der Würfelecken nahmen damals mein Interesse sehr in Anspruch, und lenkten die Aufmerksamkeit zum Theil von der ursprünglichen Frage nach dem elektrischen Verhalten der Flächen ab. Jene Umkehrungen oder Wechsel sind wiederholt Gegenstand der Erörterung zwischen den Herren Riess und Rose*), welche anfangs ihre Existenz bezweifeln zu müssen glaubten, und mir**) gewesen; ihr Vorhandensein als normale elektrische Erscheinung an den Boracitkrystallen steht jetzt unbestritten fest.

Aber nicht nur an den Würfelecken wurden bei steigender und sinkender Temperatur Umkehrungen der elektrischen Polaritäten beob-

---

*) Ueber die Pyroelektricität der Mineralien von Riess und Rose, Abhandlungen der Berliner Akademie vom Jahr 1843, S. 84; im Auszuge in Poggendorff's Annalen Bd. 59, S. 376. Ferner Pogg. Ann. Bd. 61, S. 659.

**) Pogg. Ann. Bd. 56, S. 58; Bd. 61, S. 281; Bd. 74, S. 231.

achtet: ein Gleiches geschah auch mit den Elektricitäten in der Mitte der Würfelflächen, oder was diesen gleichbedeutend, in den Octaederecken eines Rhombendodekaeders.

Indess boten die Würfelflächen oder die genannten Octaederecken in ihren Elektricitätsentwickelungen anscheinend mannichfache Anomalien dar; so wurde durch das damals angewandte Verfahren z. B. bei einem Rhombendodekaeder an drei um eine Würfelecke gelegenen Octaederecken nach einer bestimmten Erhitzung beim Abkühlen ein doppelter Wechsel beobachtet, während die drei übrigen nur einen einfachen darboten, aber zuletzt, als ihre Temperatur fast auf die des Zimmers herabgesunken war, sich unelektrisch zeigten, woraus ich damals auf eine bei noch weiterer Erniedrigung eintretende Umkehrung in der Beschaffenheit ihrer Elektricitäten schliessen zu dürfen glaubte.

Ganz eigenthümlich (wenigstens für damals) verhielt sich ein grosser Boracitwürfel (in der vorliegenden Abhandlung als Nr. I bezeichnet), dessen Untersuchung ich im Auszuge in Poggendorff's Annalen Bd. 50 mitgetheilt habe. Wenn derselbe mit einer Fläche auf einem Bleche lag oder in einem Ringe stand (in welchem letztern Falle drei Würfelkanten mit ihrer Mitte den Ring berührten, während die untere Ecke das Blech erreichte): so waren selbst die Würfelecken beim Abkühlen nicht immer, wie sonst gewöhnlich, abwechselnd positiv und negativ, sondern bisweilen zeigten alle nach oben gewandten nebst den zugehörigen Flächen eine und dieselbe Elektricität.

Betrachten wir indess die in Poggendorff's Annalen Bd. 50, S. 484—493 mitgetheilten Versuche über die Vertheilung der Elektricitäten auf den Flächen und Ecken dieses grossen Boracitwürfels, z. B. beim Erwärmen, genauer, so finden wir zwischen sämmtlichen 14 Versuchsreihen die vollständigste Uebereinstimmung.

Nehmen wir zuerst die Versuchsreihen auf S. 484—486, in welchen der Krystall mit einer Würfelfläche auf dem erhitzten Metallbleche lag, so finden wir in allen 6 Reihen, bei denen der Krystall succesive auf allen 6 Würfelflächen lag, die jedesmalige obere Würfelfläche nebst den 4 obern Würfelecken erst als +, dann als — und darauf wieder als + bezeichnet. Der Krystall war vor jeder Versuchsreihe erwärmt worden; die in jenen Tabellen zuerst verzeichnete positive Elektricität ist daher nichts Anderes, als die Elektricität, welche zu Ende der Erkaltung eintritt. Sie war also auf allen nach oben gewandten Würfel-

flächen sammt den 4 zugehörigen Ecken positiv. Durch den Eintritt der Erwärmung zeigten dann sämmtliche genannte Theile erst negative und darauf infolge des eingetretenen ersten Wechsels positive Elektricität. Die selbstständige Elektricitätserregung ist hiernach auf allen Flächen des Würfels eine und dieselbe, so dass zwischen den einander diametral gegenüber liegenden Flächen kein polarer Gegensatz statt findet.

Dasselbe bestätigen auch die gleich darauf in demselben Bande S. 488—493 mitgetheilten Versuchsreihen, bei welchen der Würfel in der vorhin angegebenen Weise auf einer Ecke in einem Ringe stand. Die Tabellen über die sämmtlichen 8 Versuchsreihen, wo der Krystall successive auf allen 8 Ecken stand, enthalten übereinstimmend erst + und dann —. Die zuerst verzeichnete positive Elektricität ist wieder nichts Anderes, als die noch von dem vorhergehenden Erkalten herrührende, während die dann folgende negative der steigenden Erwärmung angehört. Da der Krystall die Metallunterlage nur in wenigen Punkten berührte, so konnte seine Temperatur nicht so hoch gesteigert werden, dass ein Wechsel eintrat; bei den vorhergehenden Versuchen, wo der Krystall auf einer Fläche lag, gelang es die Temperatur so weit zu steigern, dass der erste Wechsel sich zeigte. Wir werden im Laufe der folgenden Untersuchung sehen, dass unter geeigneten Umständen an diesem Krystalle auch der zweite Wechsel erscheint.

Ich will gleich hier bemerken, dass die in den citirten Tabellen mitgetheilten Versuche vollkommen mit den weiterhin in dieser Abhandlung aufgeführten neuern übereinstimmen. Sämmtliche Beobachtungen ergeben also auf den Würfelflächen dieses Krystalles zwar eine eigenthümliche Elektricitätsentwickelung, aber keinen polaren Gegensatz zwischen den gegenüber liegenden Flächen.

Dagegen konnte man aus den in Poggendorff's Annalen Bd. 56, S. 59 erwähnten an einem sehr kleinen Boracitwürfel (der in dieser Abhandlung als Krystall Nr. VI aufgeführt werden wird) angestellten Beobachtungen einen solchen polaren Gegensatz der diametral gegenüber liegenden Flächen wohl entnehmen; es zeigte sich nämlich bei der damals angewandten Untersuchungsmethode eine Gleichheit je dreier um eine Würfelecke gelegenen Flächen, und zwar schienen diese Flächen so angeordnet, dass wenn die durch die beiden Würfelecken, um welche respective die einen und die andern drei gleichnamigen Flächen lagen, gehende Axe vertical stand, die drei obern Würfelflächen mit

den unterhalb der Spitze in einer horizontalen Ebene gelegenen drei seitlichen Würfelecken zu Ende des Erkaltens gleichnamig waren, während die drei untern Flächen wieder mit den untern drei seitlichen in einer horizontalen Ebene liegenden Würfelecken gleiche Elektricität darboten. Wäre also z. B. die obere Ecke während des Erkaltens positiv, und hätte man der leichtern Uebersicht wegen die in den verschiedenen Lagen des Krystalles beobachteten Elektricitäten auf einen Würfel mit verschiedenen Farben aufgetragen, so würde auf die obere positiv elektrische Spitze eine horizontale negative aus drei Würfelecken und drei Würfelflächen gebildete Zone folgen, unter dieser eine horizontale positive, drei Würfelecken und Flächen umfassende Zone liegen und endlich die untere Spitze mit negativer Elektricität schliessen. In solcher Weise habe ich für diesen speciellen Fall (Pogg. Ann. Bd. 56, S. 60) die Vertheilung der Elektricität auf den Würfelflächen angegeben, und mit ihr auch die früher (Annalen Bd. 50, S. 482) an einem Rhombendodekaeder beobachtete verglichen. Mit ihr würde ebenfalls die weiterhin angeführte Vertheilung auf den Würfeln Nr. IV und Nr. X übereinstimmen.

Indess muss ich bemerken, dass bei sehr vielen Krystallen eine oder zwei Flächen eine schwächere Polarität zeigen, als die übrigen. Während für letztere die Bestimmung leicht ausführbar ist, hält es öfter sehr schwer, die Polarität der erstern ganz unzweifelhaft festzustellen. So war auch z. B. an dem kleinen Würfel Nr. VI in den frühern Versuchsreihen die eine der beim Erkalten positiven Flächen schwächer elektrisch als die beiden andern. Nach den jetzt von mir angewandten vollkommneren Versuchen, wo ich alle Störungen möglichst ausgeschlossen habe, ist, wie später noch angeführt werden wird, auf dieser Fläche zu Ende des Erkaltens nicht schwache positive, sondern vielmehr negative Elektricität beobachtet worden.

Volger führt (Pogg. Ann. Bd. 93, S. 512) eine andere Vertheilung als von ihm an den Boracitkrystallen vom Kalkberge bei Lüneburg (Würfel mit Rhombendodekaeder und Tetraeder) beobachtet an; er fand drei positive und drei negative Würfelflächen, aber anders, als zuvor angegeben, angeordnet. Er sagt: Die Untersuchung der Elektricität an diesen Krystallen ergab, „dass alle drei analogen (d. h. bei der Abkühlung, wobei allein nach seiner Methode beobachtet werden konnte, negativen) Würfelflächen eine analoge Tetraederfläche (oder Würfelecke)

umgeben, die drei antilogen (d. h. beim Abkühlen positiven) Würfelflächen aber eine antiloge Tetraederfläche.“ Indess gelang es ihm nicht (Versuch einer Monographie des Boracits S. 146) an allen Krystallen die eben angegebene Vertheilung nachzuweisen.

Dagegen beobachtete Volger (Versuch u. s. w. S. 144) eine starke, und zwar beim Erwärmen negative und beim Erkalten positive Elektricität auf den kleinen lebhaft glänzenden Würfelflächen, welche die Kanten der tetraedrischen Krystalle vom Schildsteine abstumpfen. Ueber die Elektricität der Ecken und Flächen des Tetraeders drückt er sich so aus (S. 145): „Die Ecken der Timpelboracit-Krystalle (Tetraeder) schienen bei einigen Versuchen deutliche Beweise eines solchen Verhaltens (d. h. beim Erwärmen +, beim Abkühlen —) zu geben; es liegen hier die analogen + Timplingsflächen (die matten Tetraederflächen) und die Knöchlingsflächen (Rhombendodekaederflächen). Das Verhalten der Mittelpunkte der grossen Flächen war dagegen durchaus nicht klar zu ermitteln; vermuthlich stimmte es mit den Würflingsflächen überein, ward aber überboten durch die Anhäufung der nämlichen Elektricität in den Kanten und den auf diesen liegenden Würfelflächen; mit Hülfe eines geeigneten Instrumentes, welches mir nicht zu Gebote stand, dürfte man bestimmtere Resultate hoffen.“

## Neue Versuche zur Bestimmung des thermoelektrischen Verhaltens der Boracitkrystalle.

Bei dem grossen Interesse, das sich an die eigenthümlichen elektrischen Verhältnisse des Boracites knüpft, habe ich mich im Laufe der Jahre vielfach bemüht, so wie Zeit und vorhandenes Material an Krystallen es gestatteten, die Frage über die Vertheilung der Elektricität auf den Ecken und namentlich auf den Flächen dieses Minerals zu entscheiden.

Da ich bei diesen fortgesetzten Untersuchungen auf einzelnen Flächen, welche eine unter Umständen nur geringe oder zweifelhafte Elektricitätserregung zeigten, beim Ende der Abkühlung bisweilen schwache positive, ein anderes Mal aber wohl ganz entgegengesetzt schwache negative Elektricität beobachtete, so hielt ich es anfangs nicht für unmöglich, dass stärkere Erhitzungen, wie sie die damals angewandten Krystalle bisweilen erlitten hatten, eine Aenderung in den elektrischen

Vertheilungen hervorgerufen haben könnten; ein Gedanke, der bei den Modificationen, welche manche Boracite in ihrer Structur und Zusammensetzung zeigen, wohl nicht zu fern lag. Im Allgemeinen scheint aber kein solcher verändernder Einfluss selbst ziemlich hoher Temperaturen vorhanden zu sein, wodurch jedoch keinesweges ausgeschlossen werden soll, dass nicht in einzelnen Fällen unter speciellen Umständen durch öfter wiederholte hohe Erhitzung, wenn auch nicht die Beschaffenheit, so doch vielleicht die Intensität der erregten Elektricitäten vermindert werden kann. Die oben erwähnten Beobachtungen gerade entgegengesetzter Elektricitäten hatten in einer wirklichen gesetzmässigen Umkehrung ihren Grund. Während die ausgesprochene Besorgniss, nicht durch starke Erhitzungen künstlich erzeugte elektrische Zustände zu beobachten, mich eine Zeit lang bewog, vorzugsweise bis dahin noch nicht erhitzte Krystalle zu meinen Versuchen zu wählen, und bei denselben zunächst die Temperatur nicht über die Siedehitze des Wassers steigen zu lassen, habe ich später mich wieder veranlasst gesehen, wenigstens einen Theil der Krystalle selbst beträchtlich hohen Temperaturen auszusetzen.

Die Resultate aller dieser, theils nur bei niedrigen Temperaturen ausgeführten, theils bis zu hohen Wärmegraden ausgedehnten Versuche werde ich im Folgenden nach kurzer Erläuterung des dabei angewandten Verfahrens mittheilen.

## Verfahren bei der Untersuchung des thermoelektrischen Verhaltens der Boracitkrystalle.

Das zur Untersuchung dienende Verfahren war dem schon früher in Poggendorff's Annalen Bd. 74, S. 233 beschriebenen ähnlich. Auf die obere schüsselförmige Vertiefung eines kleinen 7 Zoll hohen und 4 Zoll weiten, mit einem 11 Zoll langen Schornsteine versehenen und durch eine hineingesetzte Spirituslampe erhitzten Ofens aus Eisenblech ward Eisenfeile geschüttet und in diese eine kleine halbkugelförmige Messingschale möglichst tief eingedrückt. Diese messingene Halbkugel enthielt Platinsand, in welchen die Boracitkrystalle bis zu der gerade gewünschten Tiefe eingehüllt wurden. Ich wählte Platinsand, um stets eine metallische Ableitung für die eingetauchten Ecken und Flächen der Krystalle zu erhalten und doch jedem Beschmutzen der Flächen durch

Anhängen von Oxyden oder durch Abfärben der Metalle vorzubeugen. Das Metall des Ofens war zur Ableitung der ihm mitgetheilten Elektricität durch einen Kupferdraht mit dem Blitzableiter des Universitätsgebäudes in Verbindung. Neben der kleinen messingenen Halbkugel stand ein bis zum Siedepunkte des Quecksilbers gehendes Thermometer mit dem untern Theile seines cylindrischen Gefässes in der Eisenfeile, so dass ich durch seinen Stand wenigstens im Allgemeinen über den Fortgang der Erhitzung und Abkühlung Kunde erhielt. Bei genau unter denselben Umständen angestellten Versuchsreihen konnten seine Angaben auch selbst als Mittel zur Vergleichung derselben unter einander dienen.

Je nachdem eine Ecke, Kante oder Fläche untersucht werden sollte, ward der ganze Krystall mit Ausschluss des zu untersuchenden Theiles in den Platinsand eingehüllt, und durch letztern also die an den bedeckten Stellen der Krystalloberfläche auftretende Elektricität möglichst abgeleitet, so dass allein die aus dem Metallsande hervorragenden Theile ihre Elektricität behielten. Sollten, was in manchen Versuchsreihen stets zwischen zwei auf einander folgenden Beobachtungen geschah, auch diese Theile für einen Augenblick ihrer Elektricität beraubt werden, so geschah solches nach dem Vorgange von Riess und Rose durch Hinblasen der Flamme eines in einem Drahte befestigten und in Spiritus getauchten Bäuschchens Baumwolle.

Um die an den freien Theilen erregte Elektricität zum Elektrometer zu führen, diente ein in Glas eingeschmolzener und mit Schellack an einem messingenen Griffe befestigter Platindraht, dessen unteres Ende einem bestimmten Punkte des Krystalles genähert wurde, während von dem andern oberen Ende ein dünner spiralförmig gewundener Kupferdraht zu dem Stifte des Elektrometers ging, an welchem das Goldblättchen hing. Zur Beobachtung der Elektricitäten benutzte ich das in den Berichten der physikalisch-mathematischen Klasse von 1850 und in Pogg. Ann. Bd. 84, S. 28 beschriebene, in dem ersten Theile meiner elektrischen Untersuchungen (Bd. V der Abhandlungen S. 393) mit A. bezeichnete Elektrometer. Es hat zwar anfangs seine grossen Schwierigkeiten, mit dem einen Auge durch das Mikroskop die Stellung des Goldblättchens zu beobachten und zugleich den in der Hand gehaltenen Draht einer bestimmten Stelle des erhitzten Krystalles zu nähern oder dieselbe damit zu berühren, besonders weil der Ofen, auf welchem der Krystall liegt, dem Elektrometer nicht zu nahe gebracht werden darf,

um durch seine Wärmeausstrahlung nicht zu störenden Luftströmungen Veranlassung zu geben; erhält indess die Hand die nöthige Unterstützung, und liegt der Krystall nur soviel seitwärts, dass man durch blosses Wenden der Augen oder wenigstens durch geringe Bewegungen des Kopfes bald in das Mikroskop, bald nach dem Krystall blicken kann, so gelingt jene Annäherung oder Berührung sehr leicht, wenn die zu treffende Stelle nicht gar zu klein ist.

Mit der Spitze des Platindrahtes können nun die verschiedenen Stellen der freigebliebenen Oberfläche des Krystalles auf zweierlei Weise untersucht werden: entweder wird die Drahtspitze der betreffenden Stelle nur genähert oder mit derselben in Berührung gebracht.

Das letztere Verfahren kann aber zu Irrthümern Veranlassung geben. Wenn z. B. gegen Ende einer starken Erhitzung die Temperatur nur langsam steigt, oder schon stationär geworden ist, so wird durch die Berührung mit dem kalten Drahte eine augenblickliche Abkühlung an der berührten Stelle hervorgerufen, wodurch möglicherweise eine Elektricitätsentwickelung entsteht, wie sie bei dieser Temperatur nicht der Erwärmung, sondern vielmehr der Abkühlung angehört; und es ist öfter bei der angestrengtesten Aufmerksamkeit nicht leicht, diese durch Abkühlung erzeugte Elektricitätserregung zu erkennen. Ist die Elektricitätserregung stark genug, um wenigstens bei sehr grosser Annäherung des Platindrahtes noch einen geringen Ausschlag zu geben, so lässt sich gewöhnlich aus der Bewegung des Goldblättchens entscheiden, ob ein starker Ausschlag desselben als Folge einer Abkühlungswirkung betrachtet werden muss oder nicht. Es sei z. B. die untersuchte Ecke eines Krystalles bei fast stationärer hoher Temperatur negativ; wird derselben die Spitze des kalten Platindrahtes behutsam genähert, so sieht man bei genauer Beobachtung das Goldblättchen zuerst eine kleine Bewegung im Sinne der negativen Elektricität machen, dann aber, sobald die Erkaltung durch die Berührung mit dem kalten Drahte merklich zu werden beginnt, durch die entstehende entgegengesetzte positive Elektricität stark nach der positiven Seite hin abgelenkt werden, und auch nach dem Abheben des Drahtes in dieser abgelenkten Stellung verharren. — Ebenso können in der Beurtheilung des Zustandes einer Ecke oder Fläche beim Erkalten Fehler, wenn auch unbedeutendere, begangen werden. Gesetzt, eine Ecke sei während der Abkühlung bei noch hoher Temperatur positiv, es genüge aber schon eine Temperaturernie-

drigung von wenigen Graden, um die Umkehrung der positiven Elektricität in die negative herbeizuführen: so wird eine Berührung dieser Ecke mit einem kalten dicken Drahte unter sonst geeigneten Umständen eine solche Umkehrung zur Folge haben. Während der dieser Ecke nur genäherte Draht noch positive Elektricität durch Vertheilung erhält, würde derselbe bei der Berührung von ihr bereits negative empfangen. Dass diese Vorgänge je nach der grössern oder geringern Masse des Krystalles oder der Ausdehnung der untersuchten Fläche modificirt werden, braucht wohl nicht speciell hervorgehoben zu werden.

Indess sind die Elektricitätserregungen bei der Berührung sehr stark erhitzter Boracitkrystalle nicht einmal so einfach, wie es nach dem Vorstehenden zu sein scheint. Da jedoch dieselben mit dem ganzen elektrischen Verhalten dieser Krystalle genau zusammenhängen, so ist es nicht möglich, sie hier schon vollständig darzulegen; ich muss daher ihre weitere Erörterung auf einen spätern Abschnitt, wo uns das elektrische Verhalten der Boracitkrystalle vollständig bekannt sein wird, versparen.

Des Vorwurfs, dass das Berühren leicht durch ungeschicktes Anlegen des Drahtes zur Entstehung von Reibungselektricität Veranlassung geben kann, möchte ich kaum gedenken, weil jeder vorsichtige Beobachter solche grobe Fehler sicherlich zu vermeiden wissen wird.

Trotz der oben gegen die Methode des Berührens gemachten Einwendungen ist man bei thermoelektrischen Untersuchungen aber doch bisweilen durch die Schwäche der auf dem Krystalle erzeugten Elektricität gezwungen, den Platindraht bis zur Berührung dem zu prüfenden Punkte zu nähern; in solchen Fällen kann es zweckmässig sein, den Platindraht fein zu zuspitzen und demselben auch wohl noch zuvor durch Eintauchen in den heissen Platinsand eine höhere Temperatur zu ertheilen, um seine abkühlende Wirkung möglichst zu vermindern. Indess setzt die Anwendung einer Spitze voraus, dass man geeignete Mittel angewendet habe, um sicher zu sein, eine bestimmte Stelle ohne Reibung zu berühren. Ohne Anwendung einer Loupe ist es, wenn das vor dem Oculare des Mikroskops befindliche Auge nur von fernher nach der Drahtspitze blickt, bei Anwendung einer sehr feinen Spitze, die man nicht gut erkennen kann, fast unmöglich, die Reibung zu vermeiden.

Während einerseits die obigen Erörterungen zeigen, in welcher Weise Irrthümer vermieden werden können, gibt andererseits die Ver-

gleichung der beim Erwärmen und Abkühlen erhaltenen Resultate in den meisten Fällen eine Art von Controle für die Richtigkeit derselben. Ich will indess gleich hier bemerken, dass ich mich, wo es irgend möglich war, niemals mit Beobachtung der Erscheinungen bei der Berührung begnügt, sondern die Elektricitäten durch blosses Annähern geprüft habe. Wo im Folgenden von Beobachtungen der Elektricität schlechthin die Rede ist, müssen stets nur beim Annähern ausgeführte darunter verstanden werden; war eine Berührung absolut nothwendig, so habe ich nicht vergessen dies anzumerken.

Das im Vorstehenden beschriebene Verfahren vereinigt zwei wesentliche Vorzüge: 1) ist der Beobachter des Ausschlages im Elektrometer zugleich auch derjenige, welcher die Drahtspitze dem Krystalle nähert, und 2) kann derselbe unmittelbar nach einander verschiedene Stellen des Krystalles untersuchen.

Wer nur einigermassen mit krystallelektrischen Versuchen vertraut ist, weiss, wie wichtig der zuerst genannte Vorzug ist, um bei schwachen Ausschlägen über die Beziehungen zwischen den mittelst der Hand ausgeführten Bewegungen des Platindrahtes und der Art und Stärke der dadurch erregten Elektricität völlig ins Klare zu kommen. Sind indess die Krystalle nur klein und schwach elektrisch, und sollen gewisse Punkte derselben bei der Berührung mit der Spitze des Drahtes genau getroffen werden, so bleibt Nichts übrig, als mit Aufgeben eines der beiden zuvor erwähnten Vorzüge das bisherige Verfahren etwas abzuändern.

Das nächstfolgende Verfahren ist z. B. öfter zur Untersuchung kleiner Tetraeder angewandt worden, bei denen die Würfelflächen auf den Kanten, sowie die Tetraederflächen auf den Ecken so klein waren, dass sie nur bei günstigem Lichtreflexe mit blossen Augen erkannt werden konnten. Unter diesen Umständen liess sich eine genaue Berührung derselben allein unter Anwendung einer stark vergrössernden Loupe ausführen, weshalb auch eine solche in einem Drahtringe befestigt vor dem im Platinsande befindlichen Krystalle aufgestellt wurde. Um das Gesichtsfeld möglichst gross zu erhalten, musste ich das Auge der Loupe stark nähern; die in dieser Stellung für das Gesicht unerträgliche Wärmestrahlung des sehr heissen eisernen Ofens ward durch eine zwischen die Loupe und das Auge gebrachte Glasplatte von gehöriger Grösse beseitigt. Während ich selbst unter der Loupe die Spitze des Platindrahtes

in gewünschter Weise dem Krystalle näherte, und durch verabredete Zeichen den Augenblick des Annäherns oder Berührens, sowie des Entfernens kundgab, wurde von einem Assistenten die Bewegung des Goldblättchens im Elektrometer beobachtet und zugleich mit der zuvor abgelesenen Temperatur des Thermometers notirt.

Bei diesem Verfahren war es ebenso wie bei dem frühern möglich, verschiedene Stellen des Krystalles rasch nach einander zu prüfen, was erwähntermassen in vielen Fällen ausserordentlich vortheilhaft ist. Will man sich aber dieses Vortheils begeben, so lässt sich wieder eine solche Einrichtung treffen, dass der Beobachter des Goldblättchens im Elektrometer auch gleichzeitig die Annäherung oder Berührung mit eigener Hand ausführt. Man nimmt einen um eine nicht zu kurze horizontale Axe zwischen Spitzen drehbaren Hebel, befestigt an dem einen Arme desselben den Glasstab mit dem Platindrahte, und bewegt den andern Arm mit der Hand auf und nieder. Die Grenzen beider Bewegungen des Hebels sind durch Stellschrauben so zu reguliren, dass die Spitze des Platindrahtes sich einerseits bis auf einen gewissen Abstand von dem Krystalle entfernen, andererseits demselben aber nur bis auf eine gewisse Weite nähern oder ihn auch soeben noch berühren kann. Die genaue Einstellung des Hebels, so dass die Drahtspitze einen bestimmten Punkt des Krystalles trifft, oder demselben gegenübersteht, geschieht am besten unter der Loupe. Es ist zweckmässig, die Einrichtung dergestalt zu treffen, dass eine Feder den Hebel stets vom Krystalle entfernt, und dabei zugleich das obere Ende des Platindrahts gegen einen zur Erde abgeleiteten Draht andrückt, so dass infolge dieser Ableitung jede Ladung des Platindrahtes und des Goldblättchens vollständig verschwindet. Wird der Platindraht durch die entgegengesetzte Bewegung des Hebels dem Krystalle wieder genähert, so trennt er sich von dem zur Erde führenden Ableitungsdrahte, und ist wieder isolirt.

Dies letzte Verfahren kann noch einen Vortheil gewähren, der mittelst der beiden vorhergehenden sich nicht in gleichem Grade erreichen lässt; es gestattet nämlich in gewissem Sinne eine Messung der Elektricitäten. Nehmen wir an, dass die Erhitzung des kleinen eisernen Ofens, in dessen schüsselförmiger Vertiefung der Boracitkrystall liegt, und ebenso die Erwärmung des seitlich von ihm befindlichen Hebels keine Veränderungen in der gegenseitigen Lage des Krystalles und der Spitze des Platindrahtes erzeugten, dass also die zu Anfang einer Ver-

suchsreihe eingestellte Annäherung der Drahtspitze an einen bestimmten Punkt des Krystalles unverändert erhalten würde: so kann der im Elektrometer infolge der elektrischen Vertheilungswirkung auf den genäherten Draht entstehende Ausschlag als ein Maass für die in diesem Punkte und seinen Umgebungen vorhandene freie Elektricität dienen. Man kann dabei den Krystall von Anfang bis zu Ende der Beobachtungen unberührt lassen, ihm aber auch vor jeder Annäherung des Drahtes erst die auf seiner unbedeckten Oberfläche angehäufte Elektricität durch die Flamme entziehen. In jedem Falle gibt der Ausschlag des Goldblättchens ein Maass für die Summe der zur Zeit der Annäherung des Drahtes entstehenden Elektricität und des Restes der aus den vorhergehenden Zeitmomenten übrig gebliebenen. Auf diese Weise lässt sich also die Stärke der Elektricität bei einer Versuchsreihe in den verschiedenen Perioden des Erwärmens und Erkaltens relativ bestimmen. Wollte man für verschiedene Punkte des Krystalles unter einander vergleichbare Messungen erhalten, so müsste in allen Versuchen die Drahtspitze dem Krystalle auf gleiche Weise genähert, und die Gestalt der durch Vertheilung wirkenden Oberfläche gleich gemacht werden; es würden z. B. die durch Annähern des Drahtes an eine spitze Ecke entstehenden Ausschläge nicht mit denen vergleichbar sein, welche die Annäherung an eine Fläche liefert; dagegen könnten für die auf zwei Würfelflächen eines und desselben Krystalles erregten Elektricitäten vergleichbare Ausschläge genommen werden, wenn ausser gleicher Annäherung der Drahtspitze auch die vom Platinsande nicht bedeckten Theile der Oberfläche eine gleiche Grösse erhielten.

Wird die Drahtspitze bis zur Berührung genähert, so ist allerdings die Bedingung einer gleichen Nähe erfüllt; durch die abkühlende Wirkung des Drahtes entstehen aber Störungen, so dass, wo es irgend möglich, die Messungen durch blosses Annähern den Vorzug verdienen. Während beim blossen Annähern das Goldblättchen sofort eine feste Ablenkung erreicht, ändert sich dieselbe in gewissen Zeitpunkten mit der Dauer der Berührung, und nimmt je nach den Umständen zu oder ab, verwandelt sich auch wohl in die gerade entgegengesetzte.

In Betreff der Berührung des Krystalles durch Anlegen der Drahtspitze mittelst des Hebels muss ich noch folgende Bemerkung beifügen. Wenn eine dem blossen Auge glatt erscheinende Würfelfläche senkrecht von der Spitze des Drahtes getroffen wird, so bleibt das mit dem Drahte

verbundene Elektrometer unbewegt. Diesgilt aber nicht mehr, wenn zufällig die Spitze die Seitenfläche einer kleinen Unebenheit trifft, und an dieser, wenn auch nur ausserordentlich wenig, hingleitet. Als z. B. in einem Falle eine rauhe Fläche mittelst der Hebelvorrichtung berührt wurde, zeigte das Elektrometer schwache negative Elektricität. Allerdings war die berührte Fläche zu Ende der Abkühlung negativ; zwischen der letzten Erhitzung und der eben erwähnten Beobachtung lagen aber mehr als 12 Stunden, so dass die wahrgenommene negative Elektricität wohl nur in dem Abgleiten der Drahtspitze von einer kleinen Erhöhung ihren Grund hatte. Ueberhaupt ist es nöthig, die Spitze des Drahtes mittelst des Hebels langsam dem Krystalle zu nähern, und nicht gegen denselben zu schlagen.

Auch wenn man nicht die Absicht hat, Messungen der Elektricität auszuführen, ist es doch zweckmässig, stets die Grösse der Ausschläge mit aufzuzeichnen, indem ihre Ab- und Zunahme öfter Vorgänge andeutet, welche unbekannt geblieben sein würden, falls man blos die Qualität und nicht auch die Quantität der Ausschläge in Betracht gezogen hätte. So kann z. B. die allmählige Ab- und darauf folgende Zunahme eines positiven Ausschlages beim Erkalten auf zwei den statt findenden Temperaturgraden entsprechende Umkehrungen aus + in —, und wieder zurück aus — in + hinweisen. Bei sorgfältigen speciell in dieser Absicht angestellten Versuchen gelingt es dann auch gewöhnlich, die fraglichen Umkehrungen auf demselben Punkte oder einem andern analogen desselben oder eines ähnlichen Krystalles nachzuweisen.

Schliesslich gestattet die Einrichtung des benutzten Elektrometers *A* die beschriebene Hebelvorrichtung noch zu einem vierten Verfahren, bei welchem gleichfalls eine Messung der Elektricität möglich ist, zu verwenden. Man setzt die Spitze des Platindrahtes mittelst des Hebels dauernd auf die zu untersuchende Stelle des Krystalles, und legt den unterhalb des Elektrometers (Abhandl. Bd. V, S. 400) befindlichen Commutator um, wodurch die Scheiben, zwischen welchen das Goldblättchen hängt, die entgegengesetzte elektrische Polarität erhalten, und also das mit einer bestimmten Elektricitätsmenge geladene Goldblättchen seine Lage um den doppelten Betrag ändert, um den es zuvor aus der Ruhelage abgelenkt war. Selbstverständlich müssen von diesem beobachteten Werthe die infolge von Contactwirkungen in dem Goldblättchen ursprünglich vorhanden gewesenen und durch vorläufige Ver-

suche gemessenen elektrischen Spannungen abgezogen und mit der grössten Sorgfalt elektrische Ladungen der Luft durchaus vermieden werden.

Es bedarf keiner langen Ueberlegung, um die Einsicht zu gewinnen, dass die Wärmevorgänge bei der Erhitzung der Krystalle sich übersichtlicher gestalten, und leichter in gleicher Weise wiederholen lassen, als beim Erkalten.

Wenn ein Boracitkrystall längere Zeit im Platinsande gestanden hat, so besitzt er, eben so wie der Platinsand, in seiner ganzen Masse die Temperatur des Zimmers, in welchem er sich befindet. Wird nun der Platinsand durch eine in den kleinen Ofen eingesetzte Spirituslampe erhitzt, so theilt sich die von ihm aufgenommene Wärme dem Krystalle durch seine ganze mit dem Sande in Berührung befindliche Oberfläche mit, während durch die frei herausragenden Theile ein Wärmeverlust mittelst Ausstrahlung statt findet. Von allen Seiten dringt also eine Wärmeflut (um der Kürze wegen diesen Ausdruck zu gebrauchen) in den Krystall ein, und erhöht, soweit sie eben nicht durch die unbedeckten Theile wieder ausstrahlt, die Temperatur desselben. Dieser Vorgang muss sich im Allgemeinen bei jeder Erhitzung wiederholen, wenn auch je nach der Grösse der erhitzenden Flamme, der Dimensionen des Krystalles, der Tiefe seiner Einhüllung in den Platinsand und der mehr oder minder starken Wärmeausstrahlung durch die nicht bedeckten Theile quantitative Unterschiede eintreten können und eintreten werden.

Anders verhält es sich beim Erkalten. Der Krystall verliert die zuvor aufgenommene Wärme auf zweifache Weise: erstens durch Ausstrahlung der nicht vom Platinsande bedeckten Theile in die Luft, und zweitens durch Mittheilung an den Metallsand seitens der von diesem bedeckten Flächen. Während bei gleich tiefer Einsetzung des Krystalles in den Platinsand das Ausstrahlungsvermögen der freien Theile dasselbe bleibt, wird dagegen, weil mit der grössern oder geringern Menge der auf dem kleinen Ofen liegenden Eisenfeile die Schnelligkeit der Abkühlung sich ändert, auch die Wärmemenge, welche der Ofen durch den Platinsand dem Boracitkrystalle entzieht, eine verschiedene sein. Je nach der Grösse der erkaltenden Massen wird also die Wärmebewegung in dem in ihnen liegenden Krystalle verschieden ausfallen, was natürlich auch Aenderungen in dem elektrischen Verhalten desselben nach

sich ziehen kann. Dazu kommt, dass bei dem Erkalten auch durch etwa vorhandene grosse Dimensionen der Krystalle noch weitere Störungen möglich sind; wenn z. B. die Lampe unter dem Ofen ausgelöscht wird, während die Wärme bei der schlechten Leitungsfähigkeit noch nicht den ganzen Krystall nahe gleichmässig durchdrungen hat, so steigt nach dem Auslöschen die Wärme im Innern des Krystalles noch geraume Zeit fort, während die äussern Theile sich bereits abkühlen. Derartige Unregelmässigkeiten müssen besonders bei grossen Krystallen sich zeigen.

Obwohl die Beobachtung der elektrischen Vertheilung an den Boracitkrystallen während der Erhitzung unbequemer und schwieriger ist, besonders weil man bei hohen Temperaturen den Krystall mit dem Platindrahte nicht berühren darf, oder falls es nöthig wird, gar sehr vor Irrungen sich hüten muss: habe ich doch aus den vorstehend angeführten Gründen in den folgenden Versuchsreihen die Beobachtungen während des Erhitzens mit grösster Sorgfalt und Ausdauer durchgeführt, und lege auf sie ein ganz besonderes Gewicht. Indess ist auch den Vorgängen beim Erkalten eine nicht mindere Aufmerksamkeit zugewandt worden; die hierbei erhaltenen Resultate werden erstens zeigen, welche Abweichungen infolge von Störungen überhaupt beim Erkalten vorkommen, und zweitens den beim Erhitzen aufgezeichneten Beobachtungen in gewisser Weise als Bestätigung dienen können.

Handelt es sich um Untersuchungen über verwickelte Erscheinungen, so ist es dringend nöthig, dass dieselben so scharf als nur möglich, auf die wahren, sie bedingenden Umstände bezogen werden. Ich hebe daher ganz ausdrücklich hervor, dass wenn in dem Folgenden ohne weitern Zusatz von einer Elektricitätserregung des im Platinsande befindlichen Boracits während der Erhitzung geredet wird, dieselbe stets auf einen solchen Wärmezustand zu beziehen ist, wo ein Theil seiner Oberfläche mit einer Wärmequelle (dem Platinsande) in Berührung steht, und die aufgenommene Wärme den innern und obern Theilen mittheilt, während alle freien Flächen einen Theil der aufgenommenen Wärme wieder ausstrahlen. An diesen freien Flächen, Ecken und Kanten allein werden die Beobachtungen angestellt, indem die bedeckten Theile, deren Elektricität zur Erde geleitet wird, einer speciellen Untersuchung sich entziehen; wenn schon die Summe der von sämmtlichen bedeckten

Theilen in jedem Augenblicke entwickelten Elektricitäten durch Isolation der Erwärmungsvorrichtung gemessen werden könnte.

### Versuche über den Einfluss von Modificationen im Erwärmen und Erkalten.

Ich halte es nicht für überflüssig, durch besonders in dieser Absicht angestellte Versuche noch den Beweis zu führen, dass die elektrischen Erscheinungen beim Erhitzen in einer und derselben Weise sich darstellen, während dies von den beim Erkalten beobachteten Phänomenen nicht immer in gleichem Maasse gilt. Da ein Theil der Störungen beim Erkalten mit der Grösse der Dimensionen des untersuchten Krystalles zunehmen muss, so wähle ich absichtlich den grössten Boracitkrystall, der mir zu Gebote steht, den später als Nr. I noch speciell beschriebenen. Hier genügt die Angabe, dass seine äussere Begrenzung vorzugsweise von den Flächen des Würfels gebildet wird, ausser welchen noch kleine Tetraeder- und Rhombendodekaederflächen vorkommen; die Seite des Würfels beträgt im Mittel 13,5$^{mm}$. Der Boracitwürfel wurde mit einer seiner Octaederaxen vertical gestellt, und zwar stets mit derselben, so dass also alle folgenden Beobachtungen an einer und derselben horizontal gelegenen Würfelfläche (der später mit 1 bezeichneten) angestellt worden sind.

1.

In die schüsselförmige Vertiefung des kleinen Ofens wurden gegen 150 Gramme Eisenfeile geschüttet, und in diese die kleine messingene Halbkugel (8 Gr. wiegend), mit 22 Gr. Platinsand gefüllt möglichst tief eingedrückt. Der genannte Krystall ward so weit in den Platinsand eingehüllt, dass nur die obere Würfelfläche unbedeckt blieb; die obern Würfelecken, Tetraeder- und Dodekaederflächen waren also sämmtlich vom Platinsande bedeckt.

Beim Erwärmen zeigte diese obere Fläche in ihrer ganzen Ausdehnung erst — (bis gegen 150° des Thermometers), dann + (bis gegen 195° des Thermometers) und darauf bei noch höherer Temperatur wieder —. Beim Erkalten wurde + beobachtet (bis zu 120° des Thermometers), dann — (bis zu 67° des Thermometers) und zuletzt wieder +. Hier sind also die Erscheinungen beim Erkalten genau die umgekehrten von den beim Erwärmen beobachteten.

Ich erinnere daran, dass die Thermometerangaben niemals die

Temperatur des Krystalles ausdrücken; beim Erwärmen sind sie zu hoch, beim Erkalten zu tief. Die im Nachfolgenden angeführten Grade sind also stets nur als Angaben des neben der messingenen Halbkugel in oder auf der Eisenfeile stehenden Thermometers, niemals aber als Angaben der Temperatur der Krystalle, die übrigens auch in den verschiedenen Schichten eine verschiedene sein wird, zu verstehen.

2.

Der Krystall ward nur so weit eingesetzt, dass ausser der obern Würfelfläche auch die obern Würfelecken, Tetraeder- und Dodekaederflächen und ein schmaler Streifen der seitlichen vertikalen Würfelflächen frei waren, dass er also ungefähr bis auf $\frac{2}{3}$ oder $\frac{3}{4}$ seiner Höhe im Platinsande stand.

Auf gleiche Weise wie zuvor erhitzt, blieben auch die elektrischen Erscheinungen sowohl beim Erwärmen als beim Erkalten im Allgemeinen dieselben als zuvor, nur traten die Elektricitäten in den frei gewordenen Würfelecken ebenfalls hervor, sowie auch auf den Dodekaederflächen Elektricität erschien. Das Verhalten der letzteren wird später genauer erörtert werden; ich beschränke mich daher für jetzt blos auf die Angabe der auf der Würfelfläche beobachteten elektrischen Erscheinungen. Dass das Thermometer zur Zeit der Umkehrungen andere Temperaturen zeigte, als in der unter 1. erwähnten Versuchsreihe, ist leicht begreiflich.

3.

Der Krystall ward wie zuvor bis zu $\frac{3}{4}$ seiner Höhe in den Platinsand gesetzt, und im Laufe von 10 Minuten nur bis zu 160° erhitzt. Beim Erwärmen zeigte die Fläche erst —, dann +; beim Erkalten in entsprechender Weise anfangs —, dann +.

4.

Es wurde die Flamme der im Ofen befindlichen Spirituslampe möglichst gross gemacht und die in der schüsselförmigen Vertiefung befindliche Eisenfeile bis 168° erhitzt; während dann die Lampe noch fortbrannte, ward die kalte Messinghalbkugel mit dem Platinsande und dem bis zu $\frac{3}{4}$ darin eingehüllten kalten Krystalle plötzlich um $3^h\ 4'$ in die erhitzte Eisenfeile eingesetzt. Der Platinsand sowie der darin liegende Krystall wurden also sehr schnell erhitzt; die obere Fläche des letzteren zeigte zuerst — bis $3^h\ 8'$ (Thermometer stand auf 194°), dann + bis $3^h\ 14'$ (Thermometer auf 211°), und weiterhin wieder —. Darauf ward die

messingene Halbkugel mit dem Platinsande und dem unberührt in ihm gebliebenen Krystalle aus der Eisenfeile herausgenommen, und auf eine kalte Unterlage zum Abkühlen gestellt. Sehr bald verwandelte sich das letzte — der Erwärmung in +; dieses + kehrte sich indess beim Abkühlen nicht in — um, sondern erlitt in der Periode, wo früher — beobachtet wurde, nur eine Schwächung, nach deren Verlauf dann, entsprechend der letzten positiven Periode, wieder ein stärkeres + beobachtet wurde.

Wir sehen hier also, dass eine sehr viel schnellere Erhitzung als sonst die Erscheinungen beim Erhitzen qualitativ nicht ändert; wohl aber geschieht dies beim Erkalten, wo die Schnelligkeit der Erkaltung die Umkehrung in — nicht zur Erscheinung kommen lässt. Um diesen Vorgang zu verstehen, muss man bedenken, dass die beobachtete Elektricität von den elektrischen Erregungen des ganzen Krystalles abhängt, der bei der Abkühlung in seinen verschiedenen Schichten sehr verschiedene Temperaturen besitzt.

5.

Zum Beweise, dass das Nichtauftreten der negativen Elektricität beim Erkalten in dem vorhergehenden Versuche nicht etwa nur eine Folge der vorhergegangenen schnellen Erhitzung gewesen ist, die vielleicht nicht Zeit gehabt habe, den Krystall zu durchdringen, will ich einen andern Versuch mittheilen. Der Krystall wurde mit seinem Platinsande wie gewöhnlich kalt in die Eisenfeile eingesetzt und dann erst die Lampe angezündet. Die Erhitzung wurde so lange fortgesetzt, bis der Krystall sich völlig unelektrisch zeigte. Als ich darauf die Messingschale mit ihrem Inhalte heraushob, und entweder frei zum Erkalten hinstellte, oder in einem zweiten Versuche zu noch grösserer Beschleunigung der Abkühlung in eine grössere Masse kalter Eisenfeile eindrückte, erhielt ich eben so wie zuvor während der ganzen Dauer des Erkaltens nur positive Elektricität in der Mitte der Fläche.

6.

Die Messingschale ward in eine 6 bis 8mal grössere Menge Eisenfeile gesetzt und wie gewöhnlich erhitzt; die betreffende Fläche des Krystalles zeigte zuerst —, dann +. Leider gelang es trotz einer fast 1 Stunde dauernden Erhitzung bei der grossen Menge der Eisenfeile nicht, die Temperatur bis zur zweiten Umkehrung in — zu steigern. Das Erhitzen hatte von $9^h 8'$ bis $9^h 59'$ gedauert. Nach dem Auslöschen

der Lampe zeigte sich die Fläche bei 10ʰ 0′ nicht elektrisch, bei 10ʰ 1′ trat negative Elektricität auf (entsprechend der letzten positiven beim Erwärmen); bei 10ʰ 27′ ward die zu Ende des Erkaltens auftretende positive Elektricität beobachtet.

Wurde unter denselben Umständen die Erhitzung nur so weit getrieben, dass das erste — sich soeben in + verkehrte, und dann die Lampe ausgelöscht, so zeigte sich, wie zu erwarten, der Krystall infolge der noch steigenden Temperatur eine Zeit lang positiv; dann aber trat beim Erkalten wie zuvor erst — und zuletzt + auf.

7.

Das mittlere — beim Erkalten des vorliegenden Krystalles wird nur unterdrückt, wenn der Krystall so weit erhitzt worden ist, dass er beim Beginnen des Erkaltens + zeigt; dagegen nicht, wenn die Erhitzung blos so weit gesteigert worden, dass nur der erste Wechsel aus — in + eingetreten ist, und also der Krystall bei beginnendem Erkalten sofort negativ erscheinen muss. Es geht dies z. B. aus der folgenden Versuchsreihe hervor. Dieselbe beweist aber auch in Verein mit der unter 4. erwähnten ganz bestimmt, dass es nicht möglich ist, beim Erwärmen die Fläche 1 des Krystalles Nr. I in ihrem elektrischen Verhalten so zu sagen in Verwirrung zu bringen.

Der Krystall stand mit seiner Messingschale in der gewöhnlichen Menge Eisenfeile. Die Lampe ward um 11ʰ 9′ angezündet. Die Fläche zeigte — bis 11ʰ 16½′ (Thermometer 150°); um 11ʰ 17′ (160°) ward + beobachtet, und sofort die Lampe ausgelöscht; die Fläche blieb + bis 11ʰ 20′ (134°), ward dann —, und kehrte sich bei 11ʰ 28′ (49°) in + um.

Um 11ʰ 29′ ward die Lampe wieder angezündet, um 11ʰ 30′ (50°) zeigte die Fläche noch das + von der Erkaltung, um 11ʰ 31½′ (80°) dagegen schon das — der Erwärmung; dies blieb bis 11ʰ 33½′ (130°), und ging um 11ʰ 35′ (135°) durch Null in +. Die Lampe wurde sofort nach dem Erscheinen der positiven Elektricität ausgelöscht, die Messingschale vom Ofen weggenommen und in kalte Eisenfeile gesetzt. Das + der Erwärmung dauerte bis 11ʰ 36½′, dann trat das — des Erkaltens ein.

Aber schon um 11ʰ 38′, also sehr bald nach dem Erscheinen der negativen Elektricität, ward die Lampe wieder angezündet und der Krystall auf den Ofen gebracht. Infolge der sinkenden Temperatur des Krystalles zeigte die Fläche — bis 11ʰ 42′ (141°) und ging dann infolge

der steigenden Erwärmung, der schon vorhandenen Temperatur entsprechend, um $11^h 43'$ (160°) in das mittlere + der Erwärmung über.

Sofort wurde die Lampe wieder ausgelöscht und der Tiegel auf ein Stück kaltes Eisen frei hingestellt; das + der Erwärmung blieb bis $11^h 45'$, ward um $11^h 45\frac{1}{2}'$ infolge der Abkühlung erst — (bis $11^h 50'$), und verwandelte sich schliesslich bei $11^h 51'$ wieder in +.

Aus den angeführten Versuchen geht hervor, dass die Art und Weise der Erwärmung keinen wesentlich störenden Einfluss auf die Art der beobachteten Elektricitäten auf der Fläche 1 des Krystalles Nr. I ausübt, dass dagegen ein solcher beim Erkalten allerdings möglich ist. Das Gesagte wird durch später mitzutheilende Beobachtungsreihen noch weiter bestätigt werden; ja auch selbst die ältesten, mit dem genannten Krystalle von mir angestellten, und bereits im Jahre 1840 in Poggendorff's Annalen Bd. 50, S. 484—487 veröffentlichten Versuche zeigen (wie schon oben S. 155 hervorgehoben worden ist) sämmtlich, dass die Würfelflächen sogar beim blossen Erhitzen des Krystalles auf einem Metallbleche, auf dem er mit einer seiner Flächen lag, in der Entwickelung ihrer Elektricität nicht gestört wurden; sie zeigten bei eintretender Erhitzung erst — und dann +; die Temperatur des freiliegenden Krystalles konnte bei jenen Versuchen nicht so hoch getrieben werden, dass auch die zweite Umkehrung aus — in + eingetreten wäre.

Die angeführten Beispiele mögen genügen, um darzuthun, mit welcher Sorgfalt und Umsicht die thermoelektrischen Versuche angestellt werden müssen, wenn aus ihnen richtige Resultate über die Vertheilung der Elektricität auf den Boracitkrystallen hergeleitet werden sollen. Nöthigenfalls muss jeder einzelne Krystall, ja oft jede einzelne Fläche oder Ecke zum Gegenstande eines besondern anhaltenden Studiums gemacht werden, um alle Störungen kennen zu lernen, die an den verschiedenen Oberflächentheilen auftreten können. Ich darf wohl sagen, dass manche Flächen mehrere Tage hindurch fortgesetzte aufs mannichfachste abgeänderte Untersuchungen erfordert haben, um ihre elektrische Beschaffenheit mit Bestimmtheit zu erkennen, so dass ich mit einzelnen Krystallen Wochen lang beschäftigt gewesen bin.

Schliesslich will ich noch auf den Unterschied in der Stärke der Elektricität bei anfangender Erhitzung aufmerksam machen, wenn der Krystall längere Zeit vorher nicht erhitzt worden, und wenn er soeben

noch in der Abkühlung begriffen ist. Als z. B. der seit 16 Stunden nicht erhitzte Krystall Nr. I so in Platinsand eingehüllt war, dass nur die nach oben gewandte Fläche 5 desselben davon frei blieb, erhielt ich zu Anfange einer Erhitzung durch Annäherung des Platindrahtes folgende Ausschläge. Die erste verticale Spalte unter *T* enthält in dieser und allen folgenden Tabellen die am nebenstehenden Thermometer beobachteten Temperaturen.

| T. | Elektricität | |
|---|---|---|
| | Art | Stärke |
| 16° | 0 | 0,0 |
| 35 | 0 | 0,0 |
| 62 | 0 | 0,0 |
| 82 | — | 0,05 |
| 93 | — | 0,1 |
| 110 | — | 0,15 |
| 124 | — | 0,05 |
| | etc. | |

Nachdem der Krystall bis zu 30° des Thermometers erkaltet war, wurde er von Neuem erhitzt, und gab bei gleicher Annäherung des Drahtes folgende Ausschläge

| T. | Elektricität | |
|---|---|---|
| | Art | Stärke |
| 35° | — | 0,15 |
| 40 | — | 0,3 |
| 50 | — | 0,6 |
| 62 | — | 0,8 |
| 70 | — | 0,9 |
| 80 | — | 0,9 |
| 110 | — | 0,5 |
| | etc. | |

Die elektrische Erregung war also das zweite Mal sehr viel stärker. Da in den bei höhern Temperaturen auftretenden elektrischen Perioden eine vorhergehende Erhitzung keinen merklichen Unterschied hervorbringt, so ist es wahrscheinlich, dass die geringe Intensität der gemessenen Elektricität während des ersten Erhitzens bei Temperaturen unter 100° nicht in einer Schwäche der Erregung überhaupt, sondern nur in einer Ableitung der erregten Elektricität durch condensirte Wasserdämpfe

ihren Grund hat; was auch durch die von mir in den Berichten der Gesellschaft vom Jahr 1851 (S. 118) über den Marecanit mitgetheilten Beobachtungen bestätigt wird.

### Ueber den Einfluss der Ableitungen.

Allerdings darf man aus den im vorigen Abschnitte bereits erwähnten Versuchen schliessen, dass unter gewissen Umständen die Grösse und selbst die Beschaffenheit der mit der Erde durch Leiter in Verbindung gesetzten Theile des Krystalles ohne wesentlichen Einfluss auf die Art der an einem bestimmten Punkte des Krystalles beobachteten Elektricitäten, wenn auch nicht auf deren Intensität, gewesen ist. Der Krystall Nr. I lag in einem Versuche frei mit einer Fläche auf einem Metallbleche (Pogg. Ann. Bd. 50), in einem andern später anzuführenden Versuche war er etwas in den Platinsand eingedrückt, so dass nur die untere Würfelfläche und die vier untern Dodekaederflächen davon bedeckt waren, in noch andern stieg der Platinsand an den seitlichen Flächen immer höher, bis zuletzt nur die Mitte der obern Würfelfläche allein frei dalag: und doch zeigte in allen diesen Fällen die obere Würfelfläche beim Erwärmen erst —, dann +, und dann wieder —. Die der beobachteten Fläche 1 gegenüber liegende untere Fläche 6 war nach der einen Würfelecke hin verletzt, so dass der Krystall, wenn er mit dieser Fläche 6 (wie in den in Poggendorff's Annalen beschriebenen Versuchen) auf ein ebenes Metallblech gelegt wurde, nur in einer ungefähr der Diagonale zwischen den zwei beim Erwärmen zuerst negativ werdenden Würfelecken parallelen Linie (oder besser gesagt einzelnen Punkten derselben) und in einem nahe an der verletzten Ecke liegenden Punkte das Blech ableitend berührte; dessenungeachtet zeigte (Pogg. Ann. Bd. 50, S. 484) die Fläche 1 (dort mit *a* bezeichnet) bei steigender Temperatur erst —, und dann +, gerade so, als wenn der untere Theil des Krystalles, oder auch der ganze Krystall mit Ausschluss der obern Würfelfläche in Platinsand eingesetzt und also leitend mit der Erde verbunden war.

Indess darf man nicht glauben, dass unter keinerlei Umständen auffallende Aenderungen der Elektricität infolge von Aenderungen in der Ableitung an den Boracitkrystallen auftreten können. Man möge bedenken, dass die an einem Punkte in einem gewissen Augenblicke beobachtete Elektricität nicht der blosse Ausfluss dieses einzelnen Punktes,

sondern die resultirende Wirkung aus dem ganzen Krystalle oder wenigstens aus den jenem Punkte benachbarten Theilen darstellt. Dann wird einleuchten, dass wie bei einer nicht geschlossenen Volta'schen Säule die an einem Punkte auftretende Elektricität durch seine Lage in Bezug auf die zur Erde abgeleitete Schicht bedingt wird, ebenso auch die an einer bestimmten Stelle eines thermoelektrischen Krystalles hervortretende Elektricität ausser von den Wärmebewegungen auch noch von der Beschaffenheit und Lage der mit der Erde in leitende Verbindung gesetzten Oberflächentheile abhängig sein muss.

Es wird daher durchaus nothwendig sein, bei einem jeden Versuche wohl in Erwägung zu ziehen, dass die beobachteten Thatsachen nicht blos die Folge einer bestimmten Wärmebewegung, sondern ebenso auch die Folge einer Ableitung an bestimmten Theilen der Oberfläche des Krystalles sind. Wie gross und bedeutend der letztere Einfluss sein kann, wird in jedem einzelnen Falle durch specielle Versuche ausgemittelt werden müssen.

Hier möge es genügen, ein einziges Beispiel über den Einfluss der Ableitung anzuführen, der so weit ging, dass die an einem Punkte beobachtete Elektricität durch Aenderung der Ableitung sich in die gerade entgegengesetzte verwandelte. Der grosse vorhin schon benutzte Boracitwürfel Nr. I mit Tetraeder- und Dodekaederflächen stand so im Platinsande, dass eine durch eine Dodekaederfläche abgestumpfte Kante oben und horizontal lag; diese Abstumpfungsfläche, sowie die in ihr zusammenlaufenden Würfelflächen waren nicht vom Platinsande bedeckt; ebenso waren frei davon die nach diesen Ecken zu gelegenen Hälften der beiden verticalen Würfelflächen, und die in jenen beiden Ecken zusammenlaufenden geneigten Dodekaederflächen.

Als der Krystall nach starkem Erhitzen allmählig bis auf 27° abgekühlt war, zeigten, wie dies später noch weiter erörtert werden wird, die Mitte der obern horizontalen Dodekaederfläche, sowie die beiden Würfelflächen positive Elektricität. Von den beiden an den Endpunkten der Kante gelegenen Würfelecken war die eine positiv, die andere negativ. Die Spitze des Platindrahts, der durch einen dünnen zu einer Spirale gewundenen Kupferdraht mit dem Goldblättchen des Elektrometers in Verbindung stand, wurde auf die Mitte der genannten Dodekaederfläche gelegt, und in dieser Lage erhalten; infolge dessen nahm das Goldblättchen eine bestimmte Stellung an. Als nun mit einem zur Erde abgeleiteten

Kupferdrahte die negative Würfelecke ableitend berührt wurde, zeigte das Goldblättchen eine positive Elektrisirung, als dagegen die positive Würfelecke oder die beiden positiven Würfelflächen ableitend berührt wurden, erschien die Mitte der Dodekaederfläche negativ elektrisch.

### Verhalten der Würfelecken, welchen glatte Tetraederflächen entsprechen.

Um die verschiedenen Flächen, Ecken und Kanten der Boracitwürfel in dem Folgenden kurz angeben zu können, will ich die sechs Flächen eines Würfels der Reihe nach mit den Ziffern 1 bis 6 bezeichnen, dergestalt, dass wenn der Krystall in einer ganz bestimmten Lage vor dem Beobachter auf dem Tische, mit einer Würfelfläche auf ihn zugewandt steht, die obere Fläche 1, die dem Beobachter zugewandte 2, die rechts gelegene 3, die auf der abgewandten Seite befindliche 4, die zur linken gelegene 5, und die nach unten gekehrte 6 genannt werden soll. Die Ecken und Kanten werde ich durch die zu ihrer Bildung beitragenden Flächen bezeichnen.

Während die Krystalle des Kieselzinkerzes, des Turmalins, Topases und einiger anderer Mineralien, wenigstens soviel jetzt darüber bekannt, bei steigender Temperatur, so lange sie überhaupt elektrisch sind, an bestimmten Stellen stets eine und dieselbe Elektricität, nur je nach den Umständen in verschieden starkem Grade, zeigen, wurde dagegen (S. 153) beim Boracit und ebenso auch beim Titanit das eigenthümliche Verhalten entdeckt, dass bei ununterbrochen steigender oder sinkender Temperatur die an bestimmten Punkten vorhandenen Elektricitäten, nachdem sie allmählig an Stärke abnehmend, Null geworden sind, sich in die entgegengesetzten verwandeln; und zwar tritt bei immerfort steigender oder sinkender Temperatur eine solche Umkehrung (Wechsel) beim Boracit sogar zwei Mal ein, während der Titanit, nach den bisherigen Versuchen zu urtheilen, nur eine solche Umkehrung darbietet.

Schon früher (Pogg. Ann. Bd. 74, S. 237 u. 238) habe ich eine Versuchsreihe ganz ausführlich und umständlich mitgetheilt, um den strengen Beweis zu führen, dass die zuvor erwähnten Wechsel in den Elektricitäten nicht etwa durch Zufälligkeiten einer unregelmässigen Erhitzung entstehen; bei den damaligen Versuchen war der Boracitkrystall

bis auf eine durch eine glatte Tetraederfläche abgestumpfte Würfelecke in Eisenfeile eingesetzt; neben ihm auf entgegengesetzten Seiten standen zwei Thermometer, aus deren Gange jede Schwankung in dem Steigen der Temperatur erkannt werden konnte, da ich bei jeder Beobachtung auch die Zeit aufgezeichnet hatte. Der Platindraht wurde zu Anfange des Versuchs auf die kleine mit Graphit bestrichene Tetraederfläche gelegt, und blieb auf derselben unverändert liegen; die von ihm aufgenommene Elektricität führte ein dünner spiralförmiger Draht zum Elektrometer.

Aus einer solchen Versuchsreihe darf in aller Strenge der Schluss gezogen werden, dass die durch eine glatte Tetraederfläche abgestumpften Würfelecken bei steigender Temperatur erst —, dann +, und zuletzt wieder — werden, während beim Sinken der Temperatur gerade die entgegengesetzten Elektricitäten auftreten: erst bei höherer Temperatur +, dann —, und zu Ende des Erkaltens wieder +.

Da die früher mitgetheilte Versuchsreihe zum Nachweise der elektrischen Vorgänge in den genannten Ecken vollständig genügt, so würde die Anführung einer neuen überflüssig sein, und zwar um so mehr, als in den allermeisten der später zu erwähnenden Versuchsreihen diese Wechsel sich ebenfalls zeigen.

Dagegen erscheint es nicht überflüssig, noch specielle Angaben aus einer Versuchsreihe über die Stärke der an einer solchen Würfelecke (3. 4. 6.) des Krystalles Nr. I auftretenden Elektricität im Auszuge mitzutheilen. Der Krystall Nr. I stand mit Ausschluss der genannten Ecke (3. 4. 6.) im Platinsande, und blieb während der ganzen Versuchsreihe unberührt; auch wurden die auf der Ecke entstandenen Elektricitäten niemals durch Umspülen mit einer Flamme hinweggenommen. Durch Annäherung der Platinspitze mittelst des Hebels bis auf eine geringe Weite ward zunächst ein negativer Ausschlag beobachtet, der allmählig bis zu 1 Skalentheil des Ocularmikrometers im Mikroskop zunahm, darauf ebenso allmählig sich verminderte, und in einen positiven überging, welcher die Grösse 0,8 Skth. erreichte; dieser positive Ausschlag nahm allmählig wieder ab, verwandelte sich in einen negativen, der nach Erreichung eines Maximums von 0,7 Skth. allmählig sich bis auf Null verringerte, so dass bei noch weiterer Erhitzung keine Spur von Elektricität wahrgenommen wurde. Beim Erkalten zeigte sich in allen drei Perioden ebenfalls eine allmählige Zu- und Abnahme; das Maximum

der zuerst eintretenden positiven Periode stieg auf 0,7, der dann folgenden negativen auf 1,1, und das der letzten positiven bei niedriger Temperatur auf 2,0 Skth. Es ist nicht unmöglich, dass die Ausschläge beim Erwärmen ein wenig durch den Einfluss der Dampfsäule, welche aus dem Schornsteine des Ofens sich erhob, verringert worden sind, obwohl die Oeffnung des Schornsteins höher lag als der vom Krystall nach dem Elektrometer geführte Draht; irgend erheblich kann dieser Einfluss aber nicht gewesen sein, sonst würde er sich durch ein Zurücksinken des Goldblättchens während der Annäherung des Drahtes bemerklich gemacht haben.

Als die auf der Würfelecke (3. 4. 6.) befindliche kleine glänzende Tetraederfläche mit der Spitze des Platindrahtes berührt wurde, so betrug beim Erwärmen das Maximum der ersten negativen Periode 2 Skth., der nächsten positiven 2,6 und der letzten negativen 1,9 Skth. Bei höhern Temperaturen zeigte sich indess der Krystall nicht wie zuvor unelektrisch, sondern infolge der durch den Draht bewirkten Abkühlung positiv. Beim Erkalten waren die Maxima der drei Perioden respective + 1,0, — 1,4 und + 1,5.

Um den Einfluss der Abkühlung durch Berührung mit dem Platindrahte noch näher darzulegen, will ich zwei Abschnitte aus der letzten Versuchsreihe, wo Berührung statt fand, hier ausführlich mittheilen. Der Krystall zeigte bei steigender Temperatur — bis 128°, von 135° an +, und der Ausschlag des Goldblättchens erhielt sich während der nur kurze Zeit dauernden Berührung constant; so noch bei 171°, wo + 0,7 Skth. beobachtet wurde. Darauf wurde erhalten:

| T. | Elektricität. | |
|---|---|---|
| 174° | + 0,4 | Goldblättchen fällt zurück |
| 178 | + 0,3 | ebenso |
| 182 | + 0,2 | ebenso |
| 185 | — 0,4 | fällt nicht zurück |
| ⋮ | ⋮ | ⋮ |
| 197 | — 1,7 | ebenso |
| 198 | — 0,3 | fällt zurück |
| 200 | + 1,5 | fällt nicht zurück |
| | etc. | |

Die zuletzt bei 200° und darüber erscheinende positive Elektricität ist Folge der Abkühlung und wird mit steigender Temperatur schwächer;

das Zurücksinken entsteht durch die infolge der Abkühlung erregte entgegengesetzte Elektricität. Aehnliche Vorgänge traten beim Berühren während des Erkalten sein. Der Krystall zeigte bei 110° noch + 1,1, darauf

| T. | Elektricität. |
|---|---|
| 105° | + 0,6 |
| 102 | anfangs + 0,05 darauf — 0,1 |
| 97 | anfangs + 0,05 darauf — 0,1 |
| 93 | anfangs sehr schwach +, darauf — 0,2 |
| 88 | — 0,3 |
| | etc. |

Ebenso wie das Zurücksinken ist der eintretende entgegengesetzte Ausschlag eine Folge der abkühlenden Einwirkung des Drahtes.

### Verhalten der Würfelecken, welche matten Tetraederflächen entsprechen.

Die besondere Rücksicht auf spätere Versuche fordert, dass die bisher nur für die durch glatte Tetraederflächen abgestumpften Würfelecken ausgeführte Untersuchung in gleicher Weise auch auf die gar nicht oder durch matte Tetraederflächen abgestumpften Würfelecken ausgedehnt wird.

Wird nun zunächst die Frage aufgeworfen, ob auch in den zuletzt genannten vier Würfelecken der Boracitkrystalle dieselbe Anzahl von Umkehrungen oder Wechseln als in den vier andern eintritt: so scheint dieselbe unter der Bedingung, dass alle übrigen Theile der Krystalloberfläche mit Ausschluss einer solchen Ecke in Platinsand versenkt sind, schlechthin bejaht werden zu müssen. Ich habe mich aus Gründen, die später einleuchten werden, nicht blos mit der gelegentlichen Beobachtung der genannten Ecken bei andern Veranlassungen begnügt, sondern dieselben ganz speciell einer genauen Untersuchung unterworfen.

Der Krystall Nr. I war mit Ausschluss der durch eine matte Tetraederfläche abgestumpften Würfelecke (1. 2. 5.) in Platinsand eingesetzt. Der mit dem Elektrometer leitend zusammenhängende Platindraht wurde dieser Ecke nur genähert, niemals aber damit zur Berührung gebracht. Die genannte Ecke zeigte erst +, dann —, und zuletzt wieder +; wir finden also dieselbe Anzahl Wechsel, wie bei den andern Ecken, nur

haben die Elektricitäten das entgegengesetzte Zeichen. So sorgfältig ich auch suchte, erhielt ich doch unter den angeführten Umständen durch blosses Annähern des Drahtes nach der dritten positiven Periode während der steigenden Temperatur keine weitere Umkehrung; nach dem Verschwinden dieser positiven Elektricität blieb die Ecke unelektrisch.

Die Anzahl der Wechsel oder Umkehrungen während steigender Temperatur ist also, so weit die Beobachtungen bis jetzt reichen, für alle Ecken dieselbe, wenn alle übrigen Theile der Oberfläche abgeleitet werden.

Beim Erkalten zeigte diese Ecke ebenfalls einen zweifachen Wechsel der Elektricität; den Vorgängen beim Erwärmen entsprechend wurde bei sinkender Temperatur in höheren Wärmegraden erst —, dann +, und zu Ende des Erkaltens wieder — beobachtet.

Es wird nicht unzweckmässig sein, aus einer an dieser Ecke mittelst der Hebelvorrichtung, durch welche das Ende des Platindrahtes derselben bis auf ungefähr eine halbe Linie genähert wurde, ausgeführten Versuchsreihe einen kurzen Auszug folgen zu lassen. Der Krystall war seit 24 Stunden nicht erwärmt, und hatte unangerührt im Platinsande gestanden; der Platinsand reichte ringsum bis auf 3mm von der Ecke, so dass also ungefähr 27 Quadratmillimeter von demselben nicht bedeckt waren.

| T. | Elektricität Art | Elektricität Stärke | | T. | Elektricität Art | Elektricität Stärke | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 17° | 0 | 0,0 | Lampe ange- | 132° | 0 | 0,0 | |
| 60 | 0 | 0,0 | zündet | 125 | — | 0,1 | |
| 80 | + | 0,05 | | 111 | — | 0,5 | |
| 105 | + | 0,2 | | 96 | — | 0,05 | |
| 115 | + | 0,2 | | 94 | + | 0,1 | |
| 125 | 0 | 0,0 | | 60 | + | 0,4 | |
| 131 | — | 0,1 | | 42 | + | 0,1 | |
| 148 | — | 0,4 | | 40 | — | 0,2 | |
| 180 | — | 0,1 | | 29 | — | 2,0 | Lampe ange- |
| 182 | 0 | 0,0 | | 31 | — | 1,5 | zündet |
| 183 | + | 0,1 | | 52 | — | 0,3 | |
| 191 | + | 0,3 | | 60 | + | 0,2 | |
| 195 | 0 | 0,0 | Lampe aus- | 90 | + | 1,4 | |
| 194 | 0 | 0,0 | gelöscht | | etc. | | |

Aus der Vergleichung des Anfangs und Endes dieser Tabelle erkennt

man wieder, welchen Einfluss eine vorhergehende Erwärmung auf die Intensität zu Anfange des Erhitzens ausübt.

Als ich in einer andern Versuchsreihe die Ecke (1. 3. 4.) desselben Krystalles Nr. I mittelst der Hebelvorrichtung durch Annähern untersuchte, fand ich ebenso wie bei den übrigen Ecken eine allmählige Zu- und Abnahme; die erhaltenen Maxima waren beim Erwärmen in der ersten positiven Periode + 0,5; in der mittleren negativen — 0,5, und + 0,3 in der letzten positiven; beim Erkalten — 0,7 in der ersten, dann + 2,0 in der mittlern, und — 1,4 in der letzten Periode.

Beim Berühren waren die Maxima beim Erwärmen der Reihe nach + 3,0, dann — 1,0, darauf + 0,7; beim Erkalten — 0,8, dann + 1,0 und — 2,0.

Ich brauche wohl nicht zu bemerken, dass die Maxima gar sehr von dem gerade statt findenden schnelleren oder langsameren Zu- oder Abnehmen der Temperatur abhängen, und also nur eine ungefähre Vorstellung von der Stärke der Elektricitäten zu geben vermögen.

Ueber die Vorgänge bei der Berührung dieser Ecken werde ich später handeln.

### Erfolgen die Umkehrungen an allen Ecken gleichzeitig?

Da es nicht möglich ist, die Temperatur einzelner Punkte eines Krystalles aus der Beobachtung des Standes eines neben ihm befindlichen Thermometers mit Genauigkeit zu bestimmen, so ist die Beantwortung der vorstehenden Frage schwierig. Der einzige Weg, der zum Ziele führen zu können scheint, besteht darin, dass der zu untersuchende Krystall soweit in Platinsand eingesetzt wird, dass nur eine Kante frei bleibt und die beiden an deren Enden gelegenen entgegengesetzten Ecken abwechselnd untersucht werden. Nicht unbegründet möchte aber die Befürchtung sein, dass bei diesem Verfahren möglicherweise die an der einen Ecke erzeugte Elektricität die der andern, wenn ich diesen Ausdruck gebrauchen darf, stören könne. Um nun nach Möglichkeit das eben ausgesprochene Bedenken zu beseitigen, ward nach Einsetzung des Krystalles Nr. I in der bezeichneten Weise in den Platinsand noch ein kleiner Wall von Platinsand quer über die Mitte der oben frei gebliebenen Kante (Dodekaederfläche) gehäufelt, so dass beide Ecken, welche geprüft werden sollten, getrennt aus dem Platinsande hervortraten.

Da der kleine Ofen nur einen Abzugskanal hatte, so wurde die Flamme der Lampe stets an die entgegengesetzte Seite gestellt, und der Krystall so gelegt, dass die untersuchten Punkte dieselbe Lage gegen den Flammenzug erhielten, dass also im vorliegenden Falle die Kante mit ihrer Längsrichtung senkrecht dagegen lag und folglich beiden Ecken in gleicher Weise Wärme zufliessen musste.

Zu einer solchen Vergleichung zweier entgegengesetzten Würfelecken nach dem soeben angegebenen Verfahren wählte ich an dem grossen Boracitwürfel Nr. I zwei an einer gut ausgebildeten Dodekaederfläche liegende Ecken, nämlich die Ecken (1. 2. 5.) und (1. 2. 3.). Die eine Ecke (1. 2. 5.) war durch eine rauhe Tetraederfläche abgestumpft, während die andere Ecke (1. 2. 3.), welcher eine glatte Tetraederfläche entsprach, keine Abstumpfung zeigte. Zwischen beiden Ecken lag eine glänzende Dodekaederfläche, die nur in der Nähe von (1. 2. 5.) nach der Würfelfläche 2 hin ein wenig rauh war. Der quer über die Mitte der Dodekaederfläche gelegte Wall von Platinsand bedeckte dieselbe in mehr als $\frac{1}{4}$ ihrer Länge.

Der Krystall zeigte sich von der vorhergehenden Erwärmung her noch elektrisch.

| T. | Ecke 1. 2. 5. | Ecke 1. 2. 3. | | T. | Ecke 1. 2. 5. | Ecke 1. 2. 3. | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 33° | — | + | | 215° | + | — | |
| : | : | : | | 218 | 0 | — | |
| 26 | — | + | Lampe angezündet | 223 | + | — | |
| 30 | + | + | | 226 | 0 | — | |
| : | : | : | | 244 | 0 | 0 | Lampe ausgelöscht |
| 40 | + | + | | 187 | — | + | |
| 47 | + | — | | : | : | : | |
| : | : | : | | 140 | — | + | |
| 115 | + | — | | 135 | + | + | |
| 130 | 0 | — | | : | : | : | |
| 138 | — | + | | 130 | + | + | |
| : | : | : | | 90 | + | — | Zwischen 130 und 90° war nicht beobachtet worden. |
| 180 | — | + | | : | : | : | |
| 190 | ? | + | | 66 | + | — | |
| 194 | + | + | | 60 | + | + | |
| : | : | : | | 58 | — | + | |
| 214 | + | + | | | | | |

Die erste Spalte der vorstehenden Tabelle enthält, wie schon erwähnt,

die Temperaturen des in der Eisenfeile stehenden Thermometers, bei welchen die in derselben Horizontalreihe verzeichneten Elektricitäten an den übergeschriebenen Ecken beobachtet wurden. Ich darf aber nicht versäumen, die Bemerkung hinzuzufügen, dass nach Ablesung des Thermometers zuerst die Ecke (1.2.5.) beobachtet wurde, und dass ich den Platindraht den Ecken stets nur näherte, ohne dieselben zu berühren. Zur Abkürzung habe ich, wo mehrere aufeinander folgende Beobachtungen dasselbe Resultat lieferten, die Vertheilung der Elektricität nur bei der ersten und letzten Beobachtung hingeschrieben, und die gleichnamigen Resultate der zwischen liegenden Beobachtungen durch Punkte angedeutet.

Aus obiger Tabelle lassen sich nun in Betreff dieser Versuchsreihe zunächst für steigende Temperaturen besonders mit Rücksicht darauf, dass die nebeneinander stehenden Beobachtungen an der Ecke (1.2.5.) stets früher, als an der Ecke (1.2.3.) angestellt worden sind, nachstehende Folgerungen ziehen:

1) Die noch von dem Erkalten herrührenden Elektricitäten kehren sich nicht gleichzeitig um, sondern die Ecke (1. 2. 5.) ist schon aus — in + übergegangen, während in (1. 2. 3.) noch + beobachtet wird.

2) Der erste Wechsel bei steigender Temperatur (für (1. 2. 5.) aus + in —, und für (1. 2. 3.) aus — in +) tritt an beiden Ecken nicht gleichzeitig, sondern früher an der Ecke (1. 2. 5.) auf, als an der andern; denn auf jener war bei 130° 0 beobachtet, während auf der andern noch — sich fand, so dass wahrscheinlich zwischen 130° und 138° beide Ecken einige Augenblicke gleichzeitig negativ elektrisch gewesen sind.

3) Auch der zweite Wechsel (für (1. 2. 5.) aus — in + und für (1. 2. 3.) aus + in —) tritt nicht gleichzeitig ein, sondern wieder früher an der Ecke (1. 2. 5.), als an der Ecke (1. 2. 3.): während von 194° bis 214° die Ecke (1. 2. 5.) schon das letzte + zeigte, besitzt die Ecke (1. 2. 3.) noch ihr zweites +, so dass beide Ecken eine Zeit lang gleichzeitig positiv sind.

4) Das letzte + an der Ecke (1. 2. 5.) wird früher unmerklich als das letzte — an der Ecke (1. 2. 3.).

Wir würden hiernach für den vorliegenden Fall den Satz hinstellen können, dass während des Erwärmens sämmtliche drei an der Ecke mit matten Tetraederflächen erscheinenden Elektricitäten früher auftreten,

aber ebenso auch früher wieder verschwinden, als die drei entgegengesetzten auf der andern Ecke; woraus die sonderbare Erscheinung hervorgeht, dass zur Zeit der Wechsel, infolge des nicht gleichzeitigen Eintritts derselben, beide Ecken jedes Mal eine Zeitlang gleichartig elektrisch erscheinen.

Mit Rücksicht auf die besondere Gestaltung der beiden am Krystall Nr. I untersuchten Würfelecken könnte man die Vermuthung aufstellen, dass die Ungleichzeitigkeit der Umkehrungen eben in der Verschiedenheit der Form dieser Ecken ihren Grund habe. Die Ecke (1. 2. 5.) ist durch eine matte Tetraederfläche abgestumpft, während die Ecke (1. 2. 3.) gar keine Abstumpfungsfläche trägt; man könnte daher meinen, es müsse die Wärme aus dem Innern des Krystalles schneller die Tetraederfläche der erstern Ecke, als die Spitze der letztern erreichen, weshalb eine frühere Umkehrung der Polarität der erstern Ecke infolge höherer Temperatur nicht zu verwundern sei. Sollte auch im vorstehenden Versuche die Temperatur in der Tetraederfläche der ersten Ecke etwas höher gewesen sein, als in der Spitze der zweiten, so hält es doch nicht schwer, den Beweis zu führen, dass eine solche möglicherweise vorhandene geringe Temperaturverschiedenheit jene Ungleichzeitigkeit der Umkehrungen nicht hervorruft. Erstens lässt sich dagegen anführen, dass die an der Oberfläche der beiden Ecken beobachtete Elektricität nicht blos ein Ausfluss der äussersten Schicht, sondern vielmehr des ganzen Krystalles ist; zweitens aber kann ich jene Vermuthung auch durch eine positive Thatsache zurückweisen. Es wird im folgenden Abschnitte eine Versuchsreihe an einem andern später als Nr. II aufgeführten Krystalle erwähnt werden, bei welcher ebenfalls zwei an einer Kante gelegene Ecken geprüft wurden. In diesem Falle war die dem glatten Tetraeder entsprechende Ecke am stärksten, dagegen die andere nur unbedeutend abgestumpft; die Gestalt der Ecken hatte sich also gewissermassen umgekehrt. Dessenungeachtet zeigte sich auch bei diesen beiden Ecken die Ungleichzeitigkeit in der Umkehrung der Elektricitäten ganz in derselben Weise wie bei dem Krystalle Nr. I.

Es entsteht nun die Frage, ob die zuvor beschriebenen Unterschiede in der Zeit der Umkehrungen der verschiedenen Ecken ein allgemeines Phänomen sind, das bei allen Krystallen wiederkehrt, oder ob es nur bei einzelnen, wozu z. B. der Krystall Nr. I gehören würde, durch gewisse Umstände hervorgerufen wird?

Um diese Frage sogleich kurz durch den von mir gefundenen Thatbestand zu beantworten, will ich anführen, dass ich bei manchen Krystallen die erwähnte Ungleichzeitigkeit und zwar in gleichem Grade wie bei dem Krystall Nr. I antraf, bei andern dagegen nur bei gewissen Uebergängen eine Verschiedenheit in der Zeit ihres Eintritts beobachtete. Sonach finden sich also in dem Verhalten der Ecken bei den verschiedenen Krystallen Unterschiede. Es ist indess nicht möglich, den Grund derselben einzusehen, bevor uns nicht die Beziehungen der Ecken zu den übrigen Theilen der Krystalle bekannt sind.

Gehen wir zu dem zweiten Theile der vorstehenden Tabelle, welcher die Beobachtungen beim Erkalten enthält, so zeigen sich hier andere Verhältnisse als beim Erwärmen. Die Ecke (1. 2. 5.) macht den ersten Wechsel früher als die andere; über den zweiten entscheidet der Versuch Nichts, weil die zweite Ecke nach der ersten berührt wurde.

Die Beobachtungen sind nicht etwa in dieser speciellen Versuchsreihe ganz besondern Störungen unterworfen gewesen; die Erscheinungen traten in einer im nächsten Abschnitte mitgetheilten Reihe, wo kein Platinsand über die Mitte der Rhombendodekaederfläche gehäufelt war, gerade in derselben Weise auf, sind also der bestimmte, wenn auch nur einseitige Ausdruck der elektrischen Vorgänge im ganzen Krystalle unter den angegebenen Umständen.

Da je vier abwechselnde, den Flächen eines und desselben Tetraeders entsprechende Ecken krystallographisch einander gleich sind, so lässt sich, falls die Würfelflächen eine und dieselbe elektrische Beschaffenheit besitzen, auch in physikalischer Beziehung eine Gleichheit der genannten Ecken erwarten; was durch den Versuch im Allgemeinen bestätigt wird, indem kleinere Abweichungen in der Stärke und der Zeit der Umkehrungen in störenden Nebenumständen begründet sind.

## Verhalten der Rhombendodekaederflächen an den würfelförmigen Boracitkrystallen.

Zur Anbahnung des Verständnisses der im vorhergehenden Abschnitte behandelten Versuche wird es zweckmässig sein, hier gleich das Verhalten der zwischen zwei Würfelecken gelegenen Dodekaederflächen folgen zu lassen. Ich werde gerade mit Rücksicht auf das Vorhergehende zunächst diejenige Dodekaederfläche auswählen, welche an

dem schon vielfach benutzten Krystalle Nr. I zwischen den beiden vorhin untersuchten Ecken (1. 2. 5.) und (1. 2. 3.) liegt.

Der Boracitwürfel Nr. I war bis auf die genannten Ecken und die zwischen ihnen sich erstreckende Dodekaederfläche in Platinsand eingesetzt. In der folgenden Tafel enthält die erste verticale Spalte wieder die Temperaturangaben des in der Eisenfeile befindlichen Thermometers, die zweite Spalte zeigt die auf der rauhen Tetraederfläche (1. 2. 5.) und die letzte die auf der nicht abgestumpften, einer glatten Tetraederfläche entsprechenden Ecke (1. 2. 3.) beobachtete Elektricität. Die vierte mit *M.* überschriebene Spalte gibt die auf der Mitte der Dodekaederfläche, die dritte mit *C.* überschriebene die auf der Mitte der zwischen *M.* und der Ecke (1. 2. 5.) gelegenen Hälfte, und die fünfte mit *D.* überschriebene die auf der Mitte der zwischen *M.* und der Ecke (1. 2. 3.) gelegenen Hälfte der Dodekaederfläche beobachtete Elektricität an.

Ich bemerke nochmals ausdrücklich, dass die Temperaturangaben dieser und der folgenden Versuchsreihen unter sich nicht vergleichbar sind, indem das Thermometer stets auf verschiedene Tiefen in die Eisenfeile eingetaucht war. Die zwischen den einzelnen Versuchsreihen rücksichtlich der Temperatur vorhandenen Beziehungen müssen auf andere Weise festgestellt werden.

| T. | (1. 2. 5.) | *C.* | *M.* | *D.* | (1. 2. 3.) | T. | (1. 2. 5.) | *C.* | *M.* | *D.* | (1. 2. 3.) | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 22° | + | — | — | — | — | 218° | — | — | — | — | — | Lampe ausgelöscht |
| : | : | : | : | : | : | 215 | 0 | — | — | — | — | |
| 112 | + | — | — | — | — | 200 | 0 | 0 | — | — | + | |
| 130 | — | — | — | — | — | 180 | — | + | + | + | + | |
| 140 | — | — | — | — | 0 | : | : | : | : | : | : | |
| 150 | — | — | — | — | + | 145 | — | + | + | + | + | |
| 160 | — | — | — | + | + | 135 | + | + | + | + | + | |
| 167 | — | — | 0 | + | + | : | : | : | : | : | : | |
| 174 | — | — | + | + | + | 105 | + | + | + | + | + | |
| : | : | : | : | : | : | 97 | + | + | + | + | — | |
| 180 | — | — | + | + | + | : | : | : | : | : | : | |
| 185 | — | + | + | + | + | 66 | + | + | + | + | — | |
| 192 | + | + | + | + | + | 61 | + | + | + | + | + | |
| : | : | : | : | : | : | 54 | — | + | + | + | + | |
| 210 | + | + | + | + | + | 47 | — | — | + | + | + | |
| 213 | + | + | + | + | — | : | : | : | : | : | : | |
| 215 | — | — | — | — | — | 38 | — | — | + | + | + | |

Betrachten wir zuerst die Vorgänge beim Erwärmen.

Die beiden Würfelecken zeigen hier ein ganz analoges Verhalten wie in dem vorigen Abschnitte. Sehen wir zunächst von dem letzten — auf der Ecke (1. 2. 5.) von 215° an ab, so zeigt jede Ecke einen doppelten Wechsel, und gerade wie zuvor treten die Umkehrungen auf der Ecke (1. 2. 5.) früher ein, als auf der andern. Ausserdem wurde jetzt aber zu Ende der Erhitzung durch Annäherung an die Ecke (1. 2. 5.) nochmals negative Elektricität, wenn auch nur sehr schwache, im Elektrometer beobachtet. Es mag für jetzt unentschieden bleiben, ob diese zweite negative Elektricität auf der Ecke (1. 2. 5.) zu Ende des Erwärmens wirklich infolge eines negativ elektrischen Zustandes des Krystalles daselbst vorhanden ist, oder nur infolge einer dahin ausgeübten Vertheilungswirkung von Seiten der sonst überall vorhandenen starken negativen Elektricität dort erscheint; denn da die Versuchsreihe des vorigen Abschnitts zeigt, dass die positive Elektricität der dritten Periode auf der Ecke (1. 2. 5.) eher verschwindet, als die negative der dritten auf (1. 2. 5.), so könnte bei den letzten hohen Temperaturen die allein vorhandene negative Elektricität ihre Vertheilungswirkung daselbst frei ausüben.

Eigenthümlich ist die Anordnung der Elektricität bei den verschiedenen Temperaturen auf der Dodekaederfläche. Beim Anfange der Erwärmung zeigt sich die ganze Dodekaederfläche sammt der Würfelecke (1. 2. 3.) negativ, während die Tetraederfläche auf der Ecke (1. 2. 5.) allein positiv ist. Bei 130° ist auch die Ecke (1. 2. 5) negativ geworden; dafür aber bei 140° die negative Elektricität auf (1. 2. 3.) auf Null reducirt. Bei 150° ist die letztgenannte Ecke schon positiv geworden, und diese positive Elektricität breitet sich allmählig über die Dodekaederfläche aus, indem sie deren — Elektricität nach und nach verdrängt, so dass zuletzt bei 192° selbst die Ecke (1. 2. 5.) positiv wird. Bis 210° bleibt die Dodekaederfläche sammt beiden Ecken positiv; bei 213° kehrt sich die Ecke (1. 2. 3.) aus + in — um, und ihre negative Elektricität verbreitet sich dann über die Dodekaederfläche.

Gehen wir zu den Beobachtungen beim Erkalten über, so finden wir nicht genau die umgekehrten Erscheinungen wie beim Erwärmen; jede der Ecken erleidet allerdings, wie zu erwarten, zwei Umkehrungen in der Art der an ihr auftretenden Elektricität, aber die Zeitpunkte, in denen sie auftreten, entsprechen, wie diess auch schon in dem Ver-

suche S. 182 hervorgehoben wurde, nicht genau der beim Erwärmen beobachteten Aufeinanderfolge.

Da die verschiedenen Punkte des Krystalles in der Ordnung von rechts nach links untersucht wurden, so entscheidet die Beobachtung bei 200° Nichts darüber, ob etwa die Ecke (1. 2. 3.) früher positiv geworden ist, als die Ecke (1. 2. 5.) negativ. Dagegen tritt der erste Wechsel beim Erkalten früher auf in der Ecke (1. 2. 5.) als in der Ecke (1. 2. 3.), was ganz mit der Beobachtung auf S. 182 übereinstimmt. Die Beobachtung bei 66° entscheidet eben so wenig wie die bei 60° auf S. 182 darüber, ob die Ecke (1. 2. 3.) sich früher umgekehrt hat als die Ecke (1. 2. 5.).

Auf der Dodekaederfläche zeigt sich die von der steigenden Temperatur herrührende negative Elektricität noch einige Zeit, während die Ecken infolge einer rascheren Erkaltung eine dieser entsprechende Beschaffenheit besitzen. Dann breitet sich die positive Elektricität sehr schnell über die Fläche aus, so dass zu einer bestimmten Zeit die ganze Fläche nebst den Ecken positiv erscheint. Darauf tritt auf der Ecke (1. 2. 3.) die Umkehrung ein; indess gelingt es der hier erscheinenden negativen Elektricität jetzt nicht, sich weithin auszubreiten; sie wird auf die Ecke zurückgedrängt, und kehrt sich dann in die positive um, während die Ecke (1. 2. 5.) negativ wird; der Bereich der positiven Elektricität scheint aber auch selbst zuletzt noch etwas grösser zu sein. als der der negativen.

Diese Abweichungen der Erscheinungen beim Erkalten von den beim Erwärmen beobachteten haben ihren Grund in dem bereits S. 166 erwähnten etwas andern Vorgange der Wärmeabnahme als der Wärmezunahme. Das Hervortreten der negativen Elektricität von 97 bis 66° blos auf dem beschränkten Raume der Ecke (1. 2. 3.) hängt sicherlich mit dem Grunde zusammen, aus welchem bei schneller Abkühlung wie S. 170 gezeigt, die negative Elektricität bei der entsprechenden Temperatur gar nicht zum Vorschein kommt, sondern noch schwache positive an ihrer Stelle erscheint.

Um das elektrische Verhalten der Mitte der Dodekaederfläche unabhängig von den beiden Ecken zu untersuchen, wurden bei einem neuen, dem vorhergehenden ähnlichen Versuche auch die Ecken (1. 2. 5.) und (1. 2. 3.) nebst den anliegenden Theilen der Dodekaederfläche in Platinsand gehüllt, so dass allein das mittlere Stück der Dodekaeder-

fläche frei lag. In Uebereinstimmung mit dem Früheren zeigte sich die Mitte der Fläche von 38 bis 173° negativ, ward dann von 183 bis 207° positiv, und erschien von 209° an schliesslich wieder negativ.

Beim Abkühlen zeigte sich der mittlere Theil der Dodekaederfläche von 166 bis 145° positiv, bei 136° auf kurze Zeit negativ, darauf von 127° an wieder positiv bis gegen 80° hin; von 73° abwärts waren die Beobachtungen wegen der Schwäche der Elektricität etwas unsicher; bei 40° ward dann auf dem nach der Ecke (1. 2. 5.) gelegenen Theile nebst der Mitte der freien Fläche negative, auf dem nach der Ecke (1. 2. 3.) hin gelegenen Theile dagegen positive Elektricität beobachtet.

Diese Resultate stehen im Einklange mit den vorhergehenden, wo die Würfelecken nicht bedeckt waren; denn in Betreff der beim Abkühlen bei 136° beobachteten negativen Elektricität (die weiterhin noch ihre Erklärung finden wird) muss ich bemerken, dass ich in einem andern hier nicht mitgetheilten Versuche, der sonst ganz mit dem S. 186 mitgetheilten übereinstimmt, während der Abkühlung zwischen 150 und 125° eine etwas grössere Ausdehnung der negativen Elektricität von der Ecke (1. 2. 5.) aus bis nach der Mitte der Dodekaederfläche hin fand, die in dem oben ausführlich mitgetheilten Versuche zufällig gerade nicht beobachtet worden ist.

Ebenso wie die Dodekaederfläche zwischen den Würfelflächen 1 und 2 verhielt sich, wie man bei der schon mehrfach angedeuteten gleichartigen Beschaffenheit sämmtlicher Würfelflächen erwarten darf, z. B. auch die Dodekaederfläche zwischen den Würfelflächen 1 und 3. Die Beobachtungsreihe stimmt ganz mit der oben S. 186 mitgetheilten überein, mit der geringen Ausnahme, dass auf der Ecke (1. 3. 4.), welcher eine rauhe Tetraederfläche entspricht, zu Ende der Erwärmung die ihr zukommende positive Elektricität blieb, also nicht von der negativen der Dodekaederfläche unterdrückt wurde, und dass während der Abkühlung zwischen 140 und 127° die negative Elektricität ausser auf der Ecke (1. 3. 4.) auch noch auf der nächstgelegenen Hälfte der Dodekaederfläche beobachtet wurde, was mit der im vorhergehenden Absatze mitgetheilten Versuchsreihe an der zwischen der Würfelfläche 1 und 2 gelegenen Dodekaederfläche übereinstimmt.

Bei dem vollständig gleichen Verhalten der beiden untersuchten Dodekaederflächen des Krystalles Nr. I hielt ich mit Rücksicht auf die später angegebene Beschaffenheit der Würfelflächen desselben eine

weiter fortgesetzte specielle Prüfung der noch übrigen zehn Dodekaederflächen für überflüssig.

Dagegen war es nöthig, das Verhalten der Dodekaederflächen auch an andern Krystallen zu untersuchen.

Die Kante (2. 3.) des später als Nr. II aufgeführten Boracitwürfels ward einer gleichen Prüfung wie die beiden Kanten an dem Krystalle Nr. I unterworfen. Einer ausführlichen Darlegung der Einzelheiten des Versuchs bedarf es nicht; derselbe stimmte beim Erwärmen ganz und gar mit dem oben auf S. 186 mitgetheilten überein; bei sinkender Temperatur wich er nur darin von demselben ab, dass die negative Elektricität zu Anfange des Erkaltens (also ungefähr von 180 bis 150°) nicht blos wie in jenem Versuche auf die eine Würfelecke beschränkt war, sondern sich auch über den nächstgelegenen Theil der Rhombendodekaederfläche hin verbreitete; ein Gleiches gilt von der negativen Elektricität auf der andern Ecke (in der mittleren Periode von 100 bis gegen 66°). Diese kleinen Modificationen beim Erkalten könnten leicht darin ihren Grund haben, dass die Temperaturabnahme bei dem Versuche mit dem Krystalle Nr. II in etwas anderer Weise in der Würfelkante, welche die betreffende Dodekaederfläche abstumpfte, erfolgte, als bei dem Krystalle Nr. I; bei letzterm ist die matte Tetraederfläche der an der Kante liegenden Ecke allein vorhanden, von der glatten findet sich keine Spur; bei Nr. II dagegen zeigt sich gerade entgegengesetzt die glatte Tetraederfläche der an der untersuchten Kante liegenden Ecke sehr stark ausgebildet, während von der matten Tetraederfläche fast Nichts zu sehen ist. Nothwendig wird die Abstumpfung der verschiedenen Ecken eine etwas andere Abkühlung in dem Krystalle Nr. II hervorbringen, als in dem Krystalle Nr. I. Vielleicht darf man auch die zuvor erwähnten geringen Abweichungen auf den beiden Dodekaederflächen des Krystalles Nr. I als Folge einer bei den verschiedenen Versuchen etwas abgeänderten Erkaltung, die durch mehr oder weniger tiefes Eintauchen der einen oder andern Ecke in den Platinsand erzeugt wurde, betrachten. Darauf weist auch eine spätere Versuchsreihe hin, wo die Mitte der Rhombendodekaederfläche auf der Kante (1. 3.) am Würfel Nr. I nebst den an dieser Kante gelegenen Ecken und Würfelflächen beobachtet wurde.

Wir werden später finden, dass der Krystall Nr. II in seinem Ansehen und seiner Structur ganz dem Krystalle Nr. I gleicht, woraus wir wohl nicht ohne Grund auch auf ein gleiches elektrisches Verhalten der

entsprechenden Theile beider Krystalle schliessen dürfen. Namentlich wird sich dies gleiche Verhalten in den auf den Würfel- und Rhombendodekaederflächen erscheinenden Vorgängen zeigen müssen, wie solches auch die vorstehenden Angaben für letztere bestätigen.

Die Dodekaederflächen der genannten Würfel erfahren beim Erwärmen einen vorwaltenden Einfluss (wenn ich mich der Kürze wegen so ausdrücken darf) der Würfelecken mit glatten Tetraederflächen; dies hängt damit zusammen, dass, wie nachher sich ergeben wird, die Würfelflächen mit den genannten Ecken in ihrem elektrischen Verhalten übereinstimmen. Jede der untersuchten Kanten liegt zwischen zwei elektrisch gleichartigen Würfelflächen, und an den Vorgängen auf den letztern nehmen die Kanten Theil. Ich verwahre mich jedoch ausdrücklich dagegen, als ob ich durch das soeben Ausgesprochene der Ansicht beipflichtete, dass die elektrischen Erscheinungen auf den Dodekaederflächen gewissermassen nur mit Unrecht, infolge von störenden seitlichen Einflüssen dahin getriebene Elektricität seien. Die vorhergehenden Zeilen sollten nur ein Bild dieser Vorgänge geben; die Elektricitätserzeugung auf den Dodekaederflächen ist gerade ebenso selbstständig, wie auf allen übrigen Punkten des Krystalles und ein Resultat der durch seine ganze Masse gehenden Erregung.

Gleich in den nächsten Abschnitten werden wir aber einen Unterschied in dem Verhalten der Würfelflächen der Boracitkrystalle antreffen, wonach gewisse Würfelflächen an einem Krystalle sich in elektrischer Beziehung (was die Art der erregten Polarität anlangt) gerade entgegengesetzt als andere verhalten. Wenn wir nun an einem Krystalle eine Kante auswählen, welche zwischen zwei den Flächen an den Krystallen Nr. I und Nr. II gleichartigen Würfelflächen liegt, so werden wir auf den Kanten auch ein Vorwalten der auf den Ecken mit glatten Tetraederflächen erscheinenden Elektricität erwarten dürfen, weil eben diese Ecken in ihrer elektrischen Erregung mit den Würfelflächen übereinstimmen. Wenn dagegen eine Kante zwischen zwei den genannten Flächen gerade entgegengesetzt beschaffenen Würfelflächen liegt, also zwischen zwei Würfelflächen, die in ihrer elektrischen Polarität mit den Ecken mit matten Tetraederflächen übereinstimmen, so wird unter der Voraussetzung beträchtlicher Stärke derselben ein Vorwalten der auf diesen letztern Ecken auftretenden Elektricität zu vermuthen sein. Liegt endlich eine Kante zwischen zwei in ihrem elektrischen Verhalten

einander gerade entgegengesetzten Flächen, d. h. zwischen zwei Flächen, von denen die eine in ihrer Polarität mit den Würfelecken mit glatten Tetraederecken, die andern dagegen mit den Würfelecken mit matten Tetraederflächen übereinstimmt: so wird, wofern nicht die eine der Flächen in der Intensität ihrer Elektricität bedeutend überwiegt, auf der Würfelkante oder Dodekaederfläche weder die eine noch die andere Elektricität vorherrschen; die Mitte der Fläche wird dann, ausser wo durch die früher erwähnten Ungleichzeitigkeiten in den Umkehrungen auf allen freien Theilen des Krystalles eine und dieselbe Elektricität beobachtet wird, unelektrisch erscheinen.

Auf dem später unter Nr. III aufgeführten Boracitwürfel waren z. B. die Würfelflächen 2 und 5 unter sich gleichartig, und ebenso die Würfelflächen 1 und 4; dagegen waren die Flächen 2 und 1, und ebenso 5 und 4 einander polarisch entgegengesetzt. Zu Anfange des Erwärmens zeigten die Flächen 2 und 5 —, zu Ende des Erkaltens +, dagegen die Flächen 1 und 4 zu Anfange des Erwärmens + und zu Ende des Erkaltens —. Als nun der Krystall bis zur Hälfte so in Platinsand gesetzt wurde, dass die Flächen 5 und 2 frei blieben und die von ihnen gebildete Kante horizontal lag, so herrschte auf letzterer zu Anfang des Erwärmens —, zu Ende des Erkaltens + vor; bei ähnlich gestalteter Prüfung der Kante zwischen der Fläche 1 und 4 hatte zu Anfang des Erwärmens die +, zu Ende des Erkaltens die — Elektricität die grössere Ausdehnung. Als nun aber die Kante zwischen den Flächen 1 und 5 untersucht wurde, zeigte sich (dieser Krystall ist bis jetzt nie über den Siedepunkt des Wassers erhitzt worden) innerhalb dieser Temperaturgrenze die Mitte der Kante stets unelektrisch, während die Mitten der vorhergehenden beiden Kanten stets dieselbe Elektricität wie die seitlichen Flächen dargeboten hatten.

Aus dem Verhalten der Würfelflächen lässt sich also ein Schluss auf das Verhalten der zwischen ihnen liegenden Kanten machen, vorausgesetzt, dass die elektrischen Erregungen der Flächen stark sind und, so zu sagen, bis an die Kanten heranreichen. Es ist aber, wie wir später sehen werden, die Ausbreitung, welche die eine oder die andere Elektricität auf den Flächen hat, sehr verschieden; zeigt sich die Elektricitätserregung auf beiden Flächen nur schwach und nur wenig ausgebreitet, so erscheint die Mitte der Kante unelektrisch; die beiden Hälften der Kanten nehmen an der elektrischen Beschaffenheit der zu

ihnen gehörigen Ecken Theil, und werden in ihrer Intensität nach der Mitte hin allmählig schwächer. Dieser Zustand kann sich aber, wie schon angedeutet, infolge der Ungleichzeitigkeit der Umkehrungen beim Uebergange gewisser Perioden in einander selbst auf einer und derselben Kante im Laufe einer Versuchsreihe bei steigender und sinkender Temperatur ändern.

### Elektrisches Verhalten der Mitte der Würfelflächen erster Art.

Es gilt in der Krystallographie die Regel, dass an derselben Mineralspecies niemals zugleich geneigtflächig und parallelflächig hemiedrische Gestalten auftreten. Ebenso können an einem und demselben Krystalle nicht entschieden holoedrische Gestalten als solche mit hemiedrischen sich verbinden; vielmehr sind in allen Fällen, wo scheinbar holoedrische Formen mit entschieden hemiedrischen zusammen vorkommen, die ersteren durchaus als hemiedrische Gestalten zu deuten. Dieselben erscheinen nur deshalb als holoedrische, weil die Anwendung des Hemiedriegesetzes auf jene vollflächigen Gestalten, nach Vergrösserung der übrig bleibenden Flächen bis zur vollständigen Raumumschliessung, wieder eine scheinbar holoedrische Gestalt erzeugt.

Naumann spricht sich in seinen Elementen der theoretischen Krystallographie S. 93, nach Ableitung der geneigtflächig hemiedrischen Krystallformen des tesseralen Systemes in folgender Weise aus*):

„Die drei noch übrigen plenotesseralen Formen, nämlich die Tetrakishexaeder, das Rhombendodekaeder und das Hexaeder sind zwar gleichfalls dieser Hemiedrie unterworfen, ohne jedoch eine wirkliche Gestaltveränderung zu erleiden, weshalb sie gerade so erscheinen, als ob sie holoedrisch geblieben wären. Dessenungeachtet sind auch sie als hemiedrische Formen zu beurtheilen, sobald sie an einem Minerale vorkommen, welches Tetraeder, Trigondodekaeder und andere tetraedrisch-semitesserale Formen zeigt; sie sind nur noch s c h e i n b a r holoedrische Formen, an denen gleichfalls die Hälfte der Flächen verschwunden ist, was jedoch die Gestalt unverändert lässt, weil die rückständigen Flächen mit den verschwundenen Flächen in dieselben Ebenen

*) Bekanntlich hat Naumann dieselben Ansichten schon im Jahre 1830, in seinem Lehrbuche der Krystallographie, aufgestellt, und in seinen späteren Schriften zur Geltung zu bringen gesucht.

fallen. Dies wird besonders einleuchtend, wenn man sich eine jede der drei Formen durch angemessene Theilung ihrer Flächen in ein Quasi-Hexakisoktaeder verwandelt, und dann auch für sie buchstäblich genau das Gesetz der Hemiedrie zur Verwirklichung bringt.“





„In vorstehenden drei Figuren stellen die schwarzen Theile diejenigen Flächenfelder vor, welche eigentlich als verschwunden zu denken, während die weiss gelassenen Flächenfelder die wirklich rückständigen sind. Da nun aber jedes verschwindende Flächenfeld mit einem bleibenden Flächenfelde in eine Ebene fällt, so wird in der geometrischen Erscheinungsweise dieser Formen gar Nichts geändert werden, obgleich die Bedeutung ihrer Flächen eine ganz andere ist. Im Hexaeder z. B. besteht jede Fläche streng genommen nur aus zwei an einer Diagonale anliegenden quadratischen Feldern, welche sich aber, weil sie in eine Ebene fallen, zur vollständigen Hexaederfläche ausdehnen; und auf ähnliche Weise verhält es sich im Rhombendodekaeder und Tetrakishexaeder. Diese drei Formen sind also da, wo sie zugleich mit Tetraedern vorkommen, wenn auch nicht ihrer Erscheinung, so doch ihrem Wesen nach als hemiedrische Formen zu deuten, was auch durch die Berechnung, und überdies noch dadurch bestätigt wird, dass in dem allgemeinen Schema des Tesseralsystems der gegenseitige Zusammenhang und die Uebergänge der Formen ganz ungestört erhalten bleiben, wenn man darin diejenigen vier Formen, welche durch die tetraedrische Hemiedrie eine wirkliche Gestaltveränderung erleiden, mit ihren hemiedrischen Zeichen einschreibt.“

Die Richtigkeit dieser Betrachtung für den Fall des Boracits zeigt sich auch darin, dass an seinen Krystallen nur solche scheinbar holoedrischen Gestalten (Tetrakishexaeder, Rhombendodekaeder und Würfel) mit den geneigtflächig hemiedrischen zusammen vorkommen, welche in ihren hemiedrischen Formen den holoedrischen gleich erscheinen.

Es finden sich nun an den Boracitkrystallen beide hemiedrische Formen des Octaeders, d. h. beide Tetraeder, und wir sind bis jetzt

nicht im Stande einen Grund anzugeben, warum an einem Krystalle bald die Flächen des einen, bald beider erscheinen, warum bald sämmtliche Flächen, bald nur einzelne und zwar in verschiedener Grösse, ausgebildet sind. Wir werden daher auch nicht nothwendig sämmtliche Würfel- und Rhombendodekaederflächen eines und desselben Krystalles stets (der Kürze wegen möge der Ausdruck gestattet sein) nur auf Ecken von einerlei Art (z. B. mit glatten Tetraederflächen) oder auf die sie verbindende Diagonale zu beziehen haben; es wird eben so gut der Fall vorkommen können, dass an einem und demselben Krystalle einige Würfel- und Rhombendodekaederflächen sich auf die eben genannten Würfelecken oder die sie verbindende Diagonale, die übrigen aber auf die Ecken mit matten Tetraederflächen oder die sie verbindende Diagonale beziehen.

Sollte unter den Würfelflächen eines Boracitkrystalles ein solcher Unterschied existiren, so wird sich derselbe durch einen elektrischen Gegensatz zwischen denselben bemerklich machen müssen; und umgekehrt, falls sich durch die Beobachtungen ein solcher Gegensatz in elektrischer Beziehung herausstellen sollte, werden wir die Flächen eines und desselben Würfels nicht als gleichartig betrachten und nicht auf Ecken oder Diagonalen von einerlei Art beziehen dürfen. In der That existirt nun zwischen den Würfelflächen ein solcher Unterschied. Ich werde die beiden verschiedenen Arten von Flächen als Flächen erster und zweiter Art unterscheiden, und füge der leichteren Uebersicht wegen gleich hinzu, dass die Würfelflächen erster Art hinsichtlich ihres elektrischen Verhaltens im Allgemeinen mit den Würfelecken mit glatten Tetraederflächen, die Würfelflächen zweiter Art dagegen mit den Würfelecken mit rauhen Tetraederflächen übereinstimmen.

In ähnlicher Weise hat auch Volger (Versuch etc. S. 144 u. 145) seine oben S. 157 schon erwähnten Beobachtungen über die thermoelektrische Beschaffenheit der kleinen Würfelflächen an den tetraedrischen Boracitkrystallen vom Schildsteine gedeutet. Er sagt: „Sie (die genannten Würfelflächen) waren sämmtlich beim Erwärmen negativ und beim Erkalten stark positiv, also antilog, woraus hervorzugehen scheint, dass man den Boracit-Würfling hier als elektrisch-hälblingisch und zwar antilog- (oder rechts-) hälblingisch aufzufassen haben würde. Bei einer Krystallisation mit vollzähligen Flächen sind in der That die elektrischen Polaritäten an allen Theilen der Krystalle ausgeglichen oder, wenn ihr

Gleichgewicht gestört wird, durchaus gleichartig. Nur bei Hälblingskrystallisationen (Hemiedrieen) zeigen sich entgegengesetzte Polaritäten an den verschiedenen Theilen eines Krystalls. Kann nun der Würfling und der Knöchling nicht der Form und Flächenzahl nach hälblig ausgebildet vorkommen, so scheint es doch, als ob die Hälbligkeit sich durch die Elektricität zu erkennen gebe. Es würde demnach ein Würfling für gewöhnlich als ± Würfling zu bezeichnen sein und die beiden „Elektro-Hemiedrieen," die beiden Elektricitätshälblinge, in welche derselbe zerfallen kann, sind der + Würfling und der — Würfling. Der Würfling des Timpelboracites ist — Würfling, dem — Timplinge entsprechend, während dagegen der Knöchling bei dieser Species offenbar als + Knöchling zu betrachten ist und sich dem + Timplinge anschliesst."

Um eine klare Uebersicht der elektrischen Vorgänge auf den Würfelflächen der ersten Art zu geben, wird es zweckmässig sein, einige derselben ausführlicher zu behandeln. Ich wähle dazu zunächst die schon früher öfter benutzte Fläche 1 am Krystall Nr. I und ziehe es der grössern Anschaulichkeit wegen vor, aus einer Versuchsreihe, bei welcher der ganze Krystall mit alleiniger Ausnahme der genannten Fläche in Platinsand eingehüllt war, und die Spitze des Platindrahtes der Mitte der Fläche 1 mittelst der Hebelvorrichtung nur genähert wurde, einen Auszug mitzutheilen. Der Krystall war am Morgen auf die angegebene Weise in den Platinsand eingesetzt und wiederholten Prüfungen unterworfen worden; nach einer wenigstens zweistündigen Unterbrechung ward er am Nachmittage desselben Tages von Neuem erhitzt; aus den bei dieser Erhitzung gemachten zahlreichen Beobachtungen wähle ich in der folgenden Tabelle nur einzelne in solcher Weise aus, dass der ganze Gang der Elektricitätsentwickelung deutlich erkannt werden kann. Der Krystall blieb während der ganzen Versuchsreihe unangerührt, auch wurde ihm die Elektricität niemals durch Bestreichen mit der Flamme entzogen, was übrigens auch keine wesentlichen Aenderungen erzeugt haben würde.

| T. | Elektricität | | T. | Elektricität | |
|---|---|---|---|---|---|
| | Art | Stärke | | Art | Stärke |
| 16⁰ | 0 | 0,0 | 157⁰ | + | 0,3 |
| 30 | 0 | 0,0 | 160 | + | 0,4 |
| 37 | — | 0,1 | 166 | + | 0,45 |
| 56 | — | 0,5 | 173 | + | 0,4 |
| 79 | — | 1,0 | 177 | — | 0,2 |
| 102 | — | 0,6 | 179 | — | 0,9 |
| 112 | — | 0,1 | 181 | — | 0,1 |
| 118 | + | 0,2 | 183 | — | 1,0 |
| 126 | + | 0,4 | 186 | — | 0,1 |
| 145 | + | 0,6 | 188 | 0 | 0,0 |
| 153 | + | 0,4 | | | |

Beim Eintreten der Erhitzung zeigt sich also die Fläche negativ, und zwar steigt die Stärke der Elektricität allmählig und nimmt ebenso wieder ab; dann folgt eine positive Periode. In dieser ist aber der Vorgang etwas anders; die Stärke der Elektricität erreicht ein Maximum bei 145⁰, sinkt darauf bis zu 157⁰, und steigt dann nochmals. Von 177⁰ an tritt die letzte negative Periode ein; auch in ihr geschieht die Zu- und Abnahme nicht allmählig, sondern nachdem bei 179⁰ ein Maximum von 0,9 Skalentheilen eingetreten ist, sinkt die Intensität bei 181⁰ bis 0,1 herab, und steigt dann bei 183⁰ wieder bis zu 1,0. Ueber 188⁰ zeigte sich der Krystall nicht elektrisch.

Eine andere am Morgen desselben Tages ebenfalls an der Fläche 1 angestellte Versuchsreihe zeigte einen durchaus analogen Gang der Elektricitätsentwickelung: in der ersten negativen Periode fand ein allmähliges Zu- und Abnehmen (Maximum 0,6 bei 70 und 80⁰) statt; in der mittleren bei 125⁰ beginnenden positiven Periode erschien nach einem Maximum von 0,6 bei 130 bis 140⁰ ein Minimum von 0,3 bei 154 bis 158⁰, worauf ein neues positives Maximum von 0,6 bei 166 bis 170⁰ folgte. Bei 173⁰ begann die dritte negative Periode; nach Erreichung eines Maximums von 0,8 bei 175⁰ sank die Stärke bei 178⁰ herab bis 0,1, während bei 180⁰ wieder die Stärke 0,4 beobachtet wurde.

Ein solches Abnehmen und Wachsen der elektrischen Intensität innerhalb einer Periode deutet auf eigenthümliche Vorgänge hin, die möglicherweise in solchen Fällen, wo die Abnahme so weit fortschreitet, wie in der obigen dritten negativen Periode, unter günstigen Umständen an der Stelle eines blossen Minimums auch eine völlige Umkeh-

rung der negativen Elektricität in die positive hervorrufen werden können. Da die dritte negative Periode sehr rasch verläuft, und eine Umkehrung in derselben, falls sie einträte, nur sehr kurze Zeit dauern würde, so wird es schwierig, sie wahrzunehmen. Auch habe ich während der steigenden Temperatur auf der Fläche 1 die Umkehrung nicht beobachtet, wohl aber, wie ich nachher anführen werde, auf den Flächen 2 und 6 desselben Würfels. Dass aber dieselbe auf der Fläche 1 unter günstigen Umständen ebenfalls eintreten kann, beweisen die unmittelbar folgenden Versuche über die elektrischen Erscheinungen beim Erkalten.

Die nächste Tabelle enthält die unmittelbare Fortsetzung der auf S. 197 im Auszuge mitgetheilten Versuchsreihe. Nach dem Auslöschen der Lampe zeigte sich die Fläche 1 nicht elektrisch bis 138°, dann wurden folgende Werthe beobachtet:

| T. | Elektricität | |
|---|---|---|
| | Art | Stärke |
| 135° | + | 0,1 |
| 133 | + | 0,3 |
| 130 | + | 0,7 |
| 127 | + | 1,0 |
| 123 | + | 0.9 |
| 118 | — | 0,2 |
| 110 | + | 0,9 |
| 107 | + | 0,2 |
| 102 | — | 0,2 |
| | etc. | |

Da mit dem Eintritte der mittleren negativen Periode beim Erkalten die vorstehende Versuchsreihe abgebrochen wurde, so will ich, um eine vollständige Uebersicht zu geben, die während des Erkaltens am Morgen erhaltenen Resultate im Auszuge mittheilen.

| T. | Elektricität | | T. | Elektricität | |
|---|---|---|---|---|---|
| | Art | Stärke | | Art | Stärke |
| 135° | 0 | 0,0 | 104° | — | 0,3 |
| 130 | + | 0,4 | 95 | — | 1,0 |
| 124 | + | 1,3 | 70 | — | 1,2 |
| 121 | + | 0.6 | 54 | — | 0,8 |
| 120 | — | 0,2 | 46 | — | 0,1 |
| 116 | + | 0,4 | 43 | + | 0,1 |
| 112 | + | 0,6 | 36 | + | 0,6 |
| 107 | + | 0,2 | 32 | + | 0,4 |

Man sieht, dass die Umkehrung der positiven Elektricität in der ersten Periode beim Erkalten stets an derselben Stelle bei 118 oder 120° wiederkehrt. In der mittlern negativen und ebenso in der letzten positiven Periode beim Erkalten habe ich dagegen nur ein allmähliges Wachsen und Abnehmen der Stärke beobachtet. Dem allerdings nur schwach auftretenden Minimum in der mittleren positiven Periode bei steigender Temperatur entspricht also bei sinkender Temperatur weder eine Umkehrung, noch auch nur ein Minimum.

Die Fläche 2 des Krystalles Nr. I glich in ihrem Verhalten der Fläche 1; sie zeigte also beim Erwärmen im Allgemeinen —+—, und beim Abkühlen +—+. In der dritten negativen Periode beim Erwärmen wurde aber auf dieser Fläche, wie schon zuvor erwähnt, nicht ein blosses Minimum von negativer Elektricität, sondern eine vollständige Umkehrung in + beobachtet. Die Fläche war — bis 125°, von 140 bis 189° +, und dann von 193° an wieder —. In dieser letzten Periode wurden folgende Elektricitäten gemessen:

| T. | Elektricität | |
|---|---|---|
| | Art | Stärke |
| 193° | — | 0,2 |
| 194 | — | 0,6 |
| 194½ | — | 0,5 |
| 195 | + | 0,1 |
| 196 | + | 0,1 |
| 197 | — | 0,4 |
| 200 | — | 0,2 |
| 201 | 0 | 0,0 |

Beim Abkühlen ward ebenso gegen Ende der ersten positiven Periode die Umkehrung in — beobachtet, wie sie vorhin an der Fläche 1 beschrieben worden ist. Da der Vorgang daselbst schon speciell erörtert worden, so führe ich keine einzelnen Messungen auf der Fläche 2 an.

Aus den letzten Angaben kann man wieder ersehen, wie rasch diese Umkehrung vorüber geht. Man muss also die einzelnen Beobachtungen so schnell als nur möglich auf einander folgen lassen. Es ist aber eben aus diesem Grunde nicht ausführbar, die Umkehrung in allen Versuchsreihen zu verfolgen, indem das Auge des Beobachters die übermässige Anstrengung auf längere Zeit nicht aushält, namentlich wenn die eine oder andere Periode nur eine schwache Elektricität

zeigt, und die Kraft des Sehorganes für die Erkennung und Messung der sehr geringen Ausschläge aufgespart werden muss. Ich habe daher auf sämmtlichen übrigen Flächen des Krystalles Nr. I die Umkehrung nicht speciell aufgesucht, und fand um so weniger Veranlassung dazu, als ich dieselbe ausser auf den Flächen 1 und 2 auch ungesucht auf den Flächen 3 und 6 des genannten Krystalles und auf ähnlich beschaffenen Flächen anderer Krystalle, z. B. der Fläche 3 und 4 des Krystalles Nr. II und der Fläche 6 des Krystalles Nr. VII (am letztern Krystall sind überhaupt nur zwei Flächen erster Art) antraf.

Indess kann ich doch nicht unterlassen, hier noch eine Bemerkung hinzuzufügen.

Auf der Fläche 1 erschien während der ersten positiven Periode beim Erkalten die Umkehrung in — nur auf sehr kurze Zeit, so dass das sofort wieder erscheinende + noch mehrfach beobachtet werden konnte. Da nun diese Umkehrung durch die Vorgänge im ganzen Krystall bedingt ist, so werden geringe Abweichungen in dem Erkalten und den Ableitungen, sowie die jedenfalls vorhandene Verschiedenheit in der Stärke der Elektricität auf den verschiedenen Ecken und Flächen auch Modificationen in dem Auftreten dieser Umkehrung hervorbringen. Infolge solcher Abweichungen erhielt die Umkehrung des + in — auf der Fläche 2 eine solche Ausdehnung, dass ich das — vier Mal von 117 bis 111°, das darauf folgende + aber nur noch ein Mal bei 110° beobachten konnte, worauf dann die mittlere negative Periode eintrat. Dabei war auch die Stärke dieses — auf der Fläche 2 grösser als auf der Fläche 1. Diese Ausdehnung und Stärke war wohl auch der Grund, weshalb die entsprechende Elektricität beim Erhitzen in der letzten negativen Periode auf dieser Fläche als Umkehrung erschien.

Bei der Fläche 2 war alle Aufmerksamkeit nöthig, um beim Erkalten die Rückkehr in + nicht zu übersehen. Gibt man den Abweichungen, welche den Unterschied in dem Verhalten der Flächen 1 und 2 bewirkten, noch etwas grössere Ausdehnung, so wird die negative Umkehrung sich noch mehr erweitern und verstärken, und die Rückkehr in + gar nicht mehr beobachtet werden können. Es wird dann nach der ersten positiven Periode des Erkaltens sogleich eine starke negative Elektricität eintreten, die nicht wieder in + zurückkehrt, sondern nur schwächer wird, und gleich in die mittlere negative Periode des Erkaltens übergeht. Und dies ist in der That der Vorgang, wie er sich aus

den aufgeschriebenen Beobachtungen an andern Flächen ergibt. Da ich indess, wie schon erwähnt, nicht absichtlich nach der Umkehrung in — und der Rückkehr in + gesucht und die einzelnen Messungen nicht mit grösster Schnelligkeit an einander gereiht habe, so kann möglicherweise auch die Rückkehr zu + in der Zwischenzeit zwischen zwei Messungen eingetreten sein.

Das soeben beschriebene Verhalten finden wir z. B. gleich in einer Versuchsreihe auf der neben der Fläche 1 und 2 liegenden Fläche 3 des Krystalles Nr. I. Der Krystall war bis 220° erhitzt worden, blieb unelektrisch bis zu 140°, und zeigte dann folgende Elektricitäten:

| T. | Elektricität | | T. | Elektricität | |
|---|---|---|---|---|---|
| | Art | Stärke | | Art | Stärke |
| 140° | + | 0,1 | 100° | — | 0,1 |
| 130 | + | 0,8 | 96 | — | 0,2 |
| 125 | + | 1,0 | 85 | — | 0,4 |
| 122 | + | 0,3 | 60 | — | 0,8 |
| 120 | — | 0,5 | 45 | — | 0,5 |
| 118 | — | 1,0 | 32 | — | 0,2 |
| 115 | — | 0,6 | 26 | — | 0,5 |
| 110 | — | 0,2 | 24 | — | 0,3 |
| 106 | — | 0,1 | | | |

Dass die bei 120° auftretende negative Elektricität der auf der Fläche 1 und 2 beobachteten Umkehrung aus + in — entspricht, geht klar aus der vollkommenen Uebereinstimmung der Temperatur hervor; die in vorstehendem Auszuge aus einer längern Beobachtungsreihe nach dem ersten starken Auftreten der negativen Elektricität sichtbare Abnahme entspricht der Rückkehr in + auf den Flächen 1 und 2. Ich werde übrigens später auf S. 209 noch eine Versuchsreihe an der Fläche 3 mittheilen, in welcher nach dem — bei 118 und 112° nochmals + und zwar von 111 bis 90° beobachtet wurde. Solche Unterschiede, wie sich zwischen den beiden in Rede stehenden Versuchsreihen zeigen, sind blos Folge eines etwas abgeänderten Vorganges beim Erkalten.

Gerade ebenso wie bei der Fläche 3 in der oben mitgetheilten Versuchsreihe fand ich beim Erkalten das Verhalten der ihr an demselben Krystalle gegenüber liegenden Fläche 5; bei 133° positives Maximum (+1,0 Skth.), dann bei 123° negatives Maximum, darauf bei 113° negatives Minimum (— 0,1 Skth.), und dann neues negatives Maximum bei

72 bis 57° (— 0,6 Skth.), woran sich die letzte positive Periode anschloss.

Durch geeignete Erhitzung und Erkaltung wird auch auf der letztgenannten Fläche nach dem Auftreten der negativen Elektricität sich nochmals + hervorbringen lassen, wie auf den vier andern Flächen 1, 2, 3 und 6 desselben Krystalles.

Fassen wir also das Vorstehende zusammen, so erhellt daraus, dass wir auf gewissen Würfelflächen der Boracitkrystalle zum wenigsten ebenso viele Wechsel beim Erwärmen und Erkalten beobachten als an den Ecken mit glatten Tetraederflächen; diese Würfelflächen erster Art, wie ich sie bezeichnet habe, zeigen also beim Erwärmen — + —, und beim Erkalten + — +. Dem ist aber noch beizufügen, dass, abweichend von den wenigstens bis jetzt auf den Würfelecken wahrgenommenen Vorgängen, in der dritten negativen Periode beim Erhitzen auf kurze Zeit noch eine Umkehrung in +, und ebenso in der ersten Periode beim Erkalten auf kurze Zeit noch eine Umkehrung in — auftreten kann, die sich, auch wo sie nicht sichtbar wird, doch durch einen eigenthümlichen Gang in der Stärke der Elektricitäten kund gibt.

Da diese Umkehrungen nahe an der Grenze des Ueberganges der höchsten Perioden in die mittlere liegen, so gestatten dieselben auch eine andere Auffassung, die ebenso gut, vielleicht selbst noch mehr gerechtfertigt ist, als die oben angegebene. Anstatt nämlich diese Umkehrungen zu den höchsten Perioden zu rechnen, können wir dieselben auch in die obersten Theile der mittleren Periode verlegen.

In der ausführlich mitgetheilten Beobachtungsreihe auf der Fläche 1 zeigt sich in der mittleren Periode beim Erhitzen gleich anfangs ein starkes Anwachsen der positiven Elektricität; dies ist nicht immer der Fall, sondern häufig bleibt die Elektricität nach dem ersten Erscheinen dieser Periode schwach und steigert sich erst stark gegen das Ende derselben, kurz vor dem Eintreten der dritten Periode. Diese starke positive Elektricität zu Ende der mittleren positiven Periode beim Erhitzen würde also der oben auf der Fläche 3 angegebenen starken negativen Elektricität zu Anfang der zweiten Periode beim Erkalten entsprechen.

Dass die beobachteten Intensitäten der in jeder Periode in der Mitte der Würfelflächen vorhandenen Elektricitäten je nach der Art der Erhitzung und Abkühlung etwas variiren, ist natürlich, weil ja der

ganze Krystall beim Erhitzen und Erkalten in seinen verschiedenen Schichten nicht einerlei Temperatur besitzt, und die Aenderung dieser Temperatur von aussen nach innen gar sehr von der grössern oder geringern Geschwindigkeit des Erhitzens und des Erkaltens abhängt. Namentlich ist es die mittlere Periode, die sich so zu sagen beim Abkühlen bisweilen versteckt, wie ich auch schon S. 170 nachgewiesen habe. Das Mittel, sie wahrnehmbar zu machen, besteht einfach in einer verlangsamten Abkühlung oder in einer nur bis zur zweiten Periode gehenden Erhitzung.

Nähert man den Platindraht der Krystallfläche nicht mittelst der Hebelvorrichtung, sondern einfach mit der Hand, so ist es möglich, fast gleichzeitig mit der Mitte der Fläche auch deren Winkelpunkte zu untersuchen. Durch solche Prüfung ergab sich z. B. die Fläche 1 des Krystalles Nr. I stets merklich stärker elektrisch als ihre Winkelpunkte. Aus dieser Angabe darf indess nicht sofort der Schluss gezogen werden, dass die Mitte dieser Fläche in Wirklichkeit stets stärker elektrisch war als ihre Winkelpunkte; es werden nämlich durch den Ausschlag des Elektrometers nur die Vertheilungswirkungen von Seiten der Elektricität des Krystalles auf den genäherten Draht gemessen. Man sieht aber leicht, dass selbst unter Voraussetzung einer gleichförmigen oder selbst an den Winkelpunkten ein wenig stärkeren Elektricität die Bewegung des Drahtes gegen die Mitte der Fläche infolge der ringsum liegenden elektrischen Massen eine stärkere Vertheilung im genäherten Drahte erzeugen muss, als die Bewegung desselben gegen einen Winkelpunkt. Auch die Berührung der verschiedenen Stellen entscheidet nichts, indem bei niedern Temperaturen, wo sie allein anwendbar wäre, die Hauptwirkung, welche den Ausschlag im Elektrometer erzeugt, stets eine Vertheilungswirkung ist. Gibt die Berührung einen stärkern Ausschlag als die blosse Annäherung des Drahtes, so ist dies fast nur eine Folge der grössern Nähe. Uebrigens ist die Zunahme des Ausschlags durch Berührung in niederen Temperaturen gegen den durch blosse Annäherung bewirkten nicht so bedeutend, wie man wohl glauben möchte. Selbst wenn die Spitze des Platindrahtes bei der Annäherung mittelst der Hebelvorrichtung noch um eine mit blossen Augen erkennbare Grösse von der Mitte der Würfelfläche absteht, so wächst je nach den Umständen der Ausschlag durch die Berührung nur im Verhältniss von etwa 2:3, oder 1:2.

### Elektrisches Verhalten der Mitte der Würfelflächen zweiter Art.

Mit dem im vorhergehenden Abschnitte beschriebenen, ganz bestimmt ausgeprägten Verhalten einer Anzahl von Würfelflächen, stimmen nun aber, wie schon angedeutet, die Vorgänge auf vielen andern Würfelflächen nicht überein; während die zuvor behandelten Würfelflächen erster Art im Allgemeinen sich in ihrer Polarität denjenigen Würfelecken anschliessen, welchen glatte Tetraederflächen entsprechen, folgen andere Würfelflächen, die ich jetzt als Würfelflächen zweiter Art bezeichnen will, in ihrer elektrischen Vertheilung im Ganzen den Würfelecken mit rauhen Tetraederflächen. Ich werde zunächst die strenge Nachweisung geben, dass in der That solche den Würfelflächen erster Art gewissermassen polarisch entgegengesetzte Flächen existiren; was am kürzesten und sichersten durch Mittheilung eines Auszugs aus einer Versuchsreihe, die ich auf einer Fläche zweiter Art ausgeführt habe, geschehen wird. Dazu wähle ich die Würfelfläche 2 des später als Nr. VII bezeichneten Boracitwürfels, weil sie erstens hinreichend starke Elektricität gibt, und zweitens so zahlreiche Beobachtungsreihen an ihr ausgeführt worden sind, dass mir kein Vorgang auf derselben unbekannt geblieben ist.

| T. | Elektricität Art | Stärke | | T. | Elektricität Art | Stärke | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 35° | + | 0,1 | | 160° | + | 0,2 | |
| 55 | + | 0,2 | | 155 | + | 0,3 | |
| 75 | + | 0,3 | | 150 | + | 0,5 | |
| 95 | + | 0,25 | | 146 | + | 0,4 | |
| 108 | + | 0,1 | | 143 | — | 1,0 | |
| 115 | 0 | 0,0 | | 135 | — | 0,7 | |
| 122 | — | 0,1 | | 133 | — | 0,5 | |
| 132 | — | 0,1 | | 124 | — | 0,1 | |
| 145 | — | 0,1 | | 118 | 0 | 0,0 | |
| 155 | — | 0,05 | | 110 | + | 0,1 | |
| 166 | 0 | 0,0 | | 100 | + | 0,2 | |
| 170 | + | 0,05 | | 87 | + | 0,3 | |
| 172 | + | 0,1 | | 71 | + | 0,3 | |
| 173 | + | 0,2 | | 55 | + | 0,2 | |
| 176 | + | 0,5 | | 48 | — | 0,1 | |
| 177 | + | 0,2 | | 44 | — | 0,2 | |
| 178 | 0 | 0,0 | | 42 | — | 0,3 | |
| 180 | 0 | 0,0 | Lampe ausgelöscht | 33 | — | 0,6 | |
| 166 | 0 | 0,0 | | | etc. | | |

In der vorstehenden Tabelle führe ich indess, wie schon angedeutet, der Kürze wegen aus den sehr zahlreichen Messungen einer Versuchs*reihe* nur so viel Einzelwerthe an, als nöthig sind, um den Fortgang der Erscheinungen vollständig zu übersehen.

Vergleichen wir zunächst die während steigender Temperatur auf der Fläche 2 des Krystalles Nr. VII beobachteten Elektricitäten mit den unter gleichen Umständen auf den Flächen erster Art wahrgenommenen, so zeigt sich zwischen der vorstehenden und der auf S. 197 mitgetheilten Tabelle ein vollständiger polarer Gegensatz. Während auf der Mitte der Würfelfläche erster Art die Reihenfolge —+— gefunden wurde, ergab sich auf der Mitte der Würfelfläche 2 des Krystalles Nr. VII die Reihenfolge +—+; ob die Umkehrungen, wie man vielleicht aus den Temperaturangaben schliessen könnte, auf der letztern Fläche etwas früher eintreten, muss ich dahin gestellt sein lassen, indem nicht blos die Tiefe des Eintauchens des Thermometergefässes in die Eisenfeile, sondern auch die Grösse der erhitzenden Flamme und die Dimensionen des Krystalles (welche letztern bei Nr. I und Nr. VII sehr verschieden sind) auf den Unterschied zwischen der Temperatur des Thermometers und der innern Krystallmasse einen wesentlichen Einfluss haben.

Eigenthümlich gestalten sich die elektrischen Erscheinungen auf der Fläche 2 des Krystalles Nr. VII beim Erkalten; ihre Mitte zeigt erst kurze Zeit +, dann —, darauf + und zuletzt wieder —. Eine Vergleichung des zweiten Abschnittes der vorstehenden Tabelle, welcher die Erscheinungen beim Erkalten angibt, mit den auf S. 198 mitgetheilten Beobachtungen an einer Fläche erster Art ergibt zwischen den beiden Flächen (2 des Krystalles Nr. VII und 1 des Krystalles Nr. I) innerhalb der beiden letzten Perioden von etwas über 100° an abwärts einen *vollständigen* Gegensatz; während die Fläche erster Art in ihrer Mitte von 104 bis 46° —, und darauf + darbot, finden wir auf der Mitte der Fläche 2 des Krystalles Nr. VII gerade entgegengesetzt von 110 bis 55° + und darauf —. Oberhalb der Temperaturen von 104 oder 110° finden wir auf den Flächen erster Art im Allgemeinen eine positive Periode, welcher auf den Flächen zweiter Art eine negative entspricht. So weit ist der elektrische Gegensatz beider Flächen vollständig vorhanden.

Ausser den bisher besprochenen elektrischen Erregungen werden nun aber (bei sehr hohen Wärmegraden) während des Erkaltens auf beiderlei Flächen noch den eben genannten Elektricitäten entgegen-

gesetzte Polaritäten, also auf den Flächen erster Art eine negative, und auf den Flächen zweiter Art eine positive Elektrisirung beobachtet; jedoch mit dem Unterschiede, dass auf den Flächen erster Art die negative Elektricität als Umkehrung zu Ende der ersten positiven Periode, dagegen auf den Flächen zweiter Art die positive Elektricität vor der höchsten negativen Periode auftritt.

Durch eigends mit grösster Vorsicht und Sorgfalt angestellte Versuche habe ich mich versichert, dass die zu Anfang der Abkühlung auf den Flächen zweiter Art erscheinende positive Elektricität nicht etwa zufälligen Störungen, z. B. einer Berührung, ihre Entstehung verdankt. Um sie auf der Fläche 2 des Krystalles Nr. VII wahrzunehmen, ist durchaus keine Berührung nöthig; um vor jeder Berührung sicher zu sein, habe ich das stumpfe Drahtende selbst nur bis auf ¼ Linie genähert, und dennoch ganz bestimmte positive Ausschläge des Goldblättchens im Elektrometer erhalten.

Ungesucht habe ich diese kurze positive Periode zu Anfang der Erkaltung auch auf andern Würfelflächen zweiter Art, z. B. auf der Fläche 3 desselben Krystalles, sowie der Fläche 4 des Krystalles Nr. V wahrgenommen, weshalb ich nicht zweifele, dass sie ein allgemein auf den Würfelflächen zweiter Art vorhandener Vorgang ist, was besonders durch die in einem der folgenden Abschnitte beschriebenen Erscheinungen, wie sie bei der Berührung stark erhitzter Krystalle beobachtet werden, wahrscheinlich gemacht wird. Dies schliesst aber nicht aus, dass diese kurze positive Periode nicht durch besondere Erkaltungsweisen mit der unmittelbar folgenden negativen zusammenfallen und von letzterer als der stärkeren in ihrem Auftreten entweder sehr geschwächt, oder selbst ganz unterdrückt werden kann, weshalb es mich nicht verwundern würde, wenn sie bei blosser Annäherung in einzelnen Fällen durch das Experiment nicht nachweisbar sein sollte, eben so wenig, als wenn der ihr entsprechende Vorgang bei steigender Temperatur auf dem Wege des Versuchs von mir nicht aufgefunden werden konnte. Schon bei den Würfelflächen erster Art zeigte sich bei steigender Temperatur die in die höchste negative Periode fallende positive Einschaltung viel schwächer, als beim Erkalten die entsprechende negative, und wurde öfter nicht gefunden, wo die letztere beim Erkalten deutlich auftrat; gerade ebenso entzieht sich auf den Flächen zweiter Art auch die negative Periode bei hoher steigender Temperatur, welche der positiven

beim Beginn des Erkaltens entspricht, falls sie überhaupt vorhanden sein sollte, der Beobachtung bei blosser Annäherung des Drahtendes; durch Berührung mit letzterm ist sie aber nicht mit Bestimmtheit nachweisbar, indem solche bei dieser Temperatur, wie ich später noch ausführlich angeben werde, stets einen positiven Ausschlag liefert.

Da die positive Periode zu Anfange des Erkaltens nur kurze Zeit (gewöhnlich viel kürzer als in der oben mitgetheilten Versuchsreihe) dauert, so wird es, wenn sie unerwartet eintreten sollte, schwierig, sie zu beobachten, falls sie nur schwache Intensität besitzt. Es ist am besten, durch einen vorläufigen Versuch ungefähr auszumitteln, bei welchem Stande des Thermometers während der Abkühlung die höchste negative Periode eintritt; dann kann man bei einem unmittelbar darauf folgenden, genau unter denselben Umständen angestellten Versuche das Auge bis zu den etwas oberhalb jenes Standes liegenden Temperaturgraden ausruhen lassen, und darauf unausgesetzt beobachten, ob die schnell auf einander folgenden Annäherungen der Drahtspitze mittelst des Hebels positivelektrische Ausschläge erzeugen.

Um die elektrische Beschaffenheit einer Fläche, ob sie der ersten oder zweiten Art beizuzählen ist, mit Sicherheit zu bestimmen, scheint es nicht nöthig zu sein, auf derselben sämmtliche Perioden sowohl bei steigender als bei sinkender Temperatur zu beobachten. An den Boracitkrystallen sind von mir überhaupt über 80 Würfelflächen, und davon ungefähr die Hälfte durch alle Perioden beim Erwärmen und Erkalten untersucht worden; es ist mir dabei kein Fall vorgekommen, wo nicht die Beschaffenheit der Fläche sich aus den zu Anfang des Erwärmens und zu Ende des Erkaltens beobachteten Elektricitäten unzweideutig hätte bestimmen lassen, vorausgesetzt, dass in beiden einander entsprechenden Perioden polarisch entgegengesetzt elektrische Zustände wahrgenommen worden sind. Ich habe es daher auch nicht für nöthig erachtet, bei der übrigen Hälfte der Flächen die Erhitzung über 80° steigen zu lassen, zumal ich aus gewissen Gründen manche Krystalle nicht gern sehr hohen Temperaturen auszusetzen wünschte. In dem spätern Kapitel, welches die speciellen Angaben über die an jedem einzelnen Krystalle vorkommenden Flächen enthält, werde ich indess stets beifügen, ob die Beobachtungen durch sämmtliche Perioden fortgesetzt, oder nur auf Temperaturen unterhalb der Siedehitze des Wassers beschränkt worden sind.

### Abweichungen von dem in den letzten beiden Abschnitten angegebenen Verhalten beim Erkalten.

Schon oben S. 170 habe ich umständlich den Einfluss dargelegt, welchen die Art des Erkaltens auf die in der Mitte einer Würfelfläche wahrnehmbaren Elektricitäten ausübt. In dem dort behandelten Falle war es speciell die mittlere negative Periode beim Erkalten, welche durch schnelles Sinken der Temperatur gar nicht hervortrat. Indess kommen auch Fälle vor, wo andere Perioden durch zufälliges Zusammentreffen von Umständen unsichtbar werden. Durch zweckmässige Abänderungen der letzteren gelingt es dann, falls der Krystall nicht gar zu schwach elektrisch erregt wird, in den allermeisten Fällen die versteckten Perioden hervortreten zu lassen.

Trifft dies Verschwinden, wie z. B. in dem S. 170 behandelten Falle eine mittlere Periode, so ist das Vorhandensein derselben sehr leicht aus der Ab- und Zunahme der elektrischen Intensitäten zu erkennen. Unangenehmer ist es, wenn die mittlere Periode beim Erkalten die letzte Periode überdeckt, wodurch dann die eigenthümliche Anomalie zu entstehen scheint, dass die Fläche zu Anfange des Erwärmens dieselbe Polarität zeigt, wie beim Erkalten; geduldiges Ausharren bis der Krystall nur noch wenige Grade über die Zimmertemperatur erwärmt ist, reicht übrigens gewöhnlich hin, sich von dem Vorhandensein der letzten Periode beim Erkalten thatsächlich zu überzeugen.

Da, wie oben gesagt, je nach der Art und Weise des Erkaltens Abweichungen von den in den letzten beiden Abschnitten angegebenen Erscheinungen nicht blos möglich erscheinen, sondern sogar auch thatsächlich von mir beobachtet worden sind, so halte ich es für meine ganz besondere Pflicht, durch specielle Versuche darzuthun, in welcher Weise und in welcher Grösse dieselben auftreten.

Ich wähle zunächst die Fläche 3 des Krystalles Nr. I. Schon oben S. 201 ist eine Versuchsreihe über dieselbe mitgetheilt; darnach zeigte der Krystall beim Erkalten von 140 bis 122° +, dann bis zu 24° herab —; beim vorhergehenden Erhitzen waren alle drei Perioden —+— regelmässig beobachtet worden. In einer andern Versuchsreihe, in welcher der Krystall seit 48 Stunden nicht erhitzt worden war, erhielt ich beim Erhitzen ganz dieselben Erscheinungen, wie bei der oben er-

währten, beim Erkalten dagegen die folgenden auszugsweise mitgetheilten elektrischen Intensitäten.

| T. | Elektricität | | T. | Elektricität | |
|---|---|---|---|---|---|
| | Art | Stärke | | Art | Stärke |
| 140° | + | 0,3 | 100° | + | 0,5 |
| 134 | + | 1,4 | 90 | + | 0,05 |
| 124 | + | 3,1 | 80 | — | 0,2 |
| 120 | + | 0,9 | 55 | — | 1,5 |
| 118 | — | 0,2 | 31 | — | 0,7 |
| 112 | — | 0,2 | 22 | — | 0,1 |
| 110 | + | 0,3 | 21 | 0 | 0,0 |
| 107 | + | 1,0 | 20 | + | 0,1 |

Während also auf S. 201 die positive Periode unter 118° nicht wieder sichtbar ward, sondern blos durch eine Schwächung sich ankündigte, ist sie in der vorstehenden Tabelle sehr stark und andauernd vorhanden gewesen.

Ganz in gleicher Weise kann ich zwei Versuchsreihen über die Fläche 4 am Krystall Nr. II vorlegen; ich will nur einzelne Messungen aus denselben mittheilen und beide Reihen gleich neben einander stellen.

| T. | Elektricität | | T. | Elektricität | |
|---|---|---|---|---|---|
| | Art | Stärke | | Art | Stärke |
| 170° | + | 0,3 | | | |
| 158 | + | 1,0 | 152° | + | 0,15 |
| 140 | + | 0,1 | 148 | 0 | 0,0 |
| 135 | — | 0,2 | 142 | — | 0,1 |
| 130 | — | 1,0 | 132 | — | 0,4 |
| 110 | — | 0,3 | 123 | + | 0,05 |
| 85 | — | 0,2 | 100 | + | 0,1 |
| 50 | — | 0,3 | 82 | + | 0,15 |
| 40 | — | 0,25 | 72 | + | 0,15 |
| 32 | + | 0,1 | 50 | 0 | 0.0 |
| 22 | + | 0,5 | 45 | — | 0,05 |
| | | | 37 | — | 0,1 |
| | | | 30 | + | 0,7 |
| | | | 28 | + | 0,1 |

Man sieht, wie Jemand, der z. B. die Fläche 3 des Krystalles Nr. I selbst bis zu 22° des Thermometers abkühlen lässt, dennoch trotz dieser schon weit vorgeschrittenen Erkaltung dieselbe Elektricität findet, wie zu

Anfang des Erhitzens, so dass zwischen beiden Zuständen beim Ende des Erkaltens und beim Beginn des Erhitzens kein polarischer Gegensatz vorhanden zu sein scheint. Hat man aber die elektrischen Erscheinungen bei steigender Temperatur durch alle Perioden und ebenso bei sinkender mit Genauigkeit beobachtet, so kann über die elektrische Natur der Fläche auch nicht im geringsten ein Zweifel obwalten.

Wie wenig einzelne Vorgänge beim Erkalten für sich allein im Stande sind, die elektrische Natur der Flächen zu bestimmen, geht z. B. klar aus der zweiten Versuchsreihe der letzten Tabelle hervor. Ein Jeder, dem blos die in dieser Tabelle während der Abkühlung von 152 bis 37° ausgeführten Beobachtungen vorgelegt werden, wird vollständig im Ungewissen sein, ob er die Fläche der ersten oder der zweiten Art zurechnen soll, denn auch bei der Fläche zweiter Art fängt ja die beim Erkalten wahrnehmbare Erregung mit + an. Dagegen sind stets die Vorgänge bei steigender Temperatur entscheidend, weshalb ich auch auf sie, wie früher schon hervorgehoben, das Hauptgewicht lege.

Nach Erläuterung der Vorgänge, welche je nach den Modificationen beim Erkalten auf der Fläche 3 des Krystalles Nr. I und der Fläche 4 des Krystalles Nr. II wahrgenommen werden, ergibt sich die Erklärung einer scheinbaren Anomalie von selbst.

Unter den sämmtlichen von mir untersuchten Würfelflächen gibt es nur eine, die Fläche 1 des Krystalles Nr. VIII, bei welcher es mir nicht hat gelingen wollen, zu Anfange der Erwärmung und zu Ende der Erkaltung polarisch entgegengesetzte Elektricitäten zu beobachten; leider sind die auf der genannten Fläche erregbaren Elektricitäten äusserst schwach, so dass es nicht einmal möglich ist, die verschiedenen Perioden beim Erhitzen durch blosse Annäherung des Drahtendes wahrzunehmen. Wo aber Berührungen nöthig gewesen, bleiben die auf solche Weise gewonnenen Resultate stets mit einer gewissen Unsicherheit behaftet; und dies gilt vor Allem von den in höhern Temperaturen gemachten Beobachtungen.

Die Fläche 1 des genannten Krystalles ist mehr als 12 Mal unter den verschiedensten Umständen erhitzt und abgekühlt worden; aber stets gab sie zu Anfange der Erhitzung und gegen Ende des Erkaltens, so lange sie überhaupt elektrisch blieb, negative Elektricität.

Lassen wir zufolge des Früheren die Beobachtungen beim Erwär-

men als entscheidend gelten, so ist die Fläche 1 den Flächen erster Art zuzuzählen.

Doch sei hier beiläufig bemerkt, dass man auch bei Beurtheilung der zu Anfange des Erhitzens entstehenden Elektricitäten mit Vorsicht zu Werke gehen muss, indem manche Krystalle die von einer vorhergehenden Erkaltung herrührende Elektricität sehr lange festhalten. Dieses scheinbare Fortdauern der von der Erkaltung herrührenden Elektricität entsteht allein dadurch, dass wir die Wärmegrade an einem in die Eisenfeile eingetauchten Thermometer ablesen, dagegen uns über die wahre Temperatur im Innern der Krystalle, die sehr schlechte Wärmeleiter sind, in völliger Unkenntniss befinden. Will man nach Möglichkeit diesen Fehler ausschliessen, so muss man an einem kurz zuvor nicht erhitzten Krystalle die Beobachtungen anstellen; leider aber zeigen die meisten Krystalle, wenn sie längere Zeit nicht erhitzt worden sind, bei Temperaturen von 60 oder 70⁰ keine oder nur sehr schwache elektrische Erregungen, wie schon mehrfach erwähnt worden ist. Muss man, um dem letzterwähnten Uebelstande zu entgehen, den Krystall zuvor erwärmt haben, so ist es zweckmässig, denselben möglichst tief abkühlen zu lassen.

Ich will das Gesagte durch ein Beispiel erläutern. Die Fläche 2 des Krystalles Nr. II ist eine Fläche erster Art, muss also zu Anfang des Erhitzens negativ sein. Als der Krystall zuvor nicht erhitzt war und die Flamme der Lampe sehr gross brannte, zeigte die genannte Fläche sich unelektrisch, bis dass das Thermometer 90⁰ stand; da erst wurde sie —, später erschien +, und zuletzt wieder —. Beim Erkalten ward + — + beobachtet. Als das Thermometer bis 30⁰ gesunken war, besass die Fläche noch positive Elektricität; nach neuem Anzünden der Lampe blieb in ihrer Mitte positive Elektricität wahrnehmbar, bis das Thermometer 85⁰ zeigte. Als der zuvor nicht erwärmte Krystall Nr. II mittelst einer kleinen Flamme erhitzt wurde, blieb die Fläche 2 nur unelektrisch bis 42⁰, wo — erschien. Abgekühlt bis 23⁰, wo sie + 0,3 zeigte, blieb bei neuer Erhitzung eine schwache positive Polarität bis 55⁰; erst bei 70⁰ ward deutlich — wahrgenommen. Als der Krystall nach mehreren anderen Versuchen bis 18⁰ abgekühlt war, wobei er + 0,5 zeigte, kehrte sich nach dem Anzünden der Lampe mit kleiner Flamme die positive schon in negative um, als das Thermometer erst 32⁰ erreicht hatte.

Schliesslich muss ich noch bemerken, dass wenn ich mich so ausdrücken darf, einige Flächen sich gegen geringe Modificationen der äussern Bedingungen empfindlicher zeigen als andere, und zwar hat jede solche Fläche eine gewisse Neigung zu einer bestimmten Art und Grösse von Abweichungen, die einer speciellen Untersuchung unterworfen werden müssen, wofern man nicht Irrungen ausgesetzt sein will.

### Ueber die Ausbreitung der Elektricitäten auf den Würfelflächen.

So grosse Vorzüge die Annäherung der Drahtspitze mittelst der Hebelvorrichtung auch besitzt, weil man niemals Reibungselektricität zu fürchten hat, und wenn die Annäherung in einer Versuchsreihe stets auf nahe gleiche Weite und gegen dieselben Punkte erfolgt, selbst die Stärke der Elektricität messen kann: so ist doch andererseits mit ihr nothwendig der Uebelstand verknüpft, dass man eben nur die elektrische Vertheilung in dem Drahte bei Annäherung an einen bestimmten Punkt einer Fläche, und nicht auch an die übrigen beobachten kann. Es genügt daher das genannte Beobachtungsverfahren nicht vollständig; die Versuche müssen mit dem in der Hand gehaltenen Drahte wiederholt werden, um über die Beschaffenheit der ganzen Flächen Auskunft zu erhalten. Weil der elektrische Zustand der Krystalle zu Ende der Erkaltung sich nur sehr langsam ändert, so habe ich z. B. in dieser Periode rasch nach einander die verschiedenen Theile einer Würfelfläche mittelst der nöthigenfalls bis zur Berührung genäherten Drahtspitze untersucht, und der leichtern Uebersicht wegen die erhaltenen Resultate mit blauer (für +) und mit rother (für —) Farbe in zollgrosse auf Papier gezeichnete Quadrate, oder auf die Flächen kleiner aus Holz gefertigter Würfel aufgetragen.

Was zunächst die Stärke der elektrischen Erregungen auf den Würfelflächen betrifft, so ergibt sich aus den mittelst der Hebelvorrichtung angestellten Versuchen, dass die auf der Mitte der Würfelflächen erregten Elektricitäten nicht nur auf den Flächen verschiedener Krystalle, sondern selbst auf den Flächen eines und desselben Krystalles eine grosse Verschiedenheit in ihrer Stärke darbieten, und zwar gilt Letzteres nicht blos, wenn ungleichartige Flächen (Flächen erster und zweiter Art), sondern auch wenn Flächen einer und derselben Art mit einander verglichen werden. Wie schon früher bemerkt, zeichnen sich an sehr vielen Krystallen eine, seltner zwei Flächen durch grosse Schwäche

ihres elektrischen Zustandes aus, so dass ihre genaue Bestimmung mit Schwierigkeiten verbunden ist. Um Wiederholungen zu vermeiden, will ich hier keine Einzelheiten aufzählen; mehrfache Belege dafür werden sich aus den spätern Angaben über die Beschaffenheit der Würfelflächen an den verschiedenen Krystallen entnehmen lassen.

Mittelst des in der Hand gehaltenen Drahtes findet man ferner Unterschiede in der Ausbreitung, welche die eine oder andere Elektricität auf den Würfelflächen erlangt; in gewissem Grade hängt die grössere oder geringere Ausbreitung mit der grössern oder geringern Stärke der Elektricität in der Mitte der Flächen zusammen. Indess gibt es doch auch Fälle, wo die Elektricität eines Krystalles überhaupt schwach ist, und doch auf der einen oder andern Fläche die eine Elektricität eine bedeutende Ausdehnung (fast über die ganze Fläche) besitzt, was dann allerdings zur Folge hat, dass die Ausschläge des Elektrometers durch die Vertheilungswirkung der ausgedehnten elektrischen Fläche auf den Zuleitungsdraht im Verhältniss zu den übrigen Flächen stark werden.

Man sieht leicht, dass wenn die Mitte der Würfelfläche in einem bestimmten Zeitpunkte mit zwei Würfelecken übereinstimmt, in der ganzen Länge der durch diese Ecken gelegten Diagonale eine und dieselbe Elektricität vorhanden sein wird. Man kann dann also die Spitze des Platindrahtes den einzelnen Punkten dieser Diagonale, von einer Ecke zur andern hin fortrückend, nähern, ohne dass ein Wechsel der Elektricität eintritt. Dagegen gelingt dies nicht beim Vorwärtsgehen in der andern Diagonale, indem hierbei die Ausschläge nach der Mitte zu sich umkehren. Parallel mit der einen Diagonale erstreckt sich also eine Zone, in welcher die Elektricität dem Zeichen nach (nicht etwa auch in Bezug auf die Stärke) sich nicht ändert. Diese Zone hat nun auf den verschiedenen Flächen eine sehr verschiedene Breite. Bald erscheint sie ziemlich ausgedehnt, und wird dann, soweit sich dies ermitteln lässt, fast von zwei geraden mit der Diagonale parallelen Linien begrenzt; ein anderes Mal zieht sie sich von den Ecken, wo sie die grösste Breite besitzt, zusammen, so dass ihre Breite in der Mitte nur gering ist; in noch andern Fällen, wo sie sehr ausgedehnt ist, nimmt sie die ganze oder fast die ganze Fläche ein, so dass an den beiden mit ihr ungleichnamigen Ecken die zugehörige Elektricität nur auf den äussersten Spitzen gefunden wird.

Infolge der Ungleichzeitigkeit in den Uebergängen der einzelnen

Perioden in einander kann die Breite, oder selbst die Lage einer solchen Zone während steigender und sinkender Temperatur sich mannichfach abändern; sie kann durch die eben bezeichneten Einflüsse eine Zeitlang parallel mit der einen Diagonale liegen, während sie zuvor die andere zur Mittellinie hatte, was jedes Mal eintritt, wenn die Ecken sich früher umkehren als die Mitte der Fläche selbst. Erhalten durch zeitigere Umkehrung der ungleichnamigen Ecken alle vier Ecken mit der Mitte der Fläche dieselbe Polarität, so überzieht die elektrische Zone die ganze Fläche.

Nach den von mir gemachten Beobachtungen scheint nun die Zone nicht immer der Diagonale genau parallel, sondern auf manchen Flächen etwas gekrümmt zu sein; ich möchte sagen, die zwei mit ihr ungleichnamigen Ecken wären ungleich stark, und die stärkere drückte die Zone nach der schwächern hinüber. Man vergesse hierbei aber nicht, dass alles dies sich nicht unmittelbar sehen lässt, sondern nur aus oft wiederholten Ausschlägen des Elektrometers durch Annähern des Drahtes an die verschiedenen Stellen der Fläche geschlossen werden kann. Tritt eine solche Unsymmetrie an einer sehr breiten Zone ein, so wird von den ungleichnamigen Eckpunkten der eine von der Zone gewissermassen verschlungen, und nur der andere allein bleibt in grösserer oder geringerer Ausdehnung sichtbar. Specielle Versuche abzubilden dürfte überflüssig sein.

Beiläufig sei bemerkt, dass ähnliche Unterschiede in der Stärke der Elektricität wie auf den Flächen auch auf den Würfelecken eines und desselben Krystalles angetroffen werden.

### Vergleichung der Würfelflächen erster Art unter einander und mit den Ecken und Rhombendodekaederflächen in Bezug auf ihr elektrisches Verhalten.

Um eine Vergleichung zwischen dem Verhalten der Würfelflächen mit den Ecken anzustellen, habe ich den Krystall Nr. I benutzt. Derselbe wurde, mit der zu untersuchenden Fläche aufwärts gewandt, nur so weit in den Platinsand eingehüllt, dass er noch mit $\frac{1}{4}$ seiner Höhe aus demselben herausragte; es waren also ausser der obern Würfelfläche und den anliegenden Dodekaederflächen auch noch schmale Streifen der seitlichen Würfelflächen unbedeckt.

Ich werde auf S. 218 eine von den in dieser Weise an sämmtlichen Flächen ausgeführten Versuchsreihen ausführlich mittheilen; daher verweise ich bezüglich des Speciellen auf jene Tabelle, und stelle hier nur die allgemeinen Beziehungen zwischen den Flächen und Ecken zusammen.

Betrachten wir zunächst die Vorgänge beim Erwärmen.

Einem früheren Abschnitte zufolge sind die Würfelflächen erster Art beim Beginn des Erwärmens —, und stimmen im Allgemeinen in der Beschaffenheit ihrer Elektricitäten mit denjenigen Würfelecken überein, an welchen die glatten Tetraederflächen auftreten. Es mögen der Kürze wegen die Flächen mit *F*, die den glatten Tetraederflächen entsprechenden Würfelecken mit *g*, und die andern mit *r* bezeichnet werden: so sind also zu Anfange des Erwärmens *F* und *g* —, *r* dagegen +, und zwar zeigen die ganzen Würfelflächen und, wie sich nach den frühern Mittheilungen über den Krystall Nr. I erwarten lässt, auch die Dodekaederflächen —. Bei Temperaturen des daneben befindlichen Thermometers von 110 bis 120° kehren sich die Ecken *r* mit den rauhen Tetraederflächen um, so dass die Oberfläche des ganzen Krystalles, soweit sie aus dem Platinsande hervorragt, negative Elektricität besitzt. Gegen 150° beginnen dann die Würfelecken *g*, sowie die Würfelflächen ihre negative Elektricität in die positive zu verwandeln, wobei entsprechend dem Früheren die Dodekaederflächen noch negativ bleiben. Die jetzt positiv gewordenen Ecken *g*, und die gleichnamige Fläche dehnen ihre positive Region immer weiter aus, so dass bei einer 10 bis 15° höhern Temperatur die nach *g* gelegenen Hälften der Dodekaederflächen schon +, und nur die nach *r* hin gelegenen Hälften noch — sind; bei noch höherer Temperatur bemächtigt sich die positive Elektricität der ganzen Dodekaederflächen, und die negative bleibt allein auf die rauhen Tetraederflächen beschränkt; die positive Elektricität verdrängt endlich auch hier die negative, so dass jetzt die ganze freie Oberfläche des Krystalles positive Elektricität zeigt. Nach einiger Zeit nimmt die Stärke der positiven Elektricität ab und die Ecken *g*, sowie die Würfelflächen beginnen ihre positive Elektricität wieder in die negative zu verwandeln, die nun ihrerseits ebenso, wie zuvor die negative Elektricität, ihren Bereich erweitert; nachdem die Dodekaederflächen erst in den nach *g* zu gelegenen Hälften negativ geworden (wobei die nach *r* zu gelegenen noch positiv), nimmt bei noch weiterer Er-

hitzung die negative Elektricität bald die ganzen Dodekaederflächen ein und herrscht schliesslich auch über den Ecken *r*, so dass das Elektrometer beim Annähern des Platindrahtes an alle Punkte der freien Oberfläche des Krystalles nur negative Elektricität anzeigt. Hierbei ist die in einem der vorhergehenden Abschnitte S. 199 erwähnte Umkehrung in der letzten positiven Periode des Erhitzens nicht in Betracht gezogen, indem es bei der gleichzeitigen Untersuchung der elektrischen Beschaffenheit der Flächen und Ecken nicht möglich ist, dieselbe genau zu beobachten.

So verhalten sich beim Erwärmen bis auf kleine ganz unwesentliche Abweichungen in der Zeit der Umkehrungen, der etwas grössern oder geringern Stärke und Ausbreitung der einen oder andern Elektricität, sämmtliche Flächen an diesem Krystalle Nr. I; überall zeigen die Würfelflächen (mit Ausschluss der früher erwähnten Umkehrung in der höchsten Periode) in ihrem Verhalten einen mit den Würfelecken *g* nahe übereinstimmenden Gang.

Gehen wir nun zu dem Verhalten des Krystalles beim Erkalten über.

Es wird am zweckmässigsten sein, hier ebenfalls genauer über die Vorgänge auf der Würfelfläche 1 nebst den umliegenden Ecken und Rhombendodekaederflächen (mit Ausschluss der bekannten Umkehrung in der höchsten Periode) zu berichten.

Als bei der auf S. 218 mitgetheilten Versuchsreihe das Thermometer 225° *) zeigte, ward die Lampe ausgelöscht; wenn auch bald darauf das Thermometer zu sinken begann, so stieg die Wärme doch eine Zeitlang im Krystalle immer noch höher, weshalb sämmtliche freiliegende Theile noch negative Elektricität, wie solche vor dem Auslöschen der Lampe beobachtet worden war, zeigten. Als das Thermometer bis 207° gesunken, ward auf allen freien Theilen des Krystalles starke positive Elektricität beobachtet. Die Temperatur erniedrigte sich so rasch, dass nicht Zeit war, zu untersuchen, ob etwa zwei Ecken sich früher oder später umkehrten, als die beiden übrigen Ecken und die Fläche; ich glaube, man darf einen solchen Unterschied annehmen, wenn

*) Ich bemerke ausdrücklich, dass bei diesem Versuche das Gefäss des Thermometers tiefer in die Eisenfeile getaucht war, als bei vielen andern, weshalb seine Angaben hier höher sind als früher; 207° würde ungefähr 140° im Früheren entsprechen.

gleich derselbe aus Mangel an Zeit nicht beobachtet werden konnte. Als das Thermometer 160° erreicht hatte, trat auf den beiden Würfelecken $r$ — an die Stelle des +; dagegen blieben die beiden Würfelecken $g$ nebst der Mitte der Würfelfläche noch einige Zeit +, bis auch sie bei 140° sich in — verkehrten, so dass von jetzt an alle unbedeckten Theile des Krystalles negativ waren. Dieser Zustand blieb, bis (bei 107°) die Ecken $r$ positiv wurden. Bei 90° fand sich die positive Elektricität nur auf den rauhen Tetraederflächen; die ganze übrige aus dem Platinsande hervorragende Oberfläche des Krystalles war negativ. Bei 66° trat fast gleichzeitig an allen Punkten des Krystalles eine Umkehrung ein; die Ecken $r$ wurden —, die Ecken $g$ nebst der Fläche $F$ dagegen positiv. Bei 54° war die ganze Würfelfläche +, die Rhombendodekaederflächen in den nach den Ecken $g$ zu gelegenen Hälften +, in den andern nach $r$ zu gelegenen aber —; bei weiterer Abkühlung wurde die Erstreckung der negativen Elektricität auf den Rhombendodekaederflächen kleiner, so dass ihr Bereich auf diesen Flächen bei 39° nur gering war. So blieb die Vertheilung, bis der Krystall die Temperatur des Zimmers angenommen hatte.

Mit dem eben beschriebenen Vorgange beim Erkalten stimmte das Verhalten der übrigen Flächen und Ecken dieses Krystalles im Allgemeinen überein. Nur an einzelnen Stellen traten darin kleine Abweichungen ein, dass ein Wechsel der Elektricitäten in dem einen Falle etwas später als in dem andern erschien, oder dass nicht die ganze Würfelfläche überall eine und dieselbe Elektricität zeigte, oder dass zu Ende der Abkühlung, wenn dieselbe nicht tief genug war, die letzte Periode bisweilen nicht sichtbar ward. Ich halte daher eine ausführliche Darlegung sämmtlicher sechs Versuchsreihen für überflüssig, und begnüge mich mit der Mittheilung einer einzigen.

Der Krystall stand mit der Fläche 1 nach oben bis zu $\frac{1}{4}$ seiner Höhe im Platinsande; die folgende Tabelle enthält sämmtliche Beobachtungen an dieser Fläche und den umliegenden vier Ecken während einer und derselben Versuchsreihe.

| T. | (1.4.5.) g | (1.4.3.) r | (1.3.2.) g | (1.2.5.) r | $F_1$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 40° | − | + | − | + | 0 | |
| 63 | − | + | − | + | − | |
| 70 | − | + | − | + | − | |
| 90 | − | + | − | − | − | |
| 105 | − | + | − | − | − | |
| 120 | − | − | − | − | − | |
| 140 | − | − | − | − | − | |
| 157 | + | − | + | − | − | |
| 170 | + | − | + | − | + | |
| 185 | + | − | + | − | + | |
| 196 | + | + | + | + | + | |
| 200 | + | + | + | + | + | |
| 208 | + | + | + | + | + | |
| 212 | + | + | + | + | + | |
| 217 | − | + | − | + | + | |
| 220 | − | + | − | + | + | |
| 224 | − | + | − | + | − | |
| 226 | − | − | − | − | − | |
| 225 | − | − | − | − | − | Nach dem Auslöschen der Flamme. |
| 207 | + | + | + | + | + | |
| 185 | + | + | + | + | + | |
| 160 | + | − | + | − | + | |
| 140 | − | − | − | − | − | |
| 125 | − | − | − | − | − | |
| 107 | − | + | − | + | − | |
| 90 | − | + | − | + | − | |
| 77 | − | + | − | + | − | |
| 66 | − | + | − | − | − | |
| 54 | + | − | + | − | + | |
| 46 | + | − | + | − | + | |
| 39 | + | − | + | − | + | |
| 34 | + | − | + | − | + | |
| 20 | + | − | + | − | + | |

Bei der getroffenen Einrichtung der Versuche konnte stets nur eine Würfelfläche geprüft werden. Handelt es sich um die Vergleichung der Vorgänge, welche auf den verschiedenen Flächen eines Würfels bei gleichen Temperaturerhöhungen eintreten, so sind leider, wie schon mehrfach erinnert, die Angaben des neben dem Platinsande in der Eisenfeile stehenden Thermometers dazu nicht brauchbar; es bedarf daher anderer Mittel, um eine solche Vergleichung möglich zu machen.

Als ersten Anhaltepunkt bietet sich die gleichzeitige Beobachtung der Würfelflächen und Ecken dar, indem dann jede der letztern bei der Untersuchung der drei in ihr zusammenlaufenden Flächen erscheint, und die an ihr beobachteten Vorgänge zur Auffindung der einander entsprechenden Zustände dieser drei Flächen dienen können.

Ein anderer noch directerer Weg besteht in der gleichzeitigen Beobachtung der Elektricitäten zweier Flächen, was durch eine Abänderung des bisherigen Verfahrens erzielt werden kann. Ich setzte z. B. den Krystall so in den Platinsand ein, dass die Würfelkante (1. 3.) oder die sie abstumpfende Dodekaederfläche nach oben gekehrt und horizontal lag, und bedeckte den Krystall nur soweit, dass die Würfelflächen 1 und 3, sowie die Ecken (1. 3. 4.) und (1. 2. 3.), sowie die diesen Ecken anliegenden obern Theile der verticalen Flächen 4 und 2 frei hervorragten. Der Platinsand bedeckte im vorliegenden Falle also die grössern Theile der Flächen 4 und 2, sowie die Flächen 5 und 6 in ihrer ganzen Ausdehnung. Bei dieser Anordnung war es möglich, gleichzeitig den Zustand der Flächen 1 und 3 der Untersuchung zu unterwerfen. Der Grund, weshalb ich zur Mittheilung gerade die Beobachtungen an diesen beiden Flächen wähle, liegt besonders darin, weil dieselben gegen das Ende des Erkaltens von einander etwas abzuweichen scheinen, wovon sich beim Erwärmen kaum eine Spur zeigt.

| T. | $F_1$ | $F_3$ | (1. 3. 4.) | M. | (1. 2. 3.) | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 29° | — | — | + | — | — | |
| : | : | : | : | : | : | |
| 120 | — | — | + | — | — | |
| 137 | — | — | — | — | — | |
| : | : | : | : | : | : | |
| 160 | — | — | — | — | — | |
| 170 | + | ? | — | — | + | |
| 180 | + | + | — | + | + | |
| : | : | : | : | : | : | |
| 190 | + | + | — | + | + | |
| 195 | + | + | + | + | + | |
| : | : | : | : | : | : | |
| 212 | + | + | + | + | + | |
| 216 | — | — | — | — | — | |
| : | : | : | : | : | : | |
| 221 | — | — | — | — | — | Lampe ausgelöscht |
| 210 | — | — | — | — | — | |
| 200 | + | + | + | + | + | |
| : | : | : | : | : | : | |
| 160 | + | + | + | + | + | |

| T. | $F_1$ | $F_3$ | (1. 3. 4.) | M. | (1. 2. 3.) |
|---|---|---|---|---|---|
| 145° | + | + | — | — | — |
| 137 | + | + | + | — | — |
| 123 | — | + | + | — | — |
| : | : | : | : | : | : |
| 100 | — | + | + | — | — |
| 88 | — | — | + | — | — |
| : | : | : | : | : | : |
| 71 | — | — | + | — | — |
| 66 | — | — | — | — | — |
| : | : | : | : | : | : |
| 58 | — | — | — | — | — |
| 54 | — | — | — | — | + |
| 50 | — | — | — | — | + |
| 46 | + | — | — | — | + |
| : | : | : | : | : | : |
| 40 | + | — | — | — | + |
| 37 | + | — | — | 0 | + |
| 33 | + | + | — | + | + |
| : | : | : | : | : | : |
| 27 | + | + | — | + | + |

Es wurden in vorstehender Versuchsreihe nach dem Ablesen des Thermometerstandes möglichst rasch hintereinander die Fläche 1 ($F_1$), die Fläche 3 ($F_3$), darauf die Ecke (1. 3. 4.), sodann die Mitte ($M$) der Dodekaederfläche auf der Kante (1. 3.), und zuletzt die Ecke (1. 2. 3.) beobachtet.

Aus den Beobachtungen beim Erwärmen könnte man höchstens auf eine nur wenig spätere Umkehrung der Fläche 3 bei 170° aus — in + schliessen; indess ist auf der Fläche 3 bei 170° eine elektrische Erregung beobachtet, nur war der geringe Ausschlag des Goldblättchens so unsicher, dass es unentschieden blieb, ob er positiv oder negativ gewesen.

Beim Erkalten dagegen tritt deutlich eine Abweichung in der Umkehrung der beiden Flächen sowohl beim Uebergange aus + in —, als auch aus — in + auf, indem in beiden Fällen die Elektricität auf der Fläche 3 sich später in die entgegengesetzte verwandelt, als auf der Fläche 1. Indess wissen wir aus dem Früheren, dass beim Abkühlen leicht kleine Abweichungen in dem Vorgange der Temperaturabnahme erfolgen, wozu namentlich bei der Fläche 3 ein später bei der Beschreibung des Krystalles zu erwähnender tiefer Spalt in der Kante (3. 6.) beitragen kann. Einer blossen Zufälligkeit beim dermaligen Einhüllen in den Platinsand darf diese Abweichung nicht zugeschrieben werden, da ich beide zuvor erwähnte Umkehrungen in gleicher Ordnung, d. h. später auf der Fläche 3 als auf der Fläche 1 auftreten sah, als der Krystall in den frühern Versuchen so weit in den Platinsand eingesetzt war, dass nur die Fläche 1 oder 3 mit den umliegenden Rhombendodekaederflächen hervorragte. (Vergl. auch die Versuche auf S. 201 u. 209.)

Um die elektrischen Vorgänge auf den Würfelflächen bei dem Würfel Nr. I hier vollständig darzulegen, will ich noch drei Beobachtungsreihen im Auszuge mittheilen, bei welchen sich der Krystall unter ganz andern Umständen als in den vorhergehenden Versuchen befand.

1) Der grosse Boracitwürfel Nr. I war mit seiner Fläche 6 auf den Platinsand gesetzt, und nur so weit eingedrückt, dass allein die untern vier Rhombendodekaederflächen in den Sand tauchten; sämmtliche verticale Würfelflächen und Rhombendodekaederflächen, sowie die obere Würfelfläche und die an ihren Rändern gelegenen Dodekaederflächen waren also frei,

| T. | (1.4.5.) | (1.4.3.) | (1.3.2.) | (1.2.5.) | $F_1$ | $F_2$ | $F_3$ | $F_4$ | $F_5$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 60° | + | — | + | — | — | — | — | — | — | |
| : | : | : | : | : | : | : | : | : | : | |
| 135 | + | — | + | — | — | — | — | — | — | |
| 150 | + | — | — | — | — | — | — | — | — | |
| 165 | — | — | — | — | — | — | — | — | — | |
| 175 | — | + | — | + | — | + | + | + | + | |
| 180 | — | + | — | + | + | + | + | + | + | |
| 183 | 0 | + | + | + | + | + | + | + | + | Lampe ausgelöscht. |
| 183 | + | + | + | + | + | + | + | + | + | Beobachtungen unterbrochen bis zu 100°. |
| 100 | + | — | + | — | — | — | — | — | — | |
| : | : | : | : | : | : | : | : | : | : | |
| 63 | + | — | + | — | — | — | — | — | — | |
| 38 | — | + | — | + | — | — | — | — | — | |
| 35 | — | + | — | + | + | — | — | — | — | |
| 32 | — | + | — | + | + | — | — | — | — | |
| 26 | — | + | — | + | + | ? | ? | + | + | |

Da der Krystall nicht tief genug in dem Platinsande stand, so liess sich die Temperatur desselben nur so weit steigern, dass die zweite Umkehrung wohl in den Ecken mit rauhen Tetraederflächen, dagegen nicht in den Ecken mit glatten Tetraederflächen und in den Würfelflächen auftrat. Sämmtliche fünf Flächen zeigen übrigens sowohl beim Erwärmen als auch beim Erkalten im Ganzen dasselbe Verhalten. Dass die Fläche 1 gegen Ende des Erkaltens sich etwas eher umkehrt als die andern vier, liegt an ihrer Stellung, in welcher sie von den übrigen abweicht; aus gleichem Grunde erscheint auf ihr beim Erwärmen auch das + etwas später als auf den übrigen Flächen. Ihre Temperatur ist stets tiefer als die der übrigen.

Noch will ich bemerken, dass bei 26° die obern vier horizontalen Dodekaederflächen zum grössten Theile positiv, und nur in der Nähe der Ecke (1. 4. 5.) und (1. 2. 3.) etwas negativ waren; die beiden verticalen Dodekaederflächen auf den Kanten (4. 3.) und (2. 5.) waren +, die andern beiden verticalen Dodekaederflächen auf den Kanten (4. 5.) und (2. 3.) dagegen —, und griffen mit ihrer Elektricität auch etwas auf die benachbarten Theile der anliegenden verticalen Würfelflächen über, ohne jedoch jemals die Mitte dieser letztern Fläche zu erreichen.

2) Der Krystall ward mit einer Eckenaxe vertical zur Hälfte in den Platinsand eingesetzt, dergestalt, dass eine Würfelecke mit rauher Te-

traederfläche nach oben gewandt war. Es waren also vom Sande nicht bedeckt: die genannte Ecke, die drei in derselben zusammenstossenden Rhombendodekaederflächen nebst den an ihren andern Endpunkten gelegenen drei Würfelecken und die oberen Theile der zwischenliegenden Würfelflächen. In der nachfolgenden Tabelle soll *a* die obere Ecke. *b*, *d*, *f* der Reihe nach die seitlichen Würfelecken, und *c*, *e*, *g* die dazwischen liegenden Würfelflächen bedeuten.

| T. | *a* | *b* | *c* | *d* | *e* | *f* | *g* | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 40° | + | — | — | — | — | — | — | |
| : | : | : | : | : | : | : | : | |
| 145 | + | — | — | — | — | — | — | |
| 160 | — | — | — | — | — | — | — | |
| 180 | — | + | — | + | — | + | — | Dodekaederflächen noch fast ganz —. |
| 190 | — | + | + | + | + | + | + | |
| 210 | + | + | + | + | + | + | + | Lampe ausgelöscht. |
| 204 | + | + | + | + | + | + | + | |
| : | : | : | : | : | : | : | : | |
| 175 | + | + | + | + | + | + | + | |
| 157 | + | — | — | — | — | — | — | |
| 140 | — | — | — | — | — | — | — | |
| 115 | + | — | — | — | — | — | — | |
| : | : | : | : | : | : | : | : | |
| 72 | + | — | — | — | — | — | — | |
| 47 | — | — | — | — | — | — | — | |
| 43 | — | 0 | — | + | — | + | — | |
| 36 | — | + | — | + | — | + | — | Dodekaederflächen noch —. |
| 32 | — | + | — | + | — | + | — | ebenso. |
| 26 | — | + | — | + | + | + | — | |
| 25 | — | + | + | + | + | + | — | Mitte der Dodekaederflächen nach der Ecke *d* schon +, Mitte der beiden andern noch —. |
| 23 | — | + | + | + | + | + | — | Mitte der Dodekaederflächen nach den Ecken *d* und *f* hin +, nach *b* hin —. |

Die Resultate sind also auch in diesem Falle im Allgemeinen mit dem frühern im Einklange; dass die Fläche *g* zuletzt nicht in + übergeht, hängt mit der auf der anliegenden Dodekaederfläche (nach der Ecke *f* hin) bleibenden negativen Polarität zusammen.

3) Der Krystall wurde auf ähnliche Weise nochmals in den Platinsand eingesetzt, aber so, dass eine Würfelfläche mit glatter Tetraederfläche nach oben lag. Die Buchstaben der nachfolgenden Tabelle haben analoge Bedeutung wie beim vorigen Versuche. In letzterem waren drei Würfelecken mit rauhen, und nur eine mit glatter Tetraederfläche abge-

leitet; in dem jetzigen sind umgekehrt drei Würfelflächen mit glatten und nur eine mit rauher Tetraederfläche abgeleitet; dessenungeachtet zeigen die Erscheinungen denselben Gang wie früher.

| T. | *a* | *b* | *c* | *d* | *e* | *f* | *g* | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 42° | — | + | — | + | — | + | — | Nur auf den rauhen Tetraederflächen +, die Dodekaederflächen —. |
| ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | |
| 135 | — | + | — | + | — | + | — | |
| 155 | — | — | — | — | — | — | — | |
| ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | |
| 183 | — | — | — | — | — | — | — | Mitte der Dodekaederflächen —. |
| 197 | + | — | + | — | + | — | + | Mitte der Dodekaederfläche +. |
| 210 | + | + | + | + | + | + | + | Lampe ausgelöscht. |
| 217 | + | + | + | + | + | + | + | *b*, *d*, *f* nur schwach +. |
| 190 | + | 0 | + | + | + | + | + | |
| 166 | — | — | — | — | — | — | — | |
| 143 | — | — | — | + | — | ? | — | |
| | — | + | — | + | — | + | — | + nur auf den Tetraederflächen. |
| 104 | — | + | — | + | — | + | — | |
| ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | |
| 62 | — | + | — | + | — | + | — | Mitte der Dodekaederflächen noch —. |
| 53 | 0 | + | — | — | — | — | — | |
| 50 | + | + | — | — | — | — | — | |
| 48 | + | — | — | — | — | — | — | Mitte der Dodekaederflächen noch —. |
| 39 | + | — | + | — | 0 | — | — | ebenso. |
| 33 | + | — | + | — | — | — | — | Mitte der Dodekaederfläche nach *b* hin +, der beiden andern noch —. |
| 30 | + | — | + | — | + | — | + | ebenso. |
| 28 | + | — | + | — | + | — | + | Mitte der Dodekaederfläche nach *b* hin +, nach *d* hin 0, nach *f* hin schwach —. |
| 22 | + | — | + | — | + | — | + | Mitten der Dodekaederflächen +. |

## Vergleichung der Würfelflächen zweiter Art mit den Würfelecken in Bezug auf ihr elektrisches Verhalten.

Bei der Stärke der elektrischen Erregungen des Krystalles Nr. I liessen sich die im vorigen Kapitel mitgetheilten Resultate ohne grosse Schwierigkeiten erhalten. Nicht so günstig gestalteten sich die Verhältnisse bei der Untersuchung des Verhaltens der Würfelflächen zweiter Art in Vergleich zu den Ecken, weil die vorliegenden Krystalle viel schwächer elektrisch waren, so dass ich die Drahtspitze den betreffenden Punkten des Krystalles sehr nahe bringen musste, wobei allerdings leicht eine Berührung eintreten konnte, ja in manchen Fällen namentlich

gegen den Zeitpunkt der Umkehrungen, wo selbstverständlich die Elektricitäten schwach sind, eintreten musste, wenn überhaupt ein erkennbarer Ausschlag des Goldblättchens hervorgerufen werden sollte. Hat man zahlreiche Untersuchungen der Boracitkrystalle durchgeführt, so erkennt man übrigens an der Bewegung des Goldblättchens augenblicklich, ob unabsichtlich eine Berührung statt gefunden hat, und bei gehöriger Vorsicht ist auch das durch Berührung erhaltene Resultat in gewisser Weise brauchbar. Immer bleibt es indess wünschenswerth, die Resultate auch ohne Berührung zu gewinnen, wozu freilich eine öftere Wiederholung der Versuche erfordert wird, wie dies auch von mir durchgeführt worden.

Ich will aus solchen Versuchsreihen nur einige Punkte näher herausheben.

Die Ungleichzeitigkeit in der Umkehrung der Ecken war bei den zu dieser Untersuchung verwandten Krystallen geringer als bei dem Krystalle Nr. I. Indess zeigte sich z. B. auf den Flächen 1 und 4 des Krystalles Nr. V und der Fläche 2 des Krystalles Nr. VII, gerade wie sonst, eine etwas frühere Umkehrung (aus + und —) derjenigen Ecken, welche matten Tetraederflächen entsprechen, und an ihr nahm auch die Polarität der Mitte der Würfelflächen Theil, so dass also dann die ganze Fläche nebst sämmtlichen Ecken negativ war. Ueber die Vorgänge bei dem Uebergange der zweiten Periode zur dritten, ob auch hier in ähnlicher Weise die Umkehrungen der Polaritäten ungleichzeitig erfolgten, wage ich keine bestimmte Meinung zu äussern, indem, wie schon erwähnt, bei diesen Uebergängen nur sehr schwache Elektricitäten auftreten, und jede Berührung in so hohen Temperaturen leicht dem wirklichen Thatbestande gerade entgegengesetzte Resultate geben kann.

Beim Erkalten stellte es sich aber in allen Versuchsreihen bestimmt heraus, dass die erste positive Periode der Ecken mit glatten Tetraederflächen früher endigte, als die erste negative Periode auf den andern Würfelecken und den Würfelflächen, so dass dann eine Zeit lang die ganze Fläche mit ihren Ecken negativ erschien. In dem letztgenannten Zustande glich also der Krystall in Bezug auf die Polarität der Ecken und der Fläche dem Krystalle Nr. I, wie solches z. B. aus einer Vergleichung der S. 218 u. 225 mitgetheilten Tabellen hervorgeht. Der Uebergang aus der mittleren Periode beim Erkalten trat, wo überhaupt eine Ungleichzeitigkeit sichtbar ward, in der Weise an den verschiedenen

Punkten ungleichzeitig ein, dass beide den matten Tetraederflächen entsprechenden Ecken sich früher umkehrten, als die Ecken mit glatten Tetraederflächen.

Es dürfte nicht schwer sein, sich nach den vorstehenden Angaben und den frühern Erläuterungen über das Verhalten der Flächen auch eine hinlänglich klare Vorstellung von den Aenderungen in der Ausbreitung der beiden Elektricitäten auf den Würfelflächen bei steigender und sinkender Temperatur zu machen. Doch erachte ich die Mittheilung einer speciellen Versuchsreihe hier nicht für überflüssig, und wähle absichtlich dieselbe Fläche, die ich schon früher S. 204 mehrfach speciell behandelt habe, nämlich die Fläche 2 am Krystall Nr. VII. Ich will die Tabelle mit der Erkaltung nach einer bis 195° getriebenen Erhitzung beginnen, und bemerke nur, dass ein Theil der Beobachtungen durch Berührung erhalten ist.

| T. | 2.1.5. | 2.1.3. | 2.3.6. | 2.6.5. | $F_2$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 170° | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | |
| 150 | + | — | + | — | — | |
| 140 | — | — | — | — | — | |
| 130 | — | + | — | + | ? | |
| 115 | — | + | — | + | + | |
| 90 | — | + | — | + | + | Zwischen 90 und 49° war nicht beobachtet worden. |
| 49 | + | — | + | — | — | |
| 35 | + | — | + | — | — | Lampe angezündet. |
| 35 | + | — | + | — | — | |
| 42 | + | — | — | + | + | |
| 50 | — | + | — | + | + | |
| 65 | — | + | — | + | + | |
| 78 | — | + | — | + | + | |
| 94 | — | + | — | 0 | 0 | |
| 115 | + | — | + | — | — | |
| 130 | + | — | + | — | — | |
| 145 | 0 | — | + | — | — | |
| 160 | — | — | — | — | — | |
| 180 | + | 0 | — | — | + | Lampe ausgelöscht. |
| 190 | + | + | + | + | + | |
| 180 | + | — | + | + | + | |
| 170 | + | — | + | — | — | |
| 154 | + | — | + | — | — | |
| 143 | — | — | — | — | — | |
| | etc. | | | | | |

Um Irrungen zu vermeiden, ist es am besten, anzunehmen, dass sämmtliche Beobachtungen mit Ausnahme der obersten horizontalen Reihe, welche bei der Annäherung überall 0 ergab, durch Berührung gemacht sind. Die Ecken und die Flächen wurden in der Reihe, wie sie horizontal von links nach rechts stehen, untersucht.

Man sieht, bei der Berührung der Fläche 2 ist zwischen der dritten Periode zu Ende des Erhitzens und der ersten Periode beim Beginn des Erkaltens keine unelektrische Periode angegeben, wie dies auf S. 204 bei blosser Annäherung der Fall war; der Grund liegt in der durch den kalten Draht, der in vorliegender Versuchsreihe stumpf endigte, hervorgerufenen Abkühlung.

Nimmt man bei der Betrachtung der Würfelflächen zweiter Art noch auf die oben S. 204 zu Anfang des Erkaltens auf diesen Würfelflächen beobachtete kurze positive Periode Rücksicht, die bei nur zur Hälfte oder zwei Drittel in Platinsand eingesetzten Krystallen möglicherweise ähnlich wie z. B. bei den Krystallen Nr. I auch sich über die den matten Tetraederflächen entsprechenden Ecken verbreiten kann, so würde ganz zu Anfang des Erkaltens der Krystall sich erst positiv zeigen, und dann durch eine Umkehrung der letztgenannten Ecke und der Fläche in die zuvor sogenannte erste Periode des Erkaltens eintreten. Berührt man den Krystall in hoher Temperatur, so erscheint in der That die elektrische Vertheilung in der eben angegebenen Weise, wie man aus der vorstehenden Tabelle erkennt.

## Ueber die elektrischen Erscheinungen beim Berühren der Boracitkrystalle mit dem kalten Leitungsdrahte.

Wenn auch in manchen Boracitkrystallen die Elektricität hinreichend ist, um dieselbe an den verschiedenen Punkten der Oberfläche durch blosse Annäherung des mit dem Elektrometer in Verbindung stehenden Platindrahtes wahrzunehmen, so erscheint sie dagegen in andern Krystallen wenigstens in gewissen Zeitpunkten so schwach, dass das blosse Annähern des Drahtes keinen Ausschlag im Elektrometer gibt, sondern ein solcher erst bei der Berührung der Krystalle mit dem Drahte wahrzunehmen ist. Es fragt sich nun, ob ein auf letztere Weise beobachteter Ausschlag des Elektrometers zur Beurtheilung der in dem Augenblicke, welcher der Berührung unmittelbar voranging, vorhanden gewesenen Elektricität dienen kann.

Soll diese Frage entschieden werden, so muss dies durch Versuche an solchen Krystallen geschehen, deren elektrischer Zustand vollkommen bekannt ist; eine Forderung, die bis jetzt natürlich nur bei denjenigen Boraciten erfüllt werden kann, welche wie z. B. der Krystall Nr. I eine durch blosse Annäherung des Drahtes wahrnehmbare Elektricität besitzen. Es würde übrigens für die elektrischen Untersuchungen der Boracitkrystalle eine ungemeine Erleichterung gewähren, wenn man aus allen durch Berührung erhaltenen Resultaten einen sichern Schluss auf die Polarität des Krystalles machen könnte.

Namentlich gibt unter angemessenen Umständen die Berührung mit einem kalten Drahte bei höheren Temperaturen sehr starke Ausschläge, weil durch das Ansetzen des kalten Drahtes die Temperatur plötzlich bedeutend sinkt; denn im Allgemeinen darf wohl angenommen werden, dass, abgesehen von den Wechseln am Boracit, die elektrische Erregung der Grösse der Temperaturänderungen in jedem Zeittheilchen proportional ist. Wenn z. B. die Annahme richtig wäre, dass am Ende der dritten Periode beim Erwärmen (also bei der höchsten Temperatur) die Berührung der Stelle eines Krystalles mit einem kalten Drahte die Polarität derselben gerade in die entgegengesetzte (also in die Elektricität der entsprechenden Periode beim Erkalten) verwandelte, so würde das elektrische Verhalten dieser Stelle, ob sie beim Erwärmen —+— oder +—+ zeigt, durch eine einzige Berührung des stark erhitzten Krystalles entschieden werden können.

Leider ist dem aber nicht so; es treten vielmehr bei der Berührung sehr stark erhitzter Boracitkrystalle eigenthümliche Erscheinungen auf.

Wir wollen zunächst die Vorgänge bei der Berührung einer Würfelecke mit glatter Tetraederfläche, oder einer Würfelfläche des Krystalles Nr. I betrachten, und annehmen, das untere Ende des 0,8$^{mm}$ dicken Platindrahtes sei nur an seinen Kanten etwas abgerundet. Bis zu Temperaturen in die Mitte der zweiten, also positiven Periode des Erwärmens macht es in Betreff der Art der beobachteten Elektricität keinen Unterschied, ob man den Platindraht den genannten Theilen der Krystalloberfläche blos nähert, oder sie mit demselben berührt. Von der Mitte dieser Periode an kann aber, je nach der Grösse, der (porösen) Beschaffenheit des Krystalles und der Temperatur des Drahtes, die Berührung gerade die entgegengesetzte Polarität (also negative) geben

(vergl. die Tabelle auf S. 178), als die Annäherung. Steigt die Temperatur noch weiter, so dass der Krystall in die dritte negative Periode tritt, so findet man anfangs durch Annäherung und Berührung die ebengenannte Elektricität, entweder weil die abkühlende Wirkung des Drahtes noch die mittlere Periode hervorruft, oder, was meistens der Fall sein wird, weil die abkühlende Wirkung des Drahtes auf die berührte Stelle nicht hinreicht, die starke Elektricität der nebenliegenden, in steigender Erwärmung begriffenen Theile zu überwinden. Wenn jedoch die Temperatur noch weiter steigt und die Stärke der Elektricitätserregung nachlässt, so gibt das Annähern negative, dagegen das Berühren positive Elektricität, indem der erkaltende Einfluss des Drahtes die höchste Periode beim Erkalten erzeugt. Beim Anlegen des Drahtes bemerkt man (S. 160) eine eigenthümliche Bewegung des Goldblättchens, indem es erst einen Augenblick nach der negativen, und gleich darauf nach der positiven Seite geht. Der negative Ausschlag dauert um so länger, je weniger Masse der kalte Draht hat. Als ich eine feine Nähnadel an den Platindraht angebunden hatte, und mit ihrer Spitze den Krystall berührte, war ein längeres Anhalten der Nadel an den Krystall nöthig, um die Umkehrung der negativen Elektricität in die positive zu erzwingen; bei nur kurze Zeit dauernder Berührung erfolgte dieselbe gar nicht. Andererseits ist, um eine solche Umkehrung in der dritten negativen Periode beim Erwärmen hervorzurufen, unter günstigen Umständen nicht einmal eine vollständige Berührung des Krystalles mit dem kalten Drahte erforderlich; es genügt, wenn eine etwas grössere kalte Metallmasse, z. B. der obere zu einem Ringe umgebogene Theil des dicken Platindrahtes, der betreffenden Stelle des Krystalles sehr genähert wird.

Die Würfelecken mit matten Tetraederflächen stimmen mit dem Vorhergehenden in ihrem Verhalten nicht völlig überein. Es wird am einfachsten sein, die Erscheinungen an einem speciellen Beispiele darzulegen:

Ein Boracitwürfel (der später als Nr. II aufgeführte Krystall) ward so weit in den Platinsand eingesetzt, dass nur die matte Tetraederfläche der Ecke (1. 2. 3.) nebst den nächst anliegenden Theilen der Würfel- und Dodekaederflächen frei blieb. Nach dem Beginnen des Erhitzens gaben bis in die dritte positive Periode hinauf Annähern und Berühren dasselbe Resultat. Erst nach Verlauf der dritten Periode beim Erwär-

men, wo die blosse Annäherung gar keinen oder nur einen sehr zweifelhaften Ausschlag gab, erfolgte bei der Berührung infolge der dadurch erzeugten Abkühlung zunächst ein negativer, späterhin aber ein positiver Ausschlag. Denselben positiven Ausschlag habe ich beim Berühren in hoher Temperatur ebenfalls und zwar sehr stark auf der Ecke (1. 3. 4.) des Krystalles Nr. I (bis zu 0,7 Skth.), weniger stark auf der Ecke (1. 2. 5.) desselben Krystalles beobachtet. Ingleichen wird er bei der Berührung auf den sämmtlichen Ecken mit matten Tetraederflächen gefunden, wenn der Krystall mit einer seiner Flächen horizontal bis zu zwei Drittel seiner Höhe in Platinsand eingehüllt ist.

Auch die Würfelflächen zweiter Art zeigen beim Berühren in hohen Temperaturen, worauf kurz zuvor S. 226 aufmerksam gemacht wurde, positive Elektricität.

Da sonach sämmtliche freiliegenden Theile der Boracitkrystalle, wenn sie stark erhitzt sind, dem berührenden Drahte positive Elektricität ertheilen, so ist es nicht möglich, aus diesen gewöhnlich sehr starken Ausschlägen einen Schluss auf die elektrische Beschaffenheit der betreffenden Stelle zu machen.

Ist man zur Berührung eines Krystalles mit einem Drahte gezwungen, so dürfte es im Allgemeinen, um nach Möglichkeit störende Einflüsse zu beseitigen, zweckmässig sein, eine feine Spitze zu wählen, wenn sie auch eine schwächere Elektricität zeigen sollte, als eine kleine abgestumpfte Fläche. Will man aber eine solche Spitze benutzen, so muss die Berührung, nach der oben S. 162 angegebenen Weise, unter der Loupe erfolgen, während ein Gehülfe den Ausschlag des Goldblättchens beobachtet. Sodann wird es bei sehr schwachen elektrischen Erregungen dringend nothwendig, der Sicherheit wegen möglichst sämmtliche Perioden beim Erwärmen und Abkühlen zu beobachten, und dabei mit Sorgfalt auf die relativen Wärmegrade zu achten, bei denen die Umkehrungen erfolgen, indem durch solche Beziehungen öfter den Beobachtungen ihre richtige Deutung gegeben werden kann. Da bei schwachen elektrischen Erregungen bisweilen einzelne Perioden durch gewisse Umstände nicht deutlich oder gar nicht auftreten, so ist es auch aus früher bereits wiederholt angeführten Gründen sehr vortheilhaft, auf angenäherte Weise die Stärke der Elektricität in den verschiedenen Zeitpunkten aufzuzeichnen.

Ich will hier eine Bemerkung nicht unterlassen, um nicht Missdeu-

tungen Raum zu geben. Die Empfindlichkeit des Elektrometers bei allen diesen Versuchen war so gross, dass ein Ausschlag von 1,2 Skalentheilen entstand, wenn ich an den Knopf des Drahtes, welcher das Goldblättchen trug, erst das mit nassem Papier umwickelte Platin- und darauf das mit eben solchem Papier umwickelte Zinkende eines aus Drähten der beiden genannten Metalle gebildeten Elementes anlegte. Die Empfindlichkeit war also hinlänglich gross, und ich hätte sie nöthigenfalls leicht noch um Vieles erhöhen können. Wenn nun im Vorhergehenden so geringe Ausschläge, wie 0,1 Skth. erwähnt werden, so ist daraus nicht etwa ein Schluss auf eine so geringe elektrische Spannung in dem Krystalle zu machen, als ob dieselbe in dem genannten Falle nur $\frac{1}{12}$ der durch die Berührung von Zink und Platin entstehenden betragen hätte; denn die auf die Drahtspitze nur vertheilend einwirkende Elektricität des Krystalles muss den ganzen langen spiralförmig gewundenen Kupferdraht elektrisiren, und der Ausschlag misst blos die Vertheilung in dem am andern Ende des Drahtes befindlichen Goldblättchen. Aehnlich verhält es sich, wenn der Spitze von Seiten des Krystalles ein begrenztes Quantum Elektricität mitgetheilt wird; dann muss diese Elektricität sich ebenfalls über den ganzen Draht und das Goldblättchen verbreiten.

Durch den langen dünnen kupfernen Zuleitungsdraht wird allerdings die Grösse des Ausschlags im Goldblättchen geringer als wenn derselbe nicht vorhanden wäre, und der Krystall mit einer Fläche, Ecke oder Kante unmittelbar an den Stift des Elektrometers, welcher das Goldblättchen trägt, angelegt würde. Dies ist jedenfalls ein Uebelstand in dem von mir gewählten Verfahren; indess sehe ich nicht, wie sich ohne grosse Weitläufigkeiten demselben abhelfen liesse. Ich habe schon daran gedacht, den Krystall an einen kurzen, zwei Mal rechtwinklig umgebogenen und das Goldblättchen tragenden Stift anzulegen, und durch ein Spirale aus dünnem Platindrahte, die durch einige galvanische Elemente zum Glühen gebracht werden kann, zu erhitzen.

### Erfolgt auf den Würfelecken mit matten Tetraederflächen und auf der Mitte der Würfelflächen zweiter Art bei sehr hoher Temperatur noch ein dritter Wechsel?

In den vorhergehenden Abschnitten sind mehrfach Beobachtungen angeführt worden, die auf einen bei sehr hohen Temperaturen auf den Würfelecken mit matten Tetraederflächen und den Würfelflächen zwei-

ter Art eintretenden dritten Wechsel, also auf eine vierte elektrische Periode hinweisen; und es dürfte daher nicht überflüssig sein, jene Beobachtungen hier übersichtlich zusammenzustellen.

Betrachten wir zunächst die Vorgänge auf den genannten Würfelecken, so hat sich (S. 180) ergeben, dass, falls die ganze Oberfläche eines Boracitkrystalles, mit alleiniger Ausnahme einer dieser Ecken, in Platinsand eingehüllt ist, durch blosse Annäherung des Platindrahtendes weder beim Erhitzen noch beim Erkalten ein dritter Wechsel der Elektricitäten oder eine vierte elektrische Periode beobachtet worden ist, obwohl ich aufmerksam darnach gesucht habe; dass dagegen bei gleicher Einhüllung des Krystalles (S. 229) durch die Berührung der stark erhitzten Ecke mit dem kalten Drahte ein positiver Ausschlag erfolgte. Ob man indess aus diesem beim Berühren eintretenden Ausschlage auf eine auch in dem nicht berührten Krystalle an jenen Ecken beim Beginn des Erkaltens vorhandene neue elektrische Periode schliessen darf, die bei der blossen Annäherung nur ihrer Schwäche wegen nicht wahrgenommen werden kann, erscheint mir sehr zweifelhaft, weil die positiven Ausschläge bei der Berührung der stark erhitzten Ecken öfter in so grosser Stärke erscheinen, dass man wohl hoffen dürfte, wenigstens geringe Spuren eines solchen Ausschlags auch ohne Berührung bei der blossen Annäherung aufzufinden, wofern zu Anfange des Erkaltens auf der sich selbst überlassenen Ecke eine positive Periode sich ausbildete. Durch die Berührung der Ecke mit dem jedenfalls kältern Drahte entsteht eine eigenthümliche Vertheilung der Wärme an dieser Stelle, deren Resultat sehr wohl jener positive Ausschlag sein kann, ohne dass ein positiv elektrischer Zustand auf der ungestört erkaltenden Ecke vorhanden zu sein braucht. Und selbst wenn man zugeben wollte, dass eine positive vierte Periode beim Erkalten existire, so würde daraus doch keineswegs mit Bestimmtheit der Schluss gezogen werden dürfen, dass auch beim Erhitzen die entsprechende negative Periode auf diesen Ecken vorhanden sein müsse. Die Wärmevertheilungen und Bewegungen sind nämlich zu Ende des Erhitzens nicht genau die umgekehrten von den zu Anfange des Erkaltens eintretenden; während zu Ende des Erhitzens die Temperatur nur langsam steigt, der Krystall durch seine bedeckten Flächen Wärme aufnimmt, durch seine unbedeckten Theile dagegen ausstrahlt, so erfolgt gerade zu Anfange des Erkaltens ein schnelles Sinken der Temperatur, und der Krystall verliert jetzt an allen Punkten

seiner Oberfläche, an den bedeckten ebenso wie an den freien, an beiden aber in verschiedener Weise seine Wärme, weshalb die an den frei hervorragenden Ecken beobachteten Elektricitäten unter Umständen zu Ende der Erhitzung merklich von den beim Beginn des Erkaltens vorhandenen abweichen können. Dass zwischen beiden genannten Perioden ein gewisser Unterschied vorhanden sein kann, ergibt sich z. B. sogleich aus den oben (S. 198) mitgetheilten Beobachtungen über die in den höchsten Perioden auf den Würfelflächen erster Art eingeschalteten Umkehrungen.

Wenn nicht allein die Würfelecken mit matten Tetraederflächen, sondern noch eine oder mehrere Ecken mit glatten Tetraederflächen ebenfalls vom Platinsande nicht bedeckt sind, wenn also der Krystall wie S. 186 mit einer Kante, oder wie S. 218 mit einer Fläche und den vier umliegenden Kanten und Ecken aus dem Sande hervorragt, geben die Versuche nicht blos bei der Berührung, sondern auch bei der Annäherung sowohl zu Ende des Erwärmens als zu Ende des Erkaltens einen neuen Wechsel, so dass dann die Ecken mit matten Flächen mit den durch glatte Flächen abgestumpften dieselbe Polarität zeigen. Indess auch gegen diese Beobachtungen lässt sich der schon oben S. 187 angeführte Einwand erheben, dass, weil die erstern sich früher umkehren als die letztern, und ebenso auch früher die positive Elektricität ihrer letzten Periode beim Erwärmen verlieren, die auf ihnen durch blosse Annäherung noch wahrgenommene negative Elektricität nur eine dorthin von den umgebenden noch negativen Theilen des Krystalles ausgeübte Vertheilungswirkung sein kann.

Aehnlich wie mit den Ecken mit matten Flächen verhält es sich nun auch mit den Würfelflächen zweiter Art. Wird ein Krystall so weit eingesetzt, dass eine Würfelfläche allein frei bleibt, so werden beim Erhitzen (S. 204) mittelst Annäherung des Drahtes nur drei Perioden +—+ beobachtet; es ist mir, wie schon früher erwähnt, nicht möglich gewesen, bei steigender Temperatur noch eine obere negative Periode aufzufinden. Beim Erkalten zeigen sich dagegen (S. 204) allerdings vier Perioden +—+—. Wird die Fläche zu Ende des Erhitzens berührt, so zeigt sie nach S. 225 positive Elektricität.

Die zuvor aufgestellten Bedenken hindern indess auch hier, mit Bestimmtheit einen Schluss auf eine vierte negative Periode beim Erwärmen zu machen.

### Vertheilung der Würfelflächen erster und zweiter Art an den Krystallen.

Rücksichtlich der Würfelflächen der Boracitkrystalle erübrigt noch die Angabe, welche Flächen an einzelnen Krystallen der ersten und welche der zweiten Art angehören. Ich werde jeder dieser Angaben eine genaue Beschreibung des betreffenden Krystalles voraussenden, um zu zeigen, dass, vielleicht mit einer Ausnahme, aus der Beschaffenheit der äussern Begrenzungsflächen ihr elektrisches Verhalten sich unmittelbar nicht erkennen lässt.

#### Krystall Nr. I (Würfel).

Die Hauptflächen dieses Krystalles, den ich der Güte des Hrn. Prof. Schweigger verdanke, liefert der Würfel: ausserdem zeigen sich noch die Flächen des Rhombendodekaeders und auch die Flächen beider Tetraeder.

Die Würfelflächen enthalten zahllose kleine mit blossen Augen sichtbare Grübchen; der übrige Theil derselben ist stark glänzend; indess ist dieser letztere Theil sehr gering auf den Flächen 4 und 5, etwas mehr vorhanden auf 2 und 3. Die Fläche 1 ist fast ganz spiegelnd, und dies gilt auch von der Fläche 6, soweit sie nicht verletzt ist. Auf dieser Fläche 6 findet sich nämlich eine fast die halbe Fläche hinwegnehmende Verletzung gegen die von den Flächen 2, 5 und 6 gebildete Ecke hin, die sich auch auf die zwischen 5 und 6 gelegene Kante in der Nähe der bezeichneten Ecke erstreckt. In die Rhombendodekaederfläche auf der Kante (3. 6.). etwas von ihrer Mitte nach der Ecke (2. 3. 6.) hin, geht ein tiefer Spalt von mehr als 0,5$^{mm}$ Breite hinab, der auch als eine schwache Furche noch auf den Flächen 3, 6 und 5 verläuft. Diese Furchen liegen nahe in einer Ebene, welche parallel mit den Würfelflächen 2 und 4 durch den erwähnten Spalt geht. Selbst auf der Würfelfläche 1 scheint noch eine Andeutung einer solchen Furche erkennbar zu sein.

In der Richtung von 1 bis 6 misst der Krystall (Abstand der beiden genannten Würfelflächen) 13,2$^{mm}$; in der Richtung von 2 bis 4 13,4$^{mm}$, und in der Richtung von 3 bis 5 13,9$^{mm}$.

Die Flächen des ersten Tetraeders, welche durch ihren sehr starken Glanz ausgezeichnet sind, fehlen auf den Ecken (1. 2. 3.), (1. 4. 5.) und (2. 5. 6.); nur die eine Fläche auf (3. 4. 6.) ist in geringer Ausdehnung vorhanden.

Die Flächen des zweiten Tetraeders mit weniger glänzenden Flächen sind sämmtlich vorhanden.

Die Flächen des Rhombendodekaeders haben alle ziemlich gleiche Breite; dieselbe beträgt ungefähr 3,4$^{mm}$. Die auf der Kante (3. 4.) gelegene ist nach der Ecke (1. 3. 4.) zu und die auf (4. 6.) gelegene in der Mitte etwas rauh; denselben Zustand zeigen fast in ihrer ganzen Ausdehnung die auf den Kanten (4. 5.) und (5. 2.) gelegenen Flächen. In der Fläche auf der Kante (3. 6.) ist, wie schon bemerkt, ein tiefer schmaler Spalt. Die Dodekaederfläche auf der Kante (2. 6.) ist nur mit der nach 2 gewandten Hälfte vorhanden, und die Kante (5. 6.) erscheint fast ganz verbrochen.

Schon vorhin ist erwähnt worden, dass die meisten Würfelflächen dieses Krystalles sehr viele Vertiefungen enthalten, und nur auf einzelnen derselben sich etwas ausgedehnte glatte glänzende Stellen finden. Mittelst eines lichtstarken Mikroskops lässt sich nun die Beschaffenheit sowohl dieser glatten Stellen, als auch der Wände der Vertiefungen erkennen. Für die meisten Fälle ist eine ungefähr 50fache Vergrösserung am zweckmässigsten; manche Beobachtungen gelingen indess besser bei 25facher.

Legt man eine glatte Stelle einer Würfelfläche in horizontaler Lage unter das Mikroskop, und lässt das Licht senkrecht gegen diejenige ihrer Diagonalen auffallen, welche zwei den glatten Tetraederflächen entsprechende Ecken mit einander verbindet, so erkennt man wiederholte Ansätze zur Bildung von Flächen eines Trigondodekaeders, die aber nicht dem gewöhnlich an den Würfelecken mit matten Flächen vorkommenden Trigondodekaeder $-\frac{202}{2}$, sondern einem viel stumpferen angehören, dessen Flächen bisher nicht beobachtet worden sind. Nach einer angenäherten unter dem Mikroskope bei 50facher Vergrösserung mittelst Spiegelung des Sonnenlichtes ausgeführten Messung betrug der Winkel an den längern in die Diagonalen der Würfelflächen fallenden Kanten $20\frac{1}{2}^0$, was auf die Gestalt $-\frac{808}{2}$ hinweisen dürfte. Dieses stumpfe Trigondodekaeder bildet hier durch seine oscillatorische Combination gewissermassen den Uebergang aus den tetraedrischen Formen des Boracits zum Würfel. Bei schwächern Vergrösserungen, wie z. B. bei Anwendung einer einfachen Loupe, erscheint die Würfelfläche durch die genannten kleinen Trigondodekaederflächen parallel mit der Diago-

nale zwischen zwei den glatten Tetraederflächen entsprechenden Ecken gestreift. Mittelst der Loupe erkennt man die Streifung am leichtesten, wenn man in der Richtung oder fast in der Richtung derselben die Fläche gegen das Tageslicht betrachtet. Hier und da, doch bei diesem Krystalle immer nur äusserst selten, erscheint auf den glänzenden Stellen der Würfelflächen auch ein Ansatz einer Tetrakishexaederfläche; und von diesem Tetrakishexaeder wird auch die auf den Flächen des Rhombendodekaeders wahrnehmbare Streifung, welche mit der zugehörigen Würfelkante parallel geht, herrühren; diese Streifung ist aber bei weitem feiner als die auf den Würfelflächen.

Sonach treten also neben den geneigtflächigen hemiedrischen Formen beim Boracit die sämmtlichen drei oben S. 194 genannten scheinbar vollflächigen Gestalten, der Würfel, das Rhombendodekaeder und das Tetrakishexaeder auf.

Da die Masse des Krystalles etwas durchsichtig ist, so kann man auch bei passender Einstellung des Mikroskops die etwas unterhalb der Oberfläche liegenden Theile erkennen. Bei solcher Einstellung des Mikroskopes erhält man beim Anblick des Krystalles den Eindruck, als ob der ganze Krystall aus schmalen Streifen bestände, deren Richtung parallel der schon mehrfach genannten Diagonale geht. An einer Stelle der verletzten Fläche 6 schien aber mehr eine mit den Kanten des Würfels parallel gehende Streifung und ein dieser entsprechendes Gefüge vorhanden zu sein.

Sämmtliche Flächen des Krystalles Nr. I gehören zur ersten Art; sie zeigen meistens sehr starke Elektricität. Ihr elektrisches Verhalten ist schon oben S. 197 und S. 204 ausführlich besprochen worden, mit Ausnahme der Fläche 4, welche im Ganzen nur schwach elektrisch ist, so dass, um alle Perioden mit voller Entschiedenheit auf ihr zu beobachten, selbst die Berührung zu Hülfe genommen werden musste. Beim Erwärmen ist auf dieser Fläche die erste negative Periode ziemlich stark; dagegen gelingt es nur, die mittlere positive Periode kurz vor ihrem Verschwinden in dem früher (S. 202) bezeichneten Zeitpunkte ihrer grössten Stärke durch sehr geringe Ausschläge wahrzunehmen; die letzte negative Periode ist wieder stärker. Beim Abkühlen ist auf dieser Fläche die Elektricität beim Eintritt der mittleren negativen Periode stark, im Uebrigen nur schwach.

Die Erscheinungen in der Mitte der Fläche 4 wurden übrigens nicht

wesentlich geändert, als ich ausser der Würfelfläche auch die vier umliegenden Rhombendodekaederflächen vom Platinsande befreite; ich erwähne dieses Versuches gerade wegen der Schwäche der elektrischen Erregung auf der Fläche 4, weil fremde Einflüsse, falls sie merklich eingewirkt hätten, sich um so mehr geltend gemacht haben würden.

Gewöhnlich beherrscht die der Mitte zukommende Elektricität die ganzen Flächen; indess kommen auch einzelne Fälle vor, wo auf denselben in der Nähe der Würfelecken mit rauhen Tetraederflächen die diesen Ecken entsprechende Elektricität wenigstens in einzelnen Zeitpunkten aufzutreten vermag.

Bei der ungemein grossen Ausdehnung, welche je nach der Temperatur die eine oder die andere Elektricität an dem Boracitwürfel Nr. I zeigte, schien es mir (wenn auch das Resultat sich voraussehen liess) nicht überflüssig, durch das Experiment den Nachweis zu liefern, dass in jedem Augenblicke die Mengen der erregten positiven und negativen Elektricitäten gleich gross sind.

In einem kleinen hohlen Messingwürfel ward der Krystall Nr. I eingeschlossen, der Zwischenraum zwischen ihm und den Messingwänden mit Platinsand ausgefüllt, und dann der Deckel mit Draht fest aufgebunden. Der Boracitwürfel war also ringsum von leitendem Platinsande umgeben. In ein durch Glasstäbe und Schellack isolirtes eisernes Gefäss ward dann sehr stark erhitzte Eisenfeile geschüttet, und während des Hineinschüttens der messingene Würfel mit seinem Inhalte in das Gefäss geworfen, so dass er plötzlich ganz und gar von heisser Eisenfeile umgeben war. Das eiserne Gefäss stand durch einen Draht mit dem Goldblättchen des oben S. 159 erwähnten Elektrometers in Verbindung; durch die Berührung der verschiedenen Metalle besass das Goldblättchen eine geringe elektrische Spannung, die vor dem Versuche durch Umlegen des Commutators gemessen worden war. Nach Einschütten der Eisenfeile und Zudecken des Gefässes ward dann fortwährend der Commutator hin- und hergelegt; der anfänglich geringe Ausschlag blieb ungeändert derselbe, so dass also, wie vorauszusehen, die in jedem Augenblicke erzeugten Elektricitätsmengen in der That gleich gross waren; denn durch den Platinsand wurden sämmtliche auf der Oberfläche erzeugten Elektricitäten gleichzeitig abgeleitet.

Um nicht zu Missverständnissen Veranlassung zu geben, bemerke

ich bei dieser Veranlassung noch ganz besonders, dass ich nirgends gesagt habe, dass man ein Bild für die elektrischen Vertheilungen im ganzen Boracitwürfel erhalten könne, wenn man die in den frühern Versuchsreihen auf den verschiedenen Flächen beobachteten Elektricitäten gleichzeitig auf ein Krystallmodell, z. B. durch verschiedene Farben auftrage. Ist von mir eine solche Zusammenstellung gemacht, so hat sie nur zum Zweck gehabt, die Auffassung der einzelnen Versuche zu erleichtern; im Anfange dieser Abhandlung (S. 175) habe ich ganz ausdrücklich hervorgehoben, dass alle in einer Versuchsreihe gemachten Beobachtungen nur auf die gerade statt findende Ableitung und Aenderung der Temperatur zu beziehen sind. Ich kann daher z. B. durchaus nicht einräumen, daraus, dass am Krystall Nr. I, wenn er mit der Fläche 1 im Platinsande steht, die Mitte der nach oben gewandten Fläche 6 sich zu Ende des Erkaltens positiv zeigt, die Folgerung zu ziehen, dass die Mitte derselben Fläche 6 ebenfalls zu Ende des Erkaltens positiv sein müsse, wenn sie selbst im Platinsande steht, und die Fläche 1 nach oben gewandt ist. Dass die im Platinsande befindlichen Flächen sich anders verhalten können und werden, bedarf keines Beweises; in einer solchen Aenderung der Wärmebewegung und der Ableitung finden unter Anderm auch die Abweichungen zwischen den auf S. 217 bis S. 223 angeführten Versuchsreihen, bei denen der Krystall in verschiedener Weise in den Platinsand eingesetzt war, ihre Erklärung.

Ich habe versucht, den Boracitwürfel Nr. I ganz ohne Ableitung zu erhitzen und auf seinen elektrischen Zustand durch blosse Annäherung einer Drahtspitze zu untersuchen. Der Krystall lag dabei auf vier einander genäherten isolirten Glasspitzen, und ward durch einen aus einer unterhalb befindlichen Röhre austretenden heissen Luftstrom erhitzt. Die getroffene Einrichtung war aber zu unvollkommen, der Krystall lag nicht fest genug, es war zu schwierig, mit der Drahtspitze z. B. erst die Mitte der obern und darauf der untern Fläche zu untersuchen, so dass ich die Durchführung einer solchen Versuchsreihe bis auf spätere Zeit verschieben musste, wo mir eine von den genannten Uebelständen freie Vorrichtung zu Gebote stehen wird.

### Krystall Nr. II (Würfel).

Die Flächen dieses Würfels, den ich durch die Güte des Hrn. Prof. Naumann erhalten habe, sind zum Theil sehr mangelhaft ausgebildet, gleichsam stark angefressen; einigermassen vollkommen sind nur die

drei Flächen 1, 2 und 3, während die drei übrigen grosse und weite Vertiefungen zeigen, und namentlich die Fläche 6 nur an einzelnen Stellen am Rande ausgebildet ist.

Ausser den Würfelflächen zeigt derselbe sehr stark entwickelte glatte Tetraederflächen; weniger gross sind die Flächen des andern Tetraeders, ferner die Flächen des Rhombendodekaeders, des Trigondodekaeders $-\frac{2O2}{2}$ und des Hexakistetraeders $+\frac{5O\frac{5}{4}}{2}$.

Die Seite des Würfels beträgt im Mittel $10^{mm}$.

Die Würfelflächen gleichen in ihrem Aussehen unter dem Mikroskope ganz den Würfelflächen des Krystalles Nr. I. Die glatten Tetraederflächen zeigen kleine dreieckige Grübchen und die Rhombendodekaederflächen sind ebenso wie am Krystall Nr. I sehr fein parallel mit den Würfelkanten gestreift.

Der Krystall ist sehr häufig Gegenstand der Untersuchung gewesen, sowohl in Betreff seiner Ecken als auch seiner Kanten und Flächen, und letztere nicht blos einzeln, sondern auch vergleichsweise unter einander. Die Prüfungen derselben sind in den vorhergehenden Abschnitten mehrfach erwähnt und mitgetheilt worden. Die Elektricität ist an den meisten Stellen des Krystalles stark.

Die Flächen 1 bis 5 sind Flächen erster Art. Die Fläche 6 ist so zerfressen und porös, dass nur an vereinzelten Punkten der umgebenden Kanten noch die ursprüngliche Begrenzung vorhanden ist; sie ist die einzige Fläche zweiter Art an diesem Krystalle. Von der Richtigkeit dieser Angabe habe ich mich ausser durch die specielle Untersuchung der Fläche 6 allein, auch noch durch eine (ähnlich wie S. 219) angestellte unmittelbare Vergleichung der Fläche 6 mit der anliegenden Fläche 3 überzeugt. Hat etwa das anliegende Medium bei der Bildung des Krystalles auf die Beschaffenheit der Fläche 6 einen Einfluss geäussert?

### Krystall Nr. III (Würfel).

Der Krystall war viel kleiner als die beiden vorhergehenden; die Abstände der parallelen Würfelflächen betrugen zwischen den Flächen 1 und 6 $4{,}47^{mm}$, zwischen den Flächen 2 und 4 $4{,}61^{mm}$, und zwischen den Flächen 3 und 5 $4{,}59^{mm}$. Von Flächen fanden sich ausser den vorwaltenden Flächen des Würfels und beider Tetraeder auch kleine Rhombendodekaederflächen. Unter dem Mikroskope zeigten sich die Würfelflächen nicht porös, wohl aber gestreift; die Streifungen auf

denselben gingen parallel erstens mit der Diagonale, welche Ecken mit glatten Tetraederflächen verbindet, und zweitens mit den Würfelkanten. Die erstern rühren von dem stumpfen Trigondodekaeder $-\frac{808}{2}$ und die letztern von einem Tetrakishexaeder her. Dieselben Streifungen zeigen sich auch auf den Flächen der übrigen Krystalle, bei denen ich sie nicht weiter erwähnen werde. Es scheint indess, als ob die genannten beiden Streifungen nicht in gleichem Grade auf allen Flächen vorhanden sind, sondern auf einigen Flächen die erste Streifung etwas stärker hervortritt als die zweite, dagegen auf andern wieder umgekehrt. Bei der Schwierigkeit, geringe derartige Unterschiede mit Sicherheit wahrzunehmen, muss ich es jedoch dahin gestellt sein lassen, ob dieselben, falls sie wirklich existiren, mit den elektrischen Beschaffenheiten der Flächen zusammenhängen. Auch nach dem von Brewster (*The London, Edinb. and Dubl. Phil. Mag.* Bd. 5, S. 16) angewandten Verfahren, welches ich auf die Weise abänderte, dass ich mittelst eines vor das Auge gehaltenen durchbohrten Spiegels Sonnenlicht auf die Krystallflächen warf, und die spiegelnde Fläche mittelst einer Loupe durch die Oeffnung im Spiegel betrachtete, hat sich zwischen den Flächen dieses Krystalles kein wesentlicher Unterschied herausgestellt; das, ich möchte sagen, maschenförmige Ansehen der Flächen rührt von den angegebenen Streifungen her. Da bei dem Krystalle Nr. I vorzugsweise die eine Streifung parallel der einen Diagonale hervortritt, so ist demgemäss auch der Lichtreflex des Sonnenlichts von seinen Flächen ein anderer; unter dem Mikroskope erscheinen darauf bei schief einfallendem Lichte je nach dem Reflexe desselben äusserst zierliche, mannichfach verschlungene Figuren.

Die Elektricität tritt auf den Flächen dieses Krystalles mit grosser Bestimmtheit und verhältnissmässig auch grosser Stärke auf. Ich habe den Krystall bis jetzt nie höher als bis zu 70 oder 80° erhitzt, weil die elektrische Beschaffenheit sämmtlicher Flächen in völlig unzweideutiger Weise sich auch durch die bei geringen Temperaturerhöhungen ausgeführten Messungen feststellen liess; gebe also in dem Folgenden nur die elektrischen Vertheilungen, wie sie sonst zu Anfang der Erhitzung und zu Ende der Abkühlung beobachtet werden.

Die Flächen 2, 3 und 5 sind Flächen erster, die Flächen 1, 4 und 6 dagegen Flächen zweiter Art. Die drei Flächen erster Art liegen nicht um eine Ecke, sondern schneiden sich in parallelen Kanten; dasselbe gilt selbstverständlich dann auch von den drei Flächen zweiter Art. Der

Krystall wurde nur langsam erhitzt, und die sämmtlichen Beobachtungen geschahen mittelst Annäherung der Spitze des Platindrahtes; aber auch hierbei wurden Ausschläge des Goldblättchens von oft mehr als 1 Skth. erhalten. Ich besitze drei ganz übereinstimmende Versuchsreihen, von denen die zweite und dritte durch einen Zeitraum von länger als zwei Jahren getrennt sind.

Krystall Nr. IV (Würfel).

Der Krystall wird vorzugsweise von den Flächen des Würfels begrenzt; ausserdem besitzt er kleine Rhombendodekaederflächen, ferner die Flächen beider Tetraeder und die Flächen des Trigondodekaeders $-\frac{2O2}{2}$; indess sind die letztern Flächen nur an einigen Ecken vereinzelt sichtbar. Eine Beziehung derselben zum elektrischen Verhalten hat sich nicht herausgestellt. Die Fläche 6 ist in der Mitte nicht ausgebildet; auch auf der Fläche 4 zeigen sich einige tiefe Furchen. Der Abstand der Fläche 1 und 6 beträgt $4{,}4^{mm}$, der Fläche 2 und $4{,}2^{mm}$, und der Fläche 3 und 5 ebenfalls $4{,}2^{mm}$.

Auch dieser Krystall ist wie der vorhergehende nicht über die Siedehitze des Wassers erwärmt worden.

Von seinen Flächen ergaben sich 3, 4 und 6 als erster Art, 1, 2 und 5 als zweiter Art, wofern man die auf der Fläche 6 allein beim Erwärmen beobachtete Elektricität über die Beschaffenheit dieser Fläche entscheiden lässt. Die gleichnamigen Flächen finden sich sonach an diesem Krystalle anders vertheilt als an dem vorigen; die drei gleichnamigen Flächen erster Art 3, 4 und 6 liegen um eine Würfelecke mit matter Tetraederfläche, und entgegengesetzt die drei Flächen zweiter Art 1, 2 und 5 um eine Würfelecke mit glatter Tetraederfläche.

Die elektrische Vertheilung an diesem Krystalle stimmt also mit derjenigen überein, wie ich sie früher in Poggendorff's Annalen Bd. 56 S. 59 angegeben und im Anfange dieser Abhandlung (S. 155) wiederholt habe.

Wie schon angedeutet, zeigt sich die Fläche 6 beim Erwärmen negativ; dagegen ist es mir nicht möglich gewesen, auf ihr beim Erkalten die entsprechende positive Elektricität zu finden; sie erscheint nach dem Auslöschen der Lampe noch längere Zeit negativ, und gegen Ende des Erkaltens unelektrisch.

Krystall Nr. V (Würfel).

Der Krystall gleicht dem vorhergehenden, auch an ihm sind die Trigondodekaederflächen nur an einigen Ecken vereinzelt sichtbar. Die Fläche 5 ist in der Nähe der Kante (5. 6.) unvollständig ausgebildet; auf der Fläche 6 erstreckt sich der nicht ausgebildete Theil von der Mitte der Kante (5. 6.) bis zur Mitte der Fläche.

Der Abstand der Flächen 1 und 6 beträgt $5{,}0^{mm}$, der Flächen 2 und 4 $5{,}3^{mm}$, und der Flächen 3 und 5 $5{,}2^{mm}$.

Der Krystall ist sehr oft bis zu 200° erhitzt worden. Die Flächen 2 und 6 gehören zur ersten, die Flächen 1, 3, 4 und 5 zur zweiten Art.

Auf der Fläche 2 wurden beim Erhitzen —+— beobachtet; beim Erkalten kann leicht die letzte positive Periode übersehen werden. Die positive Zone, welche sich zu Ende derselben von einer Würfelecke mit glatten Tetraederflächen bis zur diagonal gegenüber liegenden erstreckt, ist nämlich in der Mitte ausserordentlich schmal, so dass eine geringe Abweichung von der Mitte nach den Ecken mit matten Tetraederflächen auf eine nicht elektrische Stelle, eine etwas grössere aber sogar in das Gebiet der negativen Ecken führt.

Auch auf der Fläche 3 ist die elektrische Erregung nur schwach und die elektrische Zone zu Anfang der Erwärmung und zu Ende der Abkühlung sehr schmal.

Krystall Nr. VI (Würfel).

Der Krystall wird fast allein von den Flächen des Würfels begrenzt; nur die glatten Tetraederflächen haben einige Ausdehnung, dagegen sind die matten Tetraeder- und die Rhombendodekaederflächen fast nur unter der Loupe deutlich erkennbar. Der Abstand der beiden Flächen 1 und 6, und ebenso der beiden Flächen 2 und 4 beträgt $3{,}0^{mm}$, der Abstand der beiden Flächen 3 und 5 $3{,}1^{mm}$.

Die Flächen 2, 4, 5 und 6 sind Flächen zweiter, die Flächen 1 und 3 Flächen erster Art. Auf den Flächen 1, 2, 3 und 6 nimmt die entsprechende Elektricität zu Ende der Abkühlung fast die ganze Fläche ein, wenn der Krystall bis auf diese in den Platinsand eingesetzt ist; auf der Fläche 4 ist der Bereich der negativen Elektricität in dem genannten Zeitpunkte geringer, und namentlich ist dieselbe sehr schwach zwischen der Mitte dieser Fläche und der Ecke (4. 5. 6.), ein Umstand, der in den frühern Versuchen (s. S. 155 und Pogg. Ann. Bd. 56, S. 59), wo

der Krystall auf einem Metallbleche liegend erhitzt wurde, das Auftreten positiver Elektricität daselbst erleichtert hatte.

Krystall Nr. VII (Würfel).

Der Krystall trägt ausser den grossen Würfelflächen kleine Flächen des Rhombendodekaeders und beider Tetraeder, sowie einzelne Flächen des Trigondodekaeders $-\frac{2O2}{2}$, welche glänzender erscheinen als die matten Tetraederflächen. Der Abstand der beiden Flächen 1 und 6 beträgt 5,4$^{mm}$, der beiden Flächen 2 und 4 5,9$^{mm}$ und der beiden Flächen 3 und 5 5,7$^{mm}$.

Sämmtliche Flächen des Krystalles sind Flächen zweiter Art.

Krystall Nr. VIII (Würfel).

Der Krystall besitzt ausser grossen Würfelflächen auch ziemlich grosse Rhombendodekaederflächen, letztere von ungleicher Grösse; die Flächen des glatten Tetraeders sind stark entwickelt; die Flächen des matten Tetraeders sind mit Ausnahme einer Fläche (auf der Ecke 1. 2. 5.) sehr klein; ausserdem finden sich auch noch die Flächen des Trigondodekaeders $-\frac{2O2}{2}$. Die Fläche 6 ist nach der Kante (5. 6.) zu mangelhaft ausgebildet. Der Abstand der beiden Flächen 1 und 6 beträgt 8,2$^{mm}$, der beiden Flächen 2 und 4, und ebenso der beiden Flächen 3 und 5 8,6$^{mm}$.

Da dieser Krystall meistens keine starken elektrischen Erregungen darbietet, so ist er zu oft wiederholten Malen Gegenstand der Untersuchung gewesen.

Die Flächen 2, 3, 5 und 6 sind Flächen zweiter Art; 2 und 6 zeigen im Allgemeinen eine grössere Intensität als die Flächen 3 und 5, auf denen namentlich die mittlere positive Periode beim Erkalten, wenn der Krystall bis zur dritten Periode erhitzt gewesen ist, entweder nur schwach oder gar nicht sichtbar wird. Man kann indess, wie schon oben S. 203 erwähnt, ihre Unterdrückung vermeiden, wenn man den Krystall nur bis zur zweiten Periode bei steigender Temperatur erhitzt.

Die Flächen 1 und 4 sind Flächen erster Art, wenn wir zufolge der Vorgänge beim Erwärmen (S. 210) die Fläche 1 zu den Flächen erster Art rechnen.

Krystall Nr. IX.

An diesem Krystalle treten ausser den Flächen des Würfels und des glatten Tetraeders auch noch die Flächen des Rhombendodekaeders

in einiger Ausdehnung auf; die Flächen des matten Tetraeders und des Trigondodekaeders $-\frac{202}{2}$ sind dagegen nur klein. Der Abstand der Fläche 1 und 6, sowie der Flächen 3 und 5 beträgt $5{,}0^{mm}$ und der Flächen 2 und 4 $4{,}9^{mm}$.

Die Würfelflächen 1, 2, 3 und 6 sind Flächen erster, 4 und 5 dagegen zweiter Art; die Stärke der erregten Elektricität ist auf den einzelnen Flächen sehr verschieden. Während z. B. nach dem Beginn der Erwärmung bei 50 bis 60° die Fläche 6 + 0,6 Skth. zeigte, ward auf der Fläche 2 unter gleichen Umständen nur + 0,1 Skth. beobachtet; während bei den genannten Temperaturen auf der Fläche 5 — 0,35 Skth. gefunden wurde, ergab sich auf der Fläche 4 nur der Werth — 0,1 Skth.

Schwach erregbar sind überhaupt die beiden Flächen 2 und 4; die stärkste Intensität zeigen die Fläche 1 und 6 und auch 5; von mittlerer Stärke ist die Fläche 3.

Krystall Nr. X (Würfel).

Während die frühern Krystalle undurchsichtig waren, ist der Krystall Nr. X sehr stark durchscheinend. Er trägt ausser grossen Würfelflächen mässig grosse Flächen des glatten Tetraeders und Rhombendodekaeders, kleine Flächen des matten Tetraeders und des Trigondodekaeders $-\frac{202}{2}$, sowie auch eine Fläche des Hexakistetraeders $+\frac{50\frac{5}{3}}{2}$. Der Abstand der beiden Flächen 1 und 6 beträgt $5{,}7^{mm}$, der Fläche 2 und 4 $5{,}4^{mm}$, und der Fläche 3 und 5 $5{,}6^{mm}$.

Der Krystall ist nur ein Mal bis 110°, in allen übrigen Versuchen aber nie über 80° erhitzt worden; die Elektricität seiner Flächen erscheint ziemlich stark, und nimmt meistens den grössten Theil der Flächen ein.

Die Flächen 1, 4 und 5 gehören zur ersten und die Flächen 2, 3 und 6 zur zweiten Art; die ersten drei Flächen liegen um eine Würfelecke mit matter Tetraederfläche, die also in elektrischer Beziehung die entgegengesetzte Polarität zeigt; entsprechend sind die Flächen 2, 3 und 6 um eine ihnen polarisch entgegengesetzte Würfelecke mit glatter Tetraederfläche angeordnet.

Krystall Nr. XI (Würfel mit sehr stark ausgebildeten Rhombendodekaederflächen).

Die Rhombendodekaederflächen besitzen an diesem von Hrn. Prof. Naumann mir gütigst geliehenen Krystalle ziemlich die Breite der Würfelflächen; ausserdem finden sich daran grosse glänzende und kleine

matte Tetraederflächen, so wie schwach ausgedehnte Flächen des Trigondodekaeders $-\frac{2O2}{2}$. An zwei Ecken (1. 4. 5. und 6. 2. 3.) ist auch eine vereinzelte Fläche des Hexakistetraeders $+\frac{5O\frac{5}{4}}{2}$ sichtbar. Auf den Flächen 1 und 6 ragen die Kanten über die ziemlich ebenen Bodenflächen fast um 0,3$^{mm}$ hervor; mit Ausnahme dieser beiden Flächen ist der Krystall vollkommen ausgebildet und unverletzt. Der Abstand der beiden Flächen 1 und 6 (ihrer Kanten), sowie der Flächen 2 und 4 beträgt 9,4$^{mm}$, und der Flächen 3 und 5 9,1$^{mm}$.

Die Flächen 1, 4, 5 und 6 dieses Krystalles sind Flächen zweiter Art, 2 und 3 dagegen Flächen erster Art. Auf der Mitte der Fläche 6 verwandelt sich beim Erwärmen das von einer vorhergehenden Abkühlung herrührende — erst ziemlich spät in +. Der Krystall ist mit Ausnahme eines an der Fläche 6 angestellten Versuches, wo die Temperatur bis 102° stieg, sonst nie über den Siedepunkt des Wassers erhitzt worden.

Krystall Nr. XII (Rhombendodekaeder).

Der Krystall zeigt ausser den Rhombendodekaederflächen sehr kleine Flächen des Würfels und des glatten Tetraeders von ungleicher Grösse; die Flächen des andern Tetraeders sind kaum sichtbar. Der Abstand der beiden kleinen Würfelflächen 1 und 6 beträgt 9,1$^{mm}$, der beiden Würfelflächen 2 und 4 9,3$^{mm}$, und der beiden Flächen 3 und 5 9,5$^{mm}$. Der Krystall ist fast unverletzt. Die Flächen des Rhombendodekaeders erscheinen matt, nach den Kanten zu aber meistens glänzend, als wären sie hier vollkommener ausgebildet.

Die Intensität der auf den Octaederecken (oder kleinen Würfelflächen) wahrnehmbaren Elektricität ist sehr verschieden; ziemlich stark ist sie auf der Octaederecke 1, dann folgen der Stärke nach die Octaederecken 3, 4 und 5, während die Ecken 2 und 6 äusserst schwach sind. Die Octaederecken 1, 4 und 5 entsprechen den Flächen erster Art, die Ecke 3 den Flächen zweiter Art; über die Ecken 2 und 6 wage ich keinen sichern Ausspruch, da ich nur mittelst Berührung eine schwache Elektricität auf ihnen wahrnehmen konnte. Die Octaederecke 1 trug die grösste Würfelfläche.

Der Krystall zeigt ebenso wie die würfelförmigen Boracite die Umkehrungen in der elektrischen Polarität während des Erhitzens und Erkaltens.

## Krystall Nr. XIII (Tetraeder).

Der Güte des Herrn G. Rose verdanke ich ein ziemlich grosses Tetraeder mit matten Flächen, an welchem ausserdem die Flächen des glatten Tetraeders, des Rhombendodekaeders, des Würfels, des Trigondodekaeders und Hexakistetraeders sichtbar sind. Die grossen Tetraederflächen sind rauh, ich möchte sagen porös, und unter dem Mikroskope erkennt man mehrfache Ansätze zu oscillatorischen Combinationen. Die kleinen glatten Tetraederflächen zeigen unter dem Mikroskope kleine dreieckige Grübchen; ausserdem finden sich aber auf diesen Flächen auch noch grössere und tiefere, unten scheinbar konisch auslaufende Vertiefungen. Die Rhombendodekaederflächen sind parallel mit den Würfelkanten gestreift und weniger glänzend als die vorhandenen kleinen Würfelflächen. Der Abstand zweier diametral einander gegenüber liegenden Würfelflächen beträgt ungefähr $5\frac{1}{2}^{mm}$.

Der Krystall ist wiederholt Gegenstand der Untersuchung gewesen, und dies eben sowohl in Bezug auf das Verhalten seiner Ecken und Flächen, wie auch in Bezug auf das Verhalten seiner Kanten oder der dieselben abstumpfenden kleinen Würfelflächen.

Die Tetraeder des Boracits zeigen übereinstimmend mit den würfelförmigen und rhombendodekaedrischen Krystallen die Umkehrungen oder Wechsel in den Polaritäten; im Folgenden sollen specielle Beispiele dafür mitgetheilt werden.

Volger führt in seiner Monographie des Boracits (s. oben S. 157) an, dass die Elektricität auf den Kanten der Tetraeder beim Erkalten positiv sei, welche Angaben ich nach den Versuchen für den vorliegenden Krystall bestätigen kann. Es wird am einfachsten sein, aus einer speciellen von mir an einer Kante dieses Krystalles angestellten Versuchsreihe einen Auszug mitzutheilen; das Ende des Platindrahtes wurde der Mitte derselben nur genähert.

| T. | Elektricität Art | Stärke | | T. | Elektricität Art | Stärke | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 31° | + | 0,5 | von vorhergehender Erwärmung herrührend. | 160° | — | 0,1 | |
| 45 | + | 0,45 | Lampe angezündet. | 162 | — | 0,2 | |
| 55 | + | 0,20 | | 163 | + | 0,1 | |
| 60 | 0 | 0,0 | | 165 | + | 0,1 | Lampe ausgelöscht. |
| 65 | — | 0,1 | | 150 | + | 0,2 | |
| 80 | — | 0,35 | | 130 | + | 0,15 | |
| 101 | — | 0,3 | | 118 | — | 0,1 | |
| 112 | — | 0,1 | | 93 | — | 0,3 | |
| 118 | 0 | 0,0 | | 65 | — | 0,3 | |
| 122 | + | 0,1 | | 52 | — | 0,2 | |
| 130 | + | 0,15 | | 40 | + | 0,3 | |
| 144 | + | 0,1 | | 38 | + | 0,6 | |
| 150 | — | 0,05 | | | etc. | | |

Die Mitte der Kante oder der kleinen Würfelfläche erscheint also beim Eintritt der steigenden Temperatur — bis 112°, dann + bis 144° und darauf wieder —. Das letzte + bei 163° ist nur eine Folge der durch die blosse Annäherung des Drahtes bewirkten Abkühlung, wie dies auch schon S. 228 erwähnt worden ist. Beim Abkühlen wurden die entsprechenden elektrischen Perioden + — + erhalten. Die Elektricität zu Ende der Abkühlung ist stark; sie würde bei weiterem Sinken der Temperatur noch über 0,6 Skth. gegangen sein.

Sämmtliche übrigen Würfelflächen an diesem Tetraeder gleichen in Bezug auf die Art der an ihnen auftretenden Elektricitäten der vorhergehenden, sind also Flächen erster Art; doch scheinen ein oder zwei derselben schwächer zu sein als die übrigen.

Auf den grossen Tetraederflächen, deren Bestimmung Volger nicht gelang, finden sich bei diesem Krystalle im Allgemeinen die entgegengesetzten Perioden als auf den Kanten. Ich will auch hier nicht unterlassen, eine mittelst Annäherung des Drahtendes auf einer der vorher untersuchten Kante anliegenden Fläche ausgeführte Beobachtungsreihe im Auszuge mitzutheilen.

Wie die folgende Tabelle zeigt, gleicht diese Fläche in ihrem Verhalten den Würfelecken mit matten Tetraederflächen oder den Würfelflächen zweiter Art; es ist auf ihr selbst die positive Elektricität vor dem Eintritt der negativen Periode beim Beginn des Erkaltens, wie solche (S. 204) auf den letztgenannten Flächen erscheint, beobachtet worden. Mit ihr stimmen die übrigen drei grossen Tetraederflächen überein.

| T. | Elektricität Art | Stärke | | T. | Elektricität Art | Stärke | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 25° | — | 0,2 | von vorhergehender Erwärmung herrührend. | 170° | 0 | 0,0 | |
| 35 | + | 0,05 | Lampe angezündet. | 147 | + | 0,1 | |
| 45 | + | 0,2 | | 142 | — | 0,2 | |
| 75 | + | 0,45 | | 135 | — | 0,25 | |
| 110 | + | 0,15 | | 131 | — | 0,05 | |
| 120 | 0 | 0,0 | | 123 | 0 | 0,0 | |
| 125 | — | 0,1 | | 90 | + | 0,05 | |
| 135 | — | 0,1 | | 76 | + | 0,15 | |
| 148 | — | 0,05 | | 63 | + | 0,15 | |
| 153 | 0 | 0,0 | | 46 | — | 0,2 | |
| 158 | + | 0,2 | | 33 | — | 0,6 | |
| 163 | + | 0,1 | | | etc. | | |
| 165 | 0 | 0,0 | Lampe ausgelöscht. | | | | |

Während die Kanten und Flächen dieses Tetraeders zu Anfang der Erwärmung und zu Ende des Erkaltens starke Elektricität zeigen, erscheint dagegen auf den Ecken desselben, wo die glatten Tetraederflächen liegen, nur schwache Elektricität, die ihrer Art nach mit der Polarität der entsprechenden Würfelecken übereinstimmt. Ich mache übrigens darauf aufmerksam, dass, weil sämmtliche Beobachtungen durch Annähern ausgeführt sind, die Kanten oder, besser gesagt, die schmalen Würfelflächen wegen ihrer Längserstreckung eine stärkere Vertheilung in dem genäherten Platindrahte hervorrufen müssen als die Ecken; indess reicht selbst die Voraussetzung einer ganz gleichförmigen Verbreitung der Elektricität über die Würfelflächen und die Ecken (oder die daselbst vorhandenen kleinen Tetraederflächen) nicht aus, um die Grösse der Differenzen in den Intensitäten auf den Kanten und den Ecken zu erklären. Man hat oft Mühe, die elektrischen Polaritäten auf den Ecken zu erkennen; die Maxima übersteigen nicht 0,15 Skth.

Krystall Nr. XIV (Tetraeder).

Der gleichfalls von Herrn G. Rose mir geliehene Krystall gleicht im Allgemeinen dem vorhergehenden, nur ist er etwas kleiner, und sind die grossen rauhen Tetraederflächen noch unvollständiger ausgebildet; dieselben zeigen tiefe Gruben. Der Abstand zweier gegenüber liegenden Würfelkanten beträgt ungefähr 4,7$^{mm}$.

In Bezug auf sein elektrisches Verhalten stimmt dieses Tetraeder mit dem vorhergehenden überein. Seine sämmtlichen kleinen Würfel-

flächen sind Flächen erster Art und mit Ausnahme einer einzigen stark elektrisch.

Die grossen Tetraederflächen verhalten sich wie die Würfelecken mit rauhen Tetraederflächen. Es dürfte nicht ohne Interesse sein, aus einer mittelst Berührung des Krystalles mit dem Ende des Platindrahtes ausgeführten Versuchsreihe einen Auszug mitzutheilen.

| T. | Elektricität Art | Stärke | | T. | Elektricität Art | Stärke | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 35° | + | 0,3 | | 166° | + | 0,3 | |
| 55 | + | 1,0 | | 156 | — | 0,2 | |
| 80 | + | 1,0 | | 153 | — | über 15,0 | beim Anhalten des Drahtes. |
| 115 | + | 0,3 | | 125 | — | 0,6 | |
| 123 | — | 0,1 | | 94 | — | 0,2 | |
| 132 | — | 0,7 | | 88 | 0 | 0,0 | |
| 152 | — | 1,6 | | 80 | + | 0,2 | |
| 166 | — | 0,1 | | 70 | + | 0,1 | |
| 170 | + | 2,5 | | 60 | 0 | 0,0 | |
| 171 | + | 10,0 | | 56 | — | 0,1 | |
| 173 | + | 1,5 | Lampe ausgelöscht. | 41 | — | 0,4 | |

Eine untersuchte Ecke (mit glatter Tetraederfläche) zeigte beim Beginn des Erwärmens —, beim Ende des Erkaltens +; war aber ebenso wie bei dem vorhergehenden Krystalle viel schwächer als die Kanten und Flächen; die Maxima stiegen ebenso wie vorhin nur bis 0,15 Skth.

Krystall Nr. XV (Tetraeder).

Der Krystall zeigte ein dichtes Gefüge, und bot ausser seinen grossen Tetraederflächen auf den Ecken noch kleine Tetraederflächen nebst glänzenden Rhombendodekaederflächen dar, sowie auf den Kanten die Flächen des Würfels. Auch finden sich die Flächen des Trigondodekaeders und Hexakistetraeders. Der Abstand zweier gegenüber liegenden Würfelflächen beträgt ungefähr $4^{mm}$.

An ihm habe ich nur eine Kante, Fläche und Ecke sorgfältig untersucht; die Kante und Fläche stimmten ganz mit den entsprechenden Theilen der beiden vorhergehenden Krystalle überein; die Ecke zeigte nur darin eine Abweichung, dass auf ihr, obwohl sie bei Beginn des Erwärmens stets —, und zwar jedes Mal bis zu 0,2 Skth. darbot, doch trotz mehrfach zu verschiedenen Zeiten unternommener Beobachtungen zu Ende der Abkühlung die entsprechende positive Elektricität nicht

wahrgenommen werden konnte; die Ecke erschien vielmehr zu Ende des Erkaltens unelektrisch. Ihre elektrische Beschaffenheit ist indess durch die Beobachtung beim Erhitzen bestimmt.

Krystall Nr. XVI (Tetraeder).

Dieser Krystall glich dem vorhergehenden, war aber in seinem Gefüge noch gleichartiger, so dass er fast durchsichtig erschien. Der Abstand von einer Würfelfläche zur gegenüberliegenden betrug ungefähr 3,8$^{mm}$.

Der Krystall ist niemals über 80$^0$ erhitzt worden.

An diesem Krystalle sind sämmtliche Kanten oder die dieselben abstumpfenden schmalen Würfelflächen untersucht worden; vier derselben gehörten zur ersten Art, die beiden übrigen zwei neben einander liegenden dagegen zur zweiten Art; drei Würfelflächen erster Art waren sehr bedeutend stärker als die beiden Würfelflächen zweiter Art, während die elektrische Intensität auf der vierten Fläche erster Art in geringerem Grade die Stärke der beiden Flächen zweiter Art übertraf.

Die eine untersuchte Ecke verhielt sich wie die Würfelecken mit glatten Tetraederflächen, und die eine untersuchte grosse Tetraederfläche wie die Würfelecken mit matten Tetraederflächen. Auch an diesem Krystalle übertrafen die Kanten und Flächen in Bezug auf die Stärke der Elektricität bei weitem die Ecken; während z. B. eine Kante oder Würfelfläche erster Art als Maximum bei steigender Temperatur einen Ausschlag von 0,6 Skth. gab, erhielt ich auf der untersuchten Ecke unter gleichen Umständen als Maximum 0,1 Skth.

Der bessern Uebersicht wegen will ich hier noch die vorhergehenden Angaben über die Beschaffenheit der Würfelflächen bei allen vollständig untersuchten Boracitkrystallen in einer Tabelle zusammenstellen. In der obern horizontalen Reihe stehen die Würfelflächen 1 bis 6; die erste verticale Spalte enthält die Nr. des Krystalles; durch die mit ihr in gleicher Horizontalreihe stehenden Buchstaben $\alpha$ und $\beta$ ist die Art der vertical darüber stehenden Fläche bezeichnet. $\alpha$ bedeutet eine Fläche erster und $\beta$ eine Fläche zweiter Art.

| Nr. | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | Nr. | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| I | α | α | α | α | α | α | IX | α | α | α | β | β | α |
| II | α | α | α | α | α | β | X | α | β | β | α | α | β |
| III | β | α | α | β | α | β | XI | β | α | α | β | β | β |
| IV | β | β | α | α | β | α | XII | α | ? | β | α | α | ? |
| V | β | α | β | β | β | α | XIII | α | α | α | α | α | α |
| VI | α | β | α | β | β | β | XIV | α | α | α | α | α | α |
| VII | β | β | β | β | β | β | XVI | β | β | α | α | α | α |
| VIII | α | β | β | α | β | β | | | | | | | |

Aus dieser Tabelle ergeben sich also folgende Fälle:

1) Sämmtliche Würfelflächen sind Flächen der ersten Art (drei Krystalle, der Würfel Nr. I und die beiden Tetraeder Nr. XIII und XIV).

2) Fünf Flächen sind erster und nur eine Fläche zweiter Art (Krystall Nr. II; die Fläche zweiter Art ist die wenigst ausgebildete).

3) Vier Flächen sind erster und zwei Flächen zweiter Art (Krystalle Nr. IX und XVI; in beiden Fällen sind die Flächen zweiter Art zwei neben einander liegende Flächen).

4) Drei Flächen sind erster und drei Flächen zweiter Art,

a) je drei gleichnamige Flächen schneiden sich in parallelen Kanten (Krystall Nr. III);

b) je drei gleichnamige Flächen liegen um eine ungleichnamige Würfelecke (Krystalle Nr. IV und Nr. X).

5) Zwei Flächen sind erster und vier Flächen zweiter Art, und zwar liegen die beiden Flächen erster Art neben einander (Krystalle Nr. V, Nr. VI, Nr. VIII und Nr. XI).

6) Sämmtliche Flächen sind Flächen zweiter Art (Krystall Nr. VII).

Unter den vorstehenden Krystallen sind die unter 1 und 2 verzeichneten Krystalle Nr. I, II, XIII und XIV an ihren äussern Eigenschaften durch das Mikroskop als von den übrigen verschieden, und eine besondere Klasse bildend zu erkennen. Früher (S. 234 u. 238) ist bereits das eigenthümliche poröse Gefüge dieser Krystalle angeführt worden; alle vier stimmen darin überein, dass ihre Würfelflächen zur ersten Art gehören, mit Ausnahme einer einzigen an dem Krystalle Nr. II, die übrigens äusserst mangelhaft ausgebildet war. Man könnte glauben, dass diese Abweichung nur zufällig und durch eine Störung bei der Bildung des Krystalles von Seiten des einschliessenden Mediums hervorgerufen worden sei, so dass dieselbe Ursache, welche die unvollkommene Aus-

bildung der Fläche veranlasste, auch gleichzeitig derselben entgegengesetzte polarische Eigenschaften als den übrigen Flächen ertheilte.

Wie weit der Ausspruch Geltung haben dürfte, dass an den porös erscheinenden Boracitkrystallen entweder sämmtliche oder doch fast sämmtliche Würfelflächen als Flächen erster Art erscheinen, also in den elektrischen Erregungen sich den Würfelecken mit glatten Tetraederflächen anschliessen, vermag ich für jetzt nicht zu bestimmen, indem die Anzahl der vorhandenen Krystalle dieser Klasse noch zu gering ist.

Der eben genannten Klasse von Boraciten, welche sich durch ihre eigenthümliche poröse Structur auszeichnet, steht nun eine zweite von mehr dichterem Gefüge, das sich in zwei der untersuchten Exemplare bis fast zur Durchsichtigkeit steigerte, gegenüber. An den zu ihr gehörigen Krystallen treten die Flächen der zweiten Art in grösserer Zahl als bei den vorhergehenden (ja in einem Falle bei dem Krystall Nr. VII sogar ausschliesslich) auf. Mittelst des Mikroskopes ist es übrigens nicht möglich, an einem und demselben Krystalle einen Unterschied in der Beschaffenheit der Flächen erster und zweiter Art mit Sicherheit nachzuweisen.

Ob in den Fällen, wo Flächen beiderlei Art an einem Krystalle vorhanden sind, nicht bestimmte Gesetze obwalten, die aber durch Einflüsse bei der Krystallisation nach der einen oder andern Seite hin gestört werden können, darüber wage ich jetzt noch keine bestimmte Ansicht zu äussern.

Zum Schluss will ich nur noch die vorstehenden Angaben über die elektrische Beschaffenheit der Würfelflächen in etwas anderer Form wiederholen. Zwei einander diametral gegenüber liegende, also parallele Flächen sollen zwei Gegenflächen heissen, sobald sie in ihren elektrischen Erscheinungen einen polaren Gegensatz zeigen, dagegen ein Flächenpaar, falls beide parallele Flächen in ihrem elektrischen Verhalten, wenn auch nicht in der Stärke, so doch wenigstens in der Reihenfolge der auf ihnen wahrnehmbaren Elektricitäten übereinstimmen; je nach der Beschaffenheit der Flächen wird dasselbe als ein Flächenpaar erster oder zweiter Art bezeichnet werden müssen. Hiernach lassen sich die von mir untersuchten Krystalle in folgende Abtheilungen bringen:

1) Die Krystalle besitzen drei Flächenpaare, und zwar

a) drei Flächenpaare erster Art, Krystall Nr. I, XIII und XIV;

b) drei Flächenpaare zweiter Art, Krystall Nr. VII.

2) Der Krystall zeigt zwei Flächenpaare erster Art und zwei Gegenflächen, Krystall Nr. II.

3) Der Krystall hat ein Flächenpaar erster, ein Flächenpaar zweiter Art und ausserdem zwei Gegenflächen, Krystall Nr. III. Diese Vertheilung der Polaritäten würde mit der von mir am sibirischen Topase (Pogg. Ann. Bd. 56, S. 37) beobachteten analog sein.

4) Die Krystalle besitzen vier Gegenflächen und nur ein Flächenpaar; letzteres ist

a) erster Art bei den Krystallen Nr. IX und XVI,

b) zweiter Art bei den Krystallen Nr. V, VI, VIII und XI.

5) Sämmtliche Flächen sind Gegenflächen, und zwar liegen je drei gleichnamige Flächen um eine ungleichnamige Würfelecke, Krystall Nr. IV und X.

---

## Inhalt.



---

In der Abhandlung über die Messung der atmosphärischen Elektricität im V. Bande sind folgende Berichtigungen anzubringen:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| S. 504 Z. 9 v. u. | lies | 2,7058 | statt | 0,2742. |
| S. 505 Z. 12 - | - | 1,587 | - | 1,585. |
| S. 505 Z. 11 - | - | 1,590 | - | 1,591. |
| S. 505 Z. 10 - | - | 1,603 | - | 1,601. |
| S. 505 Z. 7 - | - | 1,559 | - | 1,555. |
| S. 541 Z. 16 - | - | $\frac{(\alpha+1)^2}{\alpha}$ | - | $\frac{(\alpha+1)^2}{\alpha^2}$ |

---

# ELEKTRISCHE UNTERSUCHUNGEN

VON

W. G. HANKEL.

## DRITTE ABHANDLUNG

## ÜBER ELEKTRICITÄTSERREGUNG ZWISCHEN METALLEN UND ERHITZTEN SALZEN.

## Entdeckung der Leitungsfähigkeit geschmolzener Salze für galvanische Elektricität.

Die ersten Versuche über den Einfluss einer erhöhten Temperatur auf solche Stoffe, welche zwischen die beiden verschiedenen Armaturen eines Froschpräparates gebracht bei gewöhnlicher Temperatur das Auftreten der Zuckungen verhindern, sind sehr bald nach der Veröffentlichung der Entdeckung Galvani's von Valli an rothglühendem Glase und erhitztem Siegellack ausgeführt worden; zur Anstellung derselben bewog ihn jedenfalls die gegen Ende des vorigen Jahrhunderts bereits längst bekannte Erfahrung, dass das bei niedern Wärmegraden isolirende Glas durch Erhitzen in einen Leiter für die mittelst Reibung erregte Elektricität übergeht. Valli gibt an, er habe bei seinen Versuchen Zuckungen des Froschpräparates erhalten, wenn rothglühendes Glas und erhitztes Siegellack die Communication zwischen der Muskel- und Nervenarmatur bildeten.*) Dagegen gelang es Pfaff**) 1795 nicht, auf die angegebene Weise Zuckungen zu erregen, obwohl dieselben beim Einschalten von stark erhitztem Schwefelantimon, Zinnober und Kupferglas sich zeigten; und dasselbe negative Resultat fand A. v. Humboldt***) 1797 bei Einschaltung des rothglühenden Glases. Aehnlich behauptete Ritter†) 1800, der nicht bloss ein einziges Element, sondern eine Volta'sche Säule von 64 Lagen Zink, Silber und nasser Pappe anwandte, dass glühendes Glas die stärksten Schläge des genannten Apparates isolire.

Dem letztern Ausspruche entgegengesetzt wies indess Pfaff†*) noch in demselben Jahre nach, dass eine Schicht glühenden und bis

*) Medic. chir. Zeit. 1793. III. 53; citirt in Pfaff, über thierische Elektricität und Reizbarkeit, 56.

**) Pfaff ebendas.

***) v. Humboldt, Vers. über die ger. Muskel- und Nervenfaser I. 442.

†) Gilbert's Ann. VI. 471.

†*) Gilbert's Ann. VII. 250.

zum beginnenden Schmelzen erhitzten Glases selbst bis zur Dicke von zwei Linien nicht nur die Elektricität einer schwach geladenen Leydener Flasche, sondern auch die Entladung einer Säule aus 60 Paaren (Zink-Silber) hindurchliess. Er setzt hinzu: „Solange das Glas glühend war, und ich mit meinen Fingern die Kette geschlossen hielt, entlud sich die galvanische Batterie mit ununterbrochenen heftigen Schlägen, da sonst bei einer durch gewöhnliche Leiter gebildeten Kette, solange dieselbe geschlossen ist, die fortdauernden unangenehmen Empfindungen nicht mehr mit Erschütterungen verglichen werden können, sondern mehr stechende Schmerzen sind, besonders in widernatürlich empfindlichen Theilen.“ Ritter*) sucht den Widerspruch zwischen seinen frühern Versuchen und den so eben angeführten Versuchen Pfaff's dadurch zu erklären, dass das Glas bei schwach wirkenden Batterien und schwachem Glühen nicht leite. Vielleicht hat auch wesentlich eine mangelhafte Berührung zwischen dem erhitzten Glase und den Leitungsdrähten zu dem Auftreten negativer Resultate beigetragen.

Die von Erman**) gemachte Angabe, dass die Marecanite, die meisten Obsidiane, viele Laven und der Dichroit, auch wenn sie zuvor mehrere Tage in einer durch Schwefelsäure ausgetrockneten Luft aufbewahrt worden, die Elektricität (die Ladung eines Goldblattelektrometers) bei einer Temperatur unter 15° leiten, dagegen bei 30° schon vollkommene Isolatoren sein sollen, beruht, wie ich***) gezeigt habe, auf einem Irrthume; die genannten Mineralien sind bei 15° und noch tiefern Temperaturen in vollkommen trockener Luft ebenso gut Isolatoren, als bei 30°; jene von Erman behauptete Leitungsfähigkeit bei niedern Temperaturen hat nur in den auf der Oberfläche niedergeschlagenen Wasserdämpfen ihren Grund.

## Entdeckung, dass geschmolzene Salze die Stelle des flüssigen Leiters in der Volta'schen Kette vertreten können.

Schon im Jahre 1810 suchte Schweigger †) die Flüssigkeit zwischen den Elektromotoren durch geschmolzenen Schwefel zu er-

---

*) Gilb. Annal. IX. 290.

**) Erman, Denkschrift. der Berlin. Akad. 1829 und Pogg. Annal. 25, 607.

***) Berichte der K. Sächs. Ges. d. Wiss. zu Leipzig, math.-phys. Klasse 1851. 118; Pogg. Annal. 78, 67.

†) Journ. für Chem. u. Phys. III. 268.

setzen; indess die Mangelhaftigkeit der damaligen Vorrichtungen zur Wahrnehmung galvanischer Ströme, die sich bei schwachen Strömen allein auf die Beobachtungen der Zuckungen eines Froschpräparates beschränkten, hielten ihn ab, den beobachteten Erscheinungen volles Vertrauen zu schenken. Sobald er aber durch die Construction seines elektromagnetischen Multiplicators ein besseres Mittel zum Nachweise galvanischer Ströme gewonnen hatte, nahm er sofort die frühern Ideen, einen galvanischen Process in höheren Temperaturen ohne alle Feuchtigkeit hervorzurufen, wieder auf, und durch seine Veranlassung und unter seiner Leitung wurden 1821 von Schrader, Berend, Heyn, Koch, Liman und Schatten *) Versuche angestellt, ob bei Anwendung im Feuer geschmolzener Salze z. B. des Kochsalzes anstatt des Wassers in den Erregungszellen elektromagnetische Wirkungen erhalten würden. Als Resultat ergab sich, dass die geschmolzenen Salze häufig stärkere elektromagnetische Wirkungen lieferten, als die Lösungen derselben im Wasser. Die Metalle, zwischen welchen die geschmolzenen Salze eingeschaltet wurden, sind nicht speciell namhaft gemacht; aus dem Vorhergehenden, wo Versuche über die Stromerregung durch Einschalten von geschmolzener Schwefelleber zwischen Eisen und Kupfer (wobei letzteres als das positive Metall erschien) erwähnt werden, dürfte man wohl auf die Anwendung eben derselben Metalle bei den Versuchen mit dem geschmolzenen Salze schliessen. Ebenso ist auch die Richtung der Ströme durch geschmolzene Salze nicht besonders bezeichnet, woraus hervor zu gehen scheint, dass dieselbe bei Anwendung der genannten Metalle nichts Abweichendes von der beim Eintauchen derselben Metalle in die wässrigen Lösungen derselben Salze gezeigt hat.

In gleicher Weise erhielt auch Davy **) kräftige elektromagnetische Erregung, als er Zink und Platina in geschmolzene Bleiglätte und geschmolzenes chlorsaures Kali tauchte.

Die Entdeckung des starken Leitungsvermögens gewisser geschmolzenen Salze durch Faraday veranlasste dann 1837 Andrews ***) in Belfast zu Versuchen, ob nicht durch Einschaltung solcher Salze zwischen zwei ungleich erhitzte Platindrähte elektrische Ströme, nach Art der von Seebeck entdeckten thermoelektrischen, erzeugt werden könnten.

---

*) Journ. für Chem. u. Phys. XXXIII. 23.

**) Phil. Transact. für 1826. Pars III. 406.

***) Phil. Mag. Ser. III. Vol. X. 433; Pogg. Annal. Bd. 41. 164.

Er verband zu diesem Zwecke die beiden Enddrähte des Multiplicators eines Galvanometers von 3000 Windungen mit zwei Platindrähten, schmolz auf dem freien Ende des einen ein Kügelchen von Borax, und brachte dann das freie Ende des zweiten Drahtes, das er stärker als das erste erhitzt hatte, mit dem geschmolzenen Kügelchen in Berührung. Das Galvanometer zeigte einen Strom an, welcher vom heissern Drahte durch das geschmolzene Salz zum kältern ging. Ein dauernder Strom in der angegebenen Richtung wurde beobachtet, als er der Flamme der Weingeistlampe eine solche Stellung gab, dass die beiden Drähte an den Berührungspunkten mit dem geschmolzenen Borax ungleiche Temperaturen erhielten. Eben solche Ströme erhielt Andrews durch Schmelzen des kohlensauren Kalis, Chlorkaliums, Jodkaliums, schwefelsauren Natrons, Chlorstrontiums u. s. w. sowie auch der Borsäure.

Die auf diese Weise erhaltenen Ströme gingen durch Wasser, und zersetzten Jodkalium; durch Zusammenstellung von vier Paaren Platindrähten mit Boraxkügelchen über vier Lampen nach Art einer Volta'schen Säule, sodass also stets das auf einer bestimmten Seite des Boraxkügelchens liegende Ende der Platindrähte das heissere war, erhielt Andrews mittelst eines dicken Platindrahtes und einer geschützten Spitze in verdünnter Schwefelsäure eine deutliche Wasserzersetzung. Nach Andrews zeigten die Enden der Platindrähte, welche in die geschmolzenen Perlen eingetaucht gewesen waren, keine Spur von chemischen Einwirkungen; ihr Glanz hatte nicht gelitten und ihre Kanten waren noch scharf und wohl begrenzt.

Um in ungefährer Weise die Stärke dieser Ströme zu ermitteln, setzte Andrews ihnen eine hydroelektrische Kette entgegen; er fand, dass dieselben eine etwas grössere Stärke haben, als ein in verdünnte Schwefelsäure oder Salpetersäure getauchtes einfaches Plattenpaar von Silber und Platin; bei Anwendung stärkerer Salpetersäure, welche das Silber rasch auflöste, überwog aber der Strom des hydroelektrischen Elementes.

Als Andrews den einen Platindraht durch einen Draht aus Palladium, Gold, Silber, Kupfer oder Eisen ersetzte, so behielten die entstehenden Ströme die Richtung von dem heissern Drahte durch die geschmolzene Salzmasse zu dem kältern bei, so lange nicht bei Anwendung unedler Metalle die Oxydation und Auflösung des Oxyds zu heftig wurde; trat letzterer Fall ein, so verhielt sich das in starker Oxydation begriffene Ende als das positive Glied der Kette. Beim Kupfer war es

noch leicht, einen Strom vom heissern Platin durch den geschmolzenen Borax zum kältern Kupfer zu erhalten; beim Eisen dagegen bot dieser Versuch viele Schwierigkeiten dar.

Andrews beobachtete ferner auch Ströme, noch ehe die Salze völlig geschmolzen waren, ihre Richtung entsprach aber nicht immer den zuvor angeführten Gesetzen, sondern schwankte vielmehr in der sonderbarsten und auffallendsten Weise. „Nach einer langen und mühseligen Untersuchung," sagt er, „sind meine Bemühungen zur Entdekkung der wesentlichen Bedingungen, auf welchen die Richtung dieser Ströme beruht, vollständig gescheitert."

Am Schlusse seiner Abhandlung führt Andrews noch an, dass ähnliche Ströme erhalten werden, wenn man gewisse Mineralien zwischen ungleich erhitzte Drähte einschaltet; z. B. Glimmer, zwischen zwei Platindrähte gebracht und stark erhitzt, bewirkte eine Ablenkung der Galvanometernadel von 7°, Stilbit von 25°.

Mittelst des Condensators hatte bereits früher Becquerel*) Anzeichen von freier Elektricität durch die Berührung von ungleich erhitzten Platindrähten mit einer glühenden Glasmasse erhalten. Er führte das eine Ende eines Platindrahtes bis auf den Boden einer Glasröhre, umgab den untern Theil derselben von aussen mit Windungen eines zweiten Platindrahtes, und verband das andere Ende des ersten Drahtes durch ein feuchtes Papier mit der einen Platte eines Condensators, während das freie Ende des zweiten Drahtes mit der Erde in leitender Verbindung stand. Wurde nun der untere Theil der Glasröhre, um welchen von aussen der Platindraht gewunden war, durch die Flamme einer Spirituslampe erhitzt, so ertheilte der innere Draht der Condensatorplatte positive Elektricität. Wird umgekehrt der innere Draht zur Erde abgeleitet und das freie Ende des äussern mit dem Condensator verbunden, so empfängt letzterer eine negative Ladung.

Wenn gleich der oben angeführte Ausspruch Andrews' wenig Aussicht auf Erfolg bei einer Untersuchung über die Ströme zwischen Metallen und erhitzten Salzen übrig liess: so glaubte ich doch bei dem Interesse, das sich an die Kenntniss dieser elektrischen Vorgänge knüpft, den Versuch zur Entdeckung der Bedingungen, wovon die Entstehung der mannichfachen elektrischen Ströme bei jenen Vorgängen abhängt,

*) Traité de l'électr. et du magn. T. II. 36.

wagen zu müssen. Ich darf wohl behaupten, dass meine Untersuchungen nicht ohne Resultate geblieben sind; die folgenden Abschnitte werden dieselben näher darlegen.

### Erläuterung des von mir angewandten Verfahrens.

Ein kleiner Platintiegel von ungefähr $31^{mm}$ Höhe und $29^{mm}$ Durchmesser an der Mündung ruhte in einem Geflechte aus Platindraht, das innerhalb eines an einem Stative verschiebbaren Ringes ausgespannt war; derselbe ward mit dem zu untersuchenden Salze bis zur gewünschten Höhe gefüllt und dann von oben herab ein durch Glas (zum Theil auch Schellack) isolirter Platin-, Gold- oder Silberdraht mit seinem untern Ende, das zu einem kleinen horizontal gerichteten Ringe von 4 bis $5^{mm}$ Durchmesser umgebogen war, mehr oder weniger tief in die Salzmasse eingetaucht. Erforderlichen Falls wurde auf den Tiegel ein in der Mitte durchbohrter Deckel aus dünnem Platinblech aufgelegt, sodass der Draht frei durch die Oeffnung in demselben hindurchging. Die Erhitzung des Platintiegels geschah durch eine Spirituslampe mit doppeltem Luftzuge, die mit einer Plattner'schen Vorrichtung zu einem Gebläse versehen war. Die Lampe konnte beliebig mit oder ohne Anwendung des letztern benutzt werden. Der Schornstein der Lampe war $52^{mm}$ hoch und der Boden des Tiegels stand gewöhnlich 5 bis $10^{mm}$ über dem obern Rande desselben. Für die ungefähre Grösse der Flamme soll die Höhe des Schornsteins als Einheit dienen; $^1/_1$ soll bedeuten, dass der leuchtende Theil der ringförmigen Flamme bis zum obern Rande des Schornsteins reichte; $^1/_2$ bezeichnet, dass derselbe nur bis zur halben Höhe desselben aufstieg.

Um bei sehr grosser Flamme den von oben herabkommenden Platin- oder Golddraht gegen den Einfluss der hinaufschlagenden Flamme zu schützen, war auf das Platingeflecht ein dünnes breites Platinblech mit einer Oeffnung von der Weite des Tiegels gelegt, und in diese Oeffnung der Tiegel eingesetzt.

Sollten elektrische Ströme beobachtet werden; so stand der zuvorgenannte Platin-, Gold- oder Silberdraht mit dem einen Drahtende eines Galvanometers in Verbindung, während dessen anderes Ende mit dem Platingeflechte und hierdurch mit dem Tiegel selbst leitend zusammenhing. Als Galvanometer diente anfangs gewöhnlich das schon vor

vielen Jahren von meinem verehrten Collegen, Herrn Prof. Fechner *) construirte Instrument von 12076 Windungen eines 16454 Fuss langen Drahtes, dessen neu angefertigte Doppelnadel eine Schwingungsdauer von wenigstens 45 bis 60 Secunden besass, wobei sie stets nur eine bestimmte Ruhelage zwischen den beiden Drahtwülsten einnahm. Je nach den Umständen wurde nun die Nadel nach dem Eintritte der Ströme durch einen angemessen mit der Hand bewegten kleinen Magnetstab möglichst beruhigt, oder sie wurde, falls ihre Bewegungen nicht allzu heftig waren, sich ganz selbst überlassen, die auf einander folgenden Ausschläge beobachtet, und aus letztern dann unter Berücksichtigung der bekannten Abnahme der Schwingungsbogen auf die vorhanden gewesenen elektrischen Ströme geschlossen. Häufig befand sich ausser diesem Galvanometer noch ein zweites von ungefähr 2000 Windungen mit sehr unvollkommen astatischer Nadel in dem Kreise, um in solchen Fällen, wo die Nadel des ersten infolge zu grosser Stromintensität sich an die auf 85$^0$ befindliche Hemmung legte, die Ab- oder Zunahme des Stromes beobachten zu können.

Die grosse Schwingungsdauer der astatischen Nadel des zuvor beschriebenen ersten Galvanometers ist für die Beobachtung solcher Vorgänge, die nur sehr kurze Zeit dauern, ein sehr wesentliches Hinderniss; ich sah mich desshalb genöthigt, für solche Fälle ein anderes Instrument anzuwenden, das von diesem Uebelstande frei war, aber an Empfindlichkeit dem obigen nicht nachstand, und daher später vorzugsweise gebraucht wurde.

Auf einen aufgeschlitzten Messingrahmen, dessen innere Höhlung in horizontaler Richtung 160$^{mm}$, in verticaler 22$^{mm}$ betrug, waren drei ungefähr 0,1$^{mm}$ im Durchmesser haltende, mit Seide übersponnene und gefirnisste Drähte aufgewunden. Der innerste Draht machte 3600, der mittelste 3240, und der äusserste 3120 Windungen. Wurden diese Drähte so verbunden, dass der elektrische Strom sie nach einander durchlaufen musste, so bildeten sie einen Multiplicator von 9960 Windungen. Innerhalb des messingenen Rahmens war an einem von der Decke des Zimmers herabkommenden feinen Stahldrahte ein Magnetstab von 150$^{mm}$ Länge, 12,6$^{mm}$ Breite und 6,9$^{mm}$ Höhe aufgehangen; seine Schwingungsdauer betrug ungefähr 8 Secunden. Die Windungen

*) Pogg. Annal. 45. 325.

der Drähte lagen sämmtlich dicht neben einander, ohne in der Mitte eine Spalte oder Oeffnung zu lassen; der Stahldraht trug nämlich den Magnet mittelst einer Gabel, welche um den Messingrahmen herumging. Sollte bei diesem Multiplicator eine astatische Nadel gebraucht werden, so wurde ein zweiter gleicher Magnetstab oberhalb des Messingrahmens in die Gabel eingeschoben. An dem Stäbchen, durch welches die Gabel mit dem Stahldrahte zusammenhing, sass ein Planspiegel, mittelst dessen die Stellung der Magnetnadel wie bei dem Magnetometer beobachtet wurde. Um die Schwingungen zu dämpfen, wurde in den Messingrahmen ein Kupferrahmen von angemessener Dicke eingeschoben, der sich nach Belieben wieder entfernen liess.

Für die meisten der folgenden Versuche war die Ablenkung selbst bei einem Magnetstabe allein (also nicht astatischer Nadel) zu stark, wenn alle 9960 Windungen benutzt wurden; dies fand sogar noch statt, wenn der Strom ausserdem die 16000 Fuss Draht des vorigen Multiplicators zu durchlaufen hatte, der gewöhnlich gleichzeitig in die Kette eingeschaltet war.

Sollten nicht elektrische Ströme, sondern Spannungen gemessen werden; so wurde der eine Draht mit einer Platte eines vortrefflichen Condensators von $206^{mm}$ Durchmesser oder mit dem das Goldblättchen tragenden Stifte des von mir construirten Elektrometers *) verbunden, während der andere Draht eine Ableitung zur Erde erhielt.

## I. Ueber die zwischen Metallen und erhitzten Salzen entstehenden elektrischen Ströme im Allgemeinen.

Um die durch Berührung erhitzter Salzmassen mit ungleich heissen Metallflächen erzeugten elektrischen Vorgänge nach Möglichkeit rein darzustellen, habe ich mich bei den folgenden Versuchen vorzugsweise des Platindrahtes bedient; wo indess die entstehenden Ströme schwach waren, und gewisse Unregelmässigkeiten zeigten, die möglicherweise eine Folge einer geringen Verschiedenheit zwischen dem Platin des Tiegels und des Drahtes sein konnten, ist ausserdem auch, wenn die Höhe der Temperatur es noch gestattete, Gold- und Silberdraht angewandt worden. Sind die erregten Ströme, wie z. B. bei einer Mischung

*) Berichte der math.-phys. Klasse der Gesellsch. für 1850. 71; Pogg. Annal. Bd. 84, 28; Abhandlungen der Gesellsch. Bd. V. 303.

aus gleichen Aequivalenten von kohlensaurem Kali und Natron, kräftig, so gibt der Golddraht qualitativ dieselben Erscheinungen, wie der Platindraht, weshalb ich, zumal da bei Anwendung des Gebläses die Gefahr des Schmelzens des Goldes vorhanden war, bei den meisten der stark wirkenden Salze mich mit den Versuchen zwischen Platin begnügt habe. Ueberall, wo in dem Folgenden der in die Salzmasse getauchte Draht nicht besonders genannt wird, ist stets ein Platindraht zu verstehen. Der gewöhnlich angewandte Platindraht hatte einen Durchmesser von 0,7$^{mm}$, der Golddraht von 1,1$^{mm}$ und der Silberdraht von 1,4$^{mm}$.

### 1. Entstehung von Strömen durch Temperaturunterschiede.

Wenn schmelzbare Salze zwischen Metallen erhitzt werden, so haben wir drei Perioden zu unterscheiden. In der ersten Periode, welche zunächst nach dem Beginn des Erhitzens eintritt, ist das Salz noch fest, und beide Metalle, sowohl der Tiegel als auch der innere Platindraht stehen mit fester Substanz in Berührung. Die zweite Periode umfasst denjenigen Zeitraum, während dessen das Salz im Schmelzen begriffen ist, also beide Metalle von verschiedenen Aggregatszuständen berührt werden, der Tiegel von flüssiger, und der innere Platindraht von fester Masse. Die dritte Periode endlich beginnt nach Beendigung des Schmelzens; während derselben sind beide Metalle wieder von einerlei Aggregatszustande umgeben. In allen drei Perioden ist unter normalen Umständen der Tiegel heisser als der Draht.

In gleicher Weise haben wir auch beim Erkalten wieder drei Perioden zu betrachten, die gewissermassen das Umgekehrte der drei vorhergehenden sind. In der ersten unmittelbar dem Auslöschen der Lampe folgenden stehen beide Metalle mit Flüssigkeiten in Berührung; in der zweiten, den Zeitraum des Erstarrens umfassenden, ist der Tiegel mit einer festen und der Draht mit einer flüssigen Masse im Contact, während in der letzten dritten Periode wieder beide Metalle von einerlei Aggregatszustande, dem festen, umgeben werden. Unter normalen Umständen ist beim Erkalten der Tiegel kälter als der Draht.

Wir wollen zunächst die elektrischen Vorgänge in der ersten und dritten Periode sowohl beim Erhitzen als auch beim Erkalten, wo also an beiden Metallen gleichartige Aggregatszustände sich finden, betrachten, dagegen die Behandlung der Erscheinungen während der beiden mittleren Perioden dem folgenden Abschnitte überweisen.

Es leuchtet ein, dass in der ersten und dritten Periode sowohl beim Erwärmen als auch beim Erkalten die Ursache der entstehenden elektrischen Ströme allein in den Temperaturunterschieden zu suchen ist; wir werden daher auch im Allgemeinen behaupten können, dass die Intensitäten der Ströme während dieser vier Perioden unter sonst gleichen Verhältnissen, wofern nicht merkwürdige Störungen durch moleculare Vorgänge eintreten, dem Temperaturunterschiede proportional sein werden. Damit soll aber durchaus nicht gesagt sein, dass gleiche Temperaturunterschiede bei festen und bei geschmolzenen Salzmassen gleich starke Ströme erzeugen müssen; die Frage, in welchem Verhältnisse die Intensitäten zweier Ströme stehen, welche durch gleiche Temperaturunterschiede der eine in einer festen, der andere dagegen in einer völlig geschmolzenen Salzmasse hervorgerufen werden, dürfte wegen der erforderlichen Temperaturbestimmungen, wohl noch zu viele Schwierigkeiten haben, als dass man schon jetzt an ihre Beantwortung denken könnte.

Da die Vorgänge beim Erkalten gewissermassen die umgekehrten von den beim Erhitzen eintretenden sind, so werden wir während der einander entsprechenden Perioden des Erhitzens und Erkaltens im Allgemeinen die umgekehrten Richtungen im Laufe der elektrischen Ströme erwarten dürfen. Um nun in dem Folgenden die Richtungen derselben kurz und unzweideutig angeben zu können, soll ein vom Tiegel durch die Salzmasse zum innern Platindrahte gehender Strom ein aufsteigender, dagegen ein gerade entgegengesetzt fliessender ein absteigender genannt werden.

#### *a.* Ströme in der ersten Periode des Erhitzens.

Wenn in dieser Periode, also vor dem Beginn des Schmelzens, ein Strom beobachtet wird, der allein von dem Temperaturunterschiede und nicht etwa von einem Anlegen der Salzmasse an die Tiegelwand herrührt (vgl. den folgenden vierten Abschnitt), so ist derselbe stets aufsteigend. Doch kommen auch bei gewissen Salzen (vgl. den sechsten Abschnitt) Fälle vor, wo wegen eines Mangels an Leitungsfähigkeit während dieser Periode kein Strom beobachtet wird.

Dieser aufsteigende Strom kann mit der Erhöhung der Temperatur auf doppelte Weise an Intensität zunehmen; erstens nämlich durch Wachsen der elektromotorischen Kraft infolge eines vergrösserten Tem-

peraturunterschiedes zwischen dem Tiegel und dem innern Drahte, und zweitens durch eine Verringerung des Leitungswiderstandes in der Salzmasse. Seine Stärke wird also im Allgemeinen mit der Erhöhung der Temperatur bis zum Eintritt des Schmelzens wachsen. Indess zeigt sich in einzelnen Fällen ein etwas abgeänderter Hergang. Bei einem Gemische aus gleichen Aequivalenten von kohlensaurem Kali und kohlensaurem Natron treten noch während des festen Zustandes gewisse moleculare Vorgänge ein, die ich sogleich bei der entsprechenden Periode des Erkaltens näher angeben werde; infolge dieser Molecularänderungen zeigt nun der aufsteigende Strom während des Erhitzens bei diesem Salze nicht eine fortdauernde Zunahme, sondern in einem gewissen Zeitpunkte tritt trotz der regelmässig steigenden Temperatur eine gewisse Abnahme desselben ein (die wohl unter Umständen selbst in einen absteigenden Strom übergehen kann), worauf dann wieder eine neue Zunahme des absteigenden Stromes bis zum Eintritte des Schmelzens folgt.

*b.* Ströme in der dritten Periode des Erkaltens.

In der der vorhergehenden entsprechenden Periode beim Erkalten, d. h. also von der Zeit an, wo das Erstarren vollendet ist, wird im Allgemeinen, vorausgesetzt dass nicht Mangel an Leitungsfähigkeit seine Circulation unmöglich macht, ein entgegengesetzt gerichteter also absteigender Strom beobachtet.

Nur ein Fall findet sich in den spätern Mittheilungen des zweiten Theiles dieser Abhandlung, wo ausnahmsweise bei Anwendung von Platin zu Ende des Erkaltens kein absteigender sondern ein schwacher aufsteigender Strom beobachtet wird; derselbe tritt ein beim salpetersauren Kali (s. d.). Einen bestimmten Grund für diese Abweichung des salpersauren Kalis von dem Verhalten der übrigen Salze weiss ich um so weniger anzugeben, da bei dem salpetersauren Natron der absteigende Strom regelmässig zur Erscheinung kommt. Doch ist es mir nicht unwahrscheinlich, dass jener überhaupt nur schwache aufsteigende Strom beim salpetersauren Kali durch eine Verschiedenheit in dem Platintiegel und Platindrahte hervorgerufen wird. Ersetzt man den innern Platindraht durch einen Silberdraht (vgl. den zweiten Theil), so erscheint in der That zu Ende der Abkühlung ein absteigender Strom.

Beim Erkalten nimmt die Intensität des Stromes mit der Verringerung des Temperaturunterschieds zwischen Tiegel und Draht und mit

der Vergrösserung des Leitungswiderstandes ab. Doch kann durch gewisse moleculare Vorgänge die regelmässige Abnahme gestört werden, wie dies z. B. bei dem zuvor schon genannten Gemische aus kohlensaurem Kali und Natron der Fall ist, wo beim Erkalten der erstarrten Masse analoge Schwankungen (und selbst Umkehrungen) des absteigenden Stromes (vgl. den zweiten Theil) eintreten, wie solche zuvor im aufsteigenden Strome beim Erhitzen beobachtet wurden. Die molecularen Vorgänge, von denen jene Schwankungen und Umkehrungen abhängen, machen sich auch durch das Aussehen der Oberfläche der erstarrten Masse bemerklich. Das genannte Salzgemisch zeigt nämlich unmittelbar nach dem Erstarren einen graulichen, ich möchte sagen, opalartigen Zustand, und wird erst nach einiger Zeit weiss und krystallinisch. Soviel ich nun habe beobachten können, ruft das Uebergehen der bereits festen Masse aus dem einen Zustande in den andern jene oben erwähnten Schwankungen und selbst Umkehrungen hervor. Eine ganz bestimmte Entscheidung hierüber ist zwar wegen der Undurchsichtigkeit der Masse schwierig; indess glaube ich mich in der so eben gemachten Annahme nicht zu irren.

#### c. Ströme in der dritten Periode des Erhitzens und der ersten des Erkaltens.

Für die dritte Periode beim Erhitzen (nach Beendigung des Schmelzens) und die entsprechende erste Periode beim Erkalten (nach dem Auslöschen der Lampe bis zum Beginn des Erstarrens) glaubte Andrews den Satz hinstellen zu können, dass der elektrische Strom beim Erhitzen ein aufsteigender, beim Erkalten dagegen ein absteigender sei. Es scheint indess, als ob diese Regel nicht ganz allgemein richtig wäre. Sie hat sich allerdings bei den meisten der von mir untersuchten Salze bestätigt; eine ganz bestimmte Ausnahme davon bildet jedoch das Doppelsalz aus schwefelsaurem Kupferoxyd und schwefelsaurem Kali. Dies über der Flamme einer Lampe mit doppeltem Luftzuge ohne Anwendung einer Gebläsevorrichtung leicht schmelzbare Salz zeigt in den genannten Perioden beim Erhitzen einen absteigenden, und beim Erkalten einen aufsteigenden Strom. Auch beim salpetersauren Kali und salpetersauren Natron wird in der ersten Periode des Erkaltens ein aufsteigender Strom beobachtet, wie solches in dem zweiten Theile der Abhandlung speciell angeführt werden wird. In den letztern beiden Fällen könnte

man geneigt sein, die beobachtete Abweichung einer in dem Salze eingetretenen Zersetzung zuzuschreiben, während sich beim schwefelsauren Kupferoxydkali kein unmittelbarer Grund angeben lässt.

Aber nicht bloss in denjenigen Zeiten, wo beide Metallflächen mit gleichen Aggregatszuständen der Salzmasse in Berührung stehen, wird der Temperaturunterschied elektromotorisch wirken; er wird, wenn auch in anderer Weise und mit anderer Intensität in gleichem Sinne wirksam sein, während die Salzmasse von aussen nach innen schmilzt, oder in derselben Richtung erstarrt, also in Fällen, wo das Salz an den beiden Metallflächen verschiedene Aggregatszustände besitzt; die hiebei entstehenden Erscheinungen werden im nächsten Abschnitte eine Erörterung finden.

Ich halte es nicht für überflüssig, hier auf gewisse Vorsichtsmaassregeln hinzuweisen, die zur Erzielung eines richtigen Resultates beobachtet werden müssen. Beim Erhitzen wird, wenn die Flamme klein ist und nicht hoch am Tiegel hinaufschlägt, auch selbst wenn der Tiegel nicht in das mit entsprechender Oeffnung versehene Platinblech eingesetzt ist, die Tiegelwand im Allgemeinen heisser sein, als der innere Draht. Dies Verhältniss kann sich aber umkehren, wenn eine sehr grosse Flamme, den Tiegel weit überragend, oben zusammenschlägt. und an den untern Theilen desselben die Verbrennung weniger lebhaft ist. Um daher beim Erhitzen stets der höhern Temperatur des Tiegels gegen den Platindraht sicher zu sein, wird das schirmende Platinblech gute Dienste leisten, wenngleich dasselbe der Erzielung einer hohen Temperatur ungünstig ist, indem bei seiner Anwesenheit Salze nicht mehr bei blosser Flamme der Lampe, oder im offenen Tiegel schmelzen, die nach Entfernung desselben ohne Schwierigkeit in Fluss gerathen.

Nach dem Auslöschen der Flamme soll im normalen Zustande der Tiegel kälter sein, als der innere Draht; ein Verhältniss, das sich indess leicht umkehren kann, wenn der Tiegel offen ist, und der Draht mit seinem Ringe nur flach die an der Oberfläche erstarrte Salzmasse berührt, indem bei der schlechten Wärmeleitung der Salzmasse der Fall eintreten kann, dass der Tiegel infolge der beim Erstarren freiwerdenden Wärme sich heisser erhält, als der innere Draht. Um diese Störungen zu beseitigen, wird man den Draht etwas tiefer in die Masse eintauchen und den Tiegel bedecken müssen. Dass wirklich in der angegebenen Weise Störungen in dem normalen Gange eintreten, zeigt die nicht

schwer zu beobachtende Thatsache, dass bei geeigneten Salzen im offenen Tiegel und bei nur eben die Oberfläche des Salzes berührendem Drahtringe etwas andere Erscheinungen als bei bedecktem Tiegel und tieferer Eintauchung auftreten; und die Schwankungen der Galvanometernadel entsprechen genau der zuvor angegebenen Umkehrung der Temperaturverhältnisse. Auch darf in manchen Versuchen beim Erkalten, namentlich wenn der Drahtring nicht weit unter die Oberfläche taucht, nicht ausser Acht gelassen werden, dass gewisse Salze sich sehr stark zusammenziehen; die Masse sinkt zwischen Tiegelwand und Platinring ein, und es bilden sich tiefe Löcher, welche je nach ihrem Verlaufe ein rascheres Erkaltem des Drahtringes herbeizuführen vermögen.

Da die verschiedenen Stellen des Tiegels nicht dieselbe Temperatur besitzen, wie namentlich bei Anwendung des Platinschirmes aus ihrem verschiedenen Glühen zu entnehmen ist; so wird je nach der Grösse des Temperaturunterschiedes gegen den innern Drahtring die elektromotorische Kraft derselben verschieden sein; die Ablenkung der Galvanometernadel wird also einen gewissen Mittelwerth darstellen. Dasselbe gilt natürlich auch für die verschiedenen Punkte des Platinringes und des von ihm in dem Salze aufsteigenden Drahtes.

### 2. Entstehung von Strömen durch die Berührung verschiedener Aggregatszustände eines und desselben Salzes.

Eine zweite Ursache, welche bei den in Frage stehenden Versuchen zur Erregung elektrischer Ströme Veranlassung werden kann, liegt in dem Schmelzen und Erstarren der Salze, wie dies in den zweiten Perioden beim Erhitzen und beim Erkalten stattfindet; und zwar lehren die beobachteten Thatsachen, dass bei dem Schmelzen des Salzes von aussen nach innen ein absteigender, dagegen umgekehrt beim Erstarren in derselben Richtung ein aufsteigender Strom sich bildet.

Für die Entstehung dieser Ströme lassen sich verschiedene Ursachen als möglich aufstellen.

Man könnte zunächst den Act des Schmelzens und des Erstarrens selbst, also den Uebergang aus einer Aggregatsform in die andere, oder auch die dabei eintretenden Aenderungen in der freien und gebundenen Wärme als erregende Ursache betrachten wollen. Das Erstarren ist das Entgegengesetzte des Schmelzens (ebenso das Freiwerden der Wärme das Entgegengesetzte vom Gebundenwerden), müsste also,

falls beide Vorgänge elektrische Ströme erzeugten, einen in seiner Richtung gerade entgegengesetzten Strom geben, als das Schmelzen (oder Gebundenwerden).

Da nun das Schmelzen und das Erstarren (und ebenso die entgegengesetzten Aenderungen in den Verhältnissen der freien und gebundenen Wärme) in derselben Richtung vom Tiegel nach dem Drahte hin stattfinden, so würden, womit die Thatsachen allerdings übereinstimmen, bei dem einen Vorgange gerade entgegengesetzte Ströme zu erwarten sein, als bei dem andern.

Indess, obschon im Allgemeinen die Thatsachen den angegebenen Ursachen nicht widersprechen, scheint es doch nicht, als ob sie die Hauptquelle der bei dem Schmelzen und Erstarren auftretenden Ströme bilden; wogegen sich aber auch nicht beweisen lässt, dass sie nicht in einem gewissen Grade elektromotorisch zu wirken vermögen. Dass sie nicht die einzige oder die Hauptquelle jener Ströme sind, wird dadurch wahrscheinlich, dass die Intensität derselben mit der Schnelligkeit, mit welcher das Schmelzen (beim Erstarren ist der Versuch schwerer durchzuführen) von aussen nach innen fortschreitet, sich nicht wesentlich zu ändern scheint.

Genauere Messungen sind hier allerdings nicht möglich; man kann indess durch die Art der Erhitzung das Schmelzen mehr oder weniger schnell vorrücken lassen, ohne dass solche Aenderungen einen beträchtlichen Einfluss auf die Stärke des Stromes ausüben.

Es bleibt also als alleinige oder als Hauptquelle der angedeuteten Ströme die Berührung zwar in chemischer Beziehung gleicher, aber in physikalischer Beziehung verschiedener Stoffe, nämlich des flüssigen und des festen Salzes unter sich und mit den Metallen übrig. Sehen wir von den Temperaturunterschieden des Tiegels und Drahtes ganz ab (und es lassen sich ja auch in der That die Umstände so anordnen, dass die flüssige Masse nicht heisser ist, als die feste), so sind drei verschiedene Berührungen 1) zwischen Platin und der flüssigen Salzmasse, 2) zwischen Platin und der festen Salzmasse, und 3) zwischen der flüssigen und festen Salzmasse vorhanden. Ob jede dieser Berührungsstellen eine elektromotorische Kraft erzeugt, in welchem Sinne dieselben wirken, welche unter ihnen die grösste Spannung giebt, diese Fragen will ich hier nicht zu beantworten unternehmen; sie mögen im Verein mit andern analogen den Gegenstand einer spätern Untersuchung ausmachen.

Wollen wir die Berührung der festen und flüssigen Masse vernachlässigen, so würden sich die beobachteten Thatsachen in dem Satze zusammenfassen lassen, dass das in der festen Masse stehende Platin die Rolle eines edlen Metalles gegen das in dem flüssigen Salze befindliche spielt; soll dagegen die Hauptwirkung von der Berührungsstelle zwischen dem festen und flüssigen Theile ausgehen, so würde an dieser Stelle die feste Masse die negative, die flüssige dagegen die positive Elektricität annehmen und zu den Multiplicatordrähten führen. Es ist indess in keiner Weise nothwendig, ja selbst nicht einmal wahrscheinlich, dass alle drei Berührungen in derselben Richtung elektromotorisch wirken.

Dass die so eben genannten Berührungen beim Erhitzen und Erkalten wegen der umgekehrten Anordnung des festen und flüssigen Theiles in dem elektrischen Kreise die umgekehrten Ströme erzeugen müssen, wie die Beobachtungen dies erfordern, bedarf keiner weitern Erörterung.

Wenn für die während des Schmelzens und Erstarrens entstehenden elektrischen Ströme die zuvor genannten Contacte die einzige Quelle sind, so muss ihre Intensität, so lange die genannten Vorgänge dauern, bei gleicher Temperatur der Platinplatten constant bleiben; sollte der Act des Schmelzens und Erstarrens selbst dazu beitragen, so würde dieselbe mit der Geschwindigkeit dieser beiden Vorgänge in entsprechendem Maasse veränderlich sein.

Wenn es nun auch, wie zuvor angedeutet, möglich ist, die aus den Berührungen gleich stark erhitzter Massen von ungleichartigen Aggregatszuständen entstehenden Ströme rein d. h. bei gleichen Temperaturzuständen des Platins und der Salzmasse darzustellen, so werden dieselben doch in den meisten Fällen oder bei den gewöhnlichen Vorgängen sogar immer durch die Temperaturunterschiede der Endglieder eine Aenderung erleiden, und zwar in der Weise, dass die aus jenen Berührungen entstehende elektromotorische Kraft verändert, ja bei grossen Wärmedifferenzen gänzlich unterdrückt wird, sodass dann die Multiplicatornadel einen gerade entgegengesetzten Strom anzeigt.

Der leichtern Darstellung wegen wird es bequem sein, die beim Schmelzen und Erstarren vorhandene elektromotorische Kraft uns in zwei zerlegt zu denken, erstens, in eine aus den Temperaturunterschieden, und zweitens, in eine aus den Berührungen von verschiedenen Aggregatszuständen entspringende. Der Ausschlag, welchen die Magnet-

nadel des Galvanometers darbietet, wird dann bezüglich seiner Richtung und Stärke von der Differenz der Intensitäten jener beiden hier nur ideell geschiedenen elektromotorischen Kräfte abhängen; es kann die erste oder auch die zweite mit einem grössern oder kleinern Betrage überwiegen, es können auch beide sich im Gleichgewichte halten.

Setzen wir der Einfachheit wegen die aus den Berührungen von verschiedenen Aggregatszuständen bei gleichen Temperaturen entspringende elektromotorische Kraft in jedem einzelnen Falle als eine constante Grösse, so wird eine Aenderung in dem Ausschlage der Nadel allein von einer Aenderung des zweiten elektromotorisch wirkenden Umstandes, des Temperaturunterschiedes abhängen.

Die während der beiden mittleren Perioden (sowohl beim Erhitzen als auch beim Erkalten) beobachteten Thatsachen lehren nun in der That, dass je nach den Umständen beim Schmelzen und Erstarren Ablenkungen der Magnetnadel des Galvanometers in der einen oder andern Richtung möglich sind. Die vorhergehenden Erläuterungen geben uns aber unmittelbar das Mittel an, die Richtung dieser Ablenkung beliebig zu verändern. Gesetzt z. B. beim Erhitzen ist der aus einem grossen Temperaturunterschiede hervorgehende aufsteigende Strom sehr stark; dann wird der durch Schmelzen entstehende absteigende Strom die Nadel nicht in seinem Sinne abzulenken, sondern in dem Ausschlage des aufsteigenden Stromes nur eine gewisse Verminderung hervorzurufen im Stande sein. Um den aufsteigenden Strom zu verringern, wird der Unterschied der Temperatur des Tiegels und Drahtes verkleinert werden müssen, was durch langsames Erhitzen erzielt werden kann. Je mehr die Wärmedifferenzen verschwinden, um so mehr wird der aufsteigende Strom geschwächt werden; bei einem gewissen Grade müssen bei geeigneten Salzen beide Ströme sich das Gleichgewicht halten; bei noch geringern Temperaturunterschieden dagegen wird der absteigende Strom überwiegen.

In gleicher Weise kann der durch das Erstarren erregte aufsteigende Strom, falls ihn der absteigende aus den Temperaturunterschieden überwiegen sollte, durch Verlangsamung der Abkühlung sichtbar gemacht werden.

Man wird schon jetzt leicht übersehen, welche grosse Mannichfaltigkeit in der Richtung und der Stärke der elektrischen Ströme sowohl beim Erhitzen und Schmelzen, als auch beim Erkalten und Er-

starren der Salze eintreten kann und auch in den einzelnen Versuchen je nach den Umständen eintreten muss. Eine genaue Beobachtung der Wärmevorgänge wird aber stets das Verständniss der wechselnden Erscheinungen liefern.

### 3. Entstehung von Strömen durch das Ablösen erstarrter Salzmassen vom Tiegel.

Schon seit länger als hundert Jahren ist die Erscheinung bekannt, und im Laufe der Zeit wiederholt untersucht worden *), dass Nichtleiter oder schlechte Leiter, wie Schwefel, Harze, Chocolade u. s. w., wenn sie nach dem Schmelzen in einer Metall- oder Glasform erstarrt sind, nach dem Herausnehmen aus derselben eine starke Elektricität zeigen. Man hat diese Elektricität gewöhnlich blos als Reibungselektricität betrachtet, weil sie nur dann sich zeigt, wenn infolge ungleicher Zusammenziehung beim Erkalten die Masse von dem Gefässe losreisst.

So wahrscheinlich es nun einerseits auch ist, dass die sehr starken Zeichen von Elektricität, welche die aus ihrer Form genommenen Massen bisweilen geben, der Reibung ihre Entstehung verdanken, so lässt sich doch andererseits der strenge Beweis führen, dass bei der Trennung geschmolzener Salze vom Tiegel durch den Act der Ablösung selbst freie Elektricität, ja sogar elektrische Ströme erzeugt werden.

Damit solche Ströme entstehen können, ist erstens erforderlich, dass die Salzmasse sich vom Tiegel ablöse, was am leichtesten bei glasig erstarrenden Massen in vollkommener Weise erfolgt; und zweitens, dass dieselbe, trotz der schon ziemlich gesunkenen Temperatur, doch noch ein genügender Leiter bleibe.

Das Ablösen eines erstarrten Salzes von der Tiegelwand erfolgt, wie man bei einer durchsichtigen Masse deutlich wahrnehmen kann, entweder, wenn die Temperatur schon sehr weit gesunken ist, plötzlich auf allen Punkten, oder auch, wenn sie bei noch etwas höheren Graden durch irgend eine zufällige Ursache an einem Punkte begonnen hat, allmählig innerhalb mehrerer Secunden. Um eine geeignete Salzmasse zu veranlassen, allmählig sich abzulösen, genügte es in vielen Fällen, in der Zeit, wo nach dem Stande der Galvanometernadel zu urtheilen, die Ablösung nahe bevorstand, die eine Seite des Tiegels durch Hin-

*) Vergl. Riess, die Lehre von der Reibungselektricität II. 402.

blasen etwas abzukühlen, wodurch dann an dieser Stelle die Ablösung begann.

Der Strom, welchen das Ablösen erzeugt, ist ein absteigender; seine Dauer entspricht der Dauer des Ablösens; seine Stärke möchte ich, gleiche Leitungswiderstände vorausgesetzt, der Dauer umgekehrt proportional setzen. Löst sich die Masse plötzlich an ihrer ganzen Oberfläche, so wird, wofern das Salz noch leitet, die Nadel des Galvanometers im Sinne eines absteigenden Stromes fortgestossen, in manchen Fällen sogar heftig gegen die Hemmung geworfen; erfolgt die Trennung allmählig, so geht die Nadel langsam vor, bleibt in einer gewissen Ablenkung, so lange diese Ablösung dauert, und kehrt erst nach Vollendung derselben zum Nullpunkte zurück.

Aber nicht bloss mit dem Galvanometer lässt sich die Elektricitätserregung beim Ablösen der erstarrten Salzmasse wahrnehmen; es gelingt dies ebenfalls mit meinem Elektrometer. Wurde der innere Platindraht mit dem Goldblättchen, der Tiegel aber leitend mit der Erde verbunden, so zeigte das Goldblättchen im Augenblicke der Ablösung eine negative Ladung; ward dagegen das Stativ, welches den Tiegel trug, isolirt und mit dem Goldblättchen des Elektrometers verbunden, während der innere Draht zur Erde ging, so zeigte das Goldblättchen bei der Ablösung einen positiven Ausschlag. Beide Ausschläge des Goldblättchens stimmen mit der Richtung des am Galvanometer gemessenen Stromes überein.

### 4. Entstehung von Strömen durch Anlegen der abgelösten Salzmasse an die Tiegelwand.

Aus den unmittelbaren Beobachtungen folgt ferner die Thatsache, dass auch, wenn eine beim Erkalten vom Tiegel abgelöste glasige Salzmasse von Neuem erhitzt wird, beim Anlegen an die Wände des Tiegels unter sonst günstigen Umständen ein Strom entsteht, dessen Richtung ebenfalls wie bei dem vorhergehenden absteigend ist. Seine Intensität erscheint allerdings nicht bedeutend; es kann dies aber seinen Grund in dem beim Beginnen des Erhitzens sehr grossen Leitungswiderstande haben. Der Strom dauert nur so lange, als das Anlegen währt.

Vielleicht haben mit diesem Strome diejenigen momentanen absteigenden Ströme eine gleiche Entstehungsweise, welche sich bilden, wenn eine Luftblase sich in einer zähen Salzmasse von einer Stelle der

Tiegelwand löst und aufsteigt. Es fällt dann ebenfalls plötzlich die geschmolzene Salzmasse an die heissere, durch die Luftblase geschützt gewesene Tiegelwand, gerade wie zuvor nach dem Beginn des Erhitzens die noch kalte oder nur wenig warme Salzmasse sich an die durch eine dünne Luftschicht davon getrennte, und deshalb stark erhitzte Tiegelwand anlegte. Der absteigende Strom beim Aufsteigen einer etwas grössern Luftblase erreicht oft eine solche Stärke, dass er den aus der Temperaturdifferenz entstehenden überwiegt, und die Nadel auf die entgegengesetzte Seite treibt. Dies scheint die obige Annahme, dass der Strom beim Anlegen gleich nach dem Beginn des Erhitzens nur dem grossen Leitungswiderstande seine Schwäche verdanke, zu bestätigen.

Die Richtung des beim Anlegen der Salzmasse entstehenden Stromes ist genau dieselbe, wie die Richtung des beim Ablösen auftretenden, woraus hervorgeht, dass ersterer mit dem letzteren nicht eine und dieselbe Quelle zur Entstehung hat, indem sonst der umgekehrte Vorgang auch den umgekehrten Strom erzeugen müsste.

Wird der Ring des Platindrahtes in die geschmolzene Salzmasse eingetaucht, so entstehen bald aufsteigende bald absteigende Ströme; es scheint indess nicht, als ob hierbei besondere Vorgänge einträten. Die Frage, welcher Ausschlag der Multiplicatornadel entstehen wird, dürfte sich beantworten lassen, wenn man die mehr oder weniger strenge Schmelzbarkeit des Salzes, die Höhe der Temperatur und die Masse des einzutauchenden Drahtes berücksichtigt. Wird die vom Drahte getroffene Masse zum Erstarren gebracht, so entsteht momentan ein absteigender Strom (eine Folge der Berührung verschiedener Aggregatszustände), der aber sofort, indem die dünne erstarrte Schicht augenblicklich schmilzt, einem aufsteigenden Strome (falls ein solcher gefordert wird) weicht.

Ich will bei dieser Gelegenheit auf einen Vorgang aufmerksam machen, der beim Schmelzen eines Salzes leicht zu einem Irrthume verleiten kann. Wenn die Salzmasse am Rande geschmolzen ist, so trifft es sich, dass die Steifigkeit des Platindrahtes nicht hinreicht, um die noch feste Salzmasse in der Mitte des Tiegels zu halten; letztere wird dann durch Capillarwirkungen gegen die eine Seite des Tiegels gezogen. Ist nun zuvor infolge des Schmelzens ein absteigender Strom eingetreten, so wird derselbe beim Anlegen der festen Masse an die eine Seite des Tiegels sofort durch einen aufsteigenden verdrängt werden.

Dieser Vorgang kann sich mehrere Male auf den verschiedenen Seiten des Tiegels wiederholen, indem die Elasticität des Platindrahtes die feste Salzmasse, wenn sie auf der ersten Seite etwas abgeschmolzen ist, zurückzieht; worauf dieselbe dann durch Capillarwirkung nach einer andern Seite sich hinneigt.

Ebenso können Störungen in dem normalen Gange erfolgen, wenn die Salzmasse theilweise geschmolzen ist und ein Stück fester Salzmasse von dem Drahte sich löst und auf den Boden fällt.

### 5. Eigenthümlicher aufsteigender Strom zu Ende der Abkühlung.

Bei einigen Salzen, dem kohlensauren Natron und dem phosphorsauren Natron zeigt sich zu Ende des Erkaltens ein eigenthümlicher schwacher aufsteigender Strom. Nach dem Auslöschen der Flamme entsteht, um die Vorgänge genau zu bezeichnen, erst ein absteigender, dann während des Erstarrens ein aufsteigender und nach Beendigung desselben wieder ein absteigender Strom. Nachdem letzterer ziemlich lange bestanden, nimmt er anfangs langsam, dann schneller ab und geht zuletzt nochmals in einen aufsteigenden über. Der Grund dieses eigenthümlichen Stromes scheint folgender zu sein.

Wenn Wasser oder in Wasser gelöste Salze durch einen mittelst Platinplatten in dieselben geleiteten Strom zersetzt worden, so entsteht bekanntlich eine Ladung oder Polarisation der Platten; gerade eben solche Polarisation entsteht nun bei den Strömen zwischen erhitzten Metallen und Salzen, wie ich mich durch specielle Versuche, indem ich den Strom eines einzigen Zinkkohlenelements bald in der Richtung vom Tiegel durch das Salz zum Drahte, bald in entgegengesetzter leitete, überzeugt habe. Der aus der Polarisation hervorgehende Strom dauert oft sehr lange, selbst wenn der eigene Strom der erhitzten Metalle und Salze eine entgegengesetzte Richtung hat.

Meines Erachtens nach ist nun jener oben erwähnte zu Ende der Abkühlung eintretende aufsteigende Strom nichts Anderes, als der nach Aufhören eines starken absteigenden Stromes eintretende Polarisationsstrom, der jedes Mal eintreten wird, sobald bei schneller Abnahme des absteigenden Stromes das Salz noch hinreichend leitet.

### 6. Einfluss des Leitungswiderstandes auf die elektrischen Ströme bei geschmolzenen Salzen.

Es kann in diesem Abschnitte selbstverständlich nicht etwa meine Absicht sein, das bekannte Ohm'sche Gesetz über die Abhängigkeit der Stromstärke vom Leitungswiderstande zu erläutern; der Inhalt desselben soll vielmehr darin bestehen, nachzuweisen, wie der Leitungswiderstand scheinbar von dem gewöhnlichen Gange abweichende Resultate hervorzurufen vermag.

Der Einfachheit wegen wollen wir annehmen (wie es sich in der That bei den meisten Salzen findet), dass beim Erhitzen des Salzes zuerst infolge des blossen Temperaturunterschiedes ein aufsteigender, dann beim Beginn des Schmelzens infolge der Berührung verschiedener Aggregatszustände ein absteigender, und zuletzt nach Vollendung des Schmelzens wieder ein aufsteigender Strom entstehe; und dass entsprechend beim Erkalten zuerst ein absteigender, dann beim Erstarren ein aufsteigender und zuletzt nach Vollendung des Erstarrens wieder ein absteigender Strom sichtbar werde. In solchem Falle ist es nun möglich, dass durch Mangel an Leitungsfähigkeit der erste aufsteigende Strom beim Erhitzen und der letzte absteigende beim Erkalten ausfällt.

Der Temperaturgrad, bei welchem die verschiedenen Salze den elektrischen Strom merklich zu leiten beginnen, ist sehr verschieden; bei manchen liegt er sehr hoch. Wenn daher eines dieser letztern Salze im Platintiegel stark erkaltet ist, und von Neuem erhitzt wird, so kann die Masse am Tiegel schon sehr stark erhitzt sein, und dennoch haben bei der schlechten Wärmeleitung die den Platinring umgebenden Salztheilchen noch keine hinreichend hohe Temperatur, um den aus der Temperaturdifferenz entstehenden elektrischen Strom merklich zu leiten; die Stromleitung tritt für die innern Theile erst in genügender Weise ein, wenn die am Tiegel anliegenden bereits in Fluss gerathen sind; so dass dann der erste Strom, welcher nach dem Erhitzen sichtbar wird, nicht ein aufsteigender, sondern infolge des Schmelzens ein absteigender ist. Ja es kommen Fälle vor, wo der Leitungswiderstand erst dann hinreichend gering wird, wenn die Masse am Drahte ebenfalls dem Schmelzen nahe ist, so dass z. B. folgende Vorgänge beobachtet werden. Die Nadel des Galvanometers bleibt nach dem Anzünden der Lampe ruhig auf dem Nullpunkte, selbst als die Masse an den Tiegelwänden schmilzt, ja sogar

noch, als dies Schmelzen ein Drittheil oder selbst die Hälfte zum Drahte hin bereits vorgeschritten ist. Jetzt erst beginnt die Nadel einige Grade im Sinne eines absteigenden Stromes (infolge des Schmelzens) vorzugehen; die Ablenkung steigert sich auch in der nächsten Zeit beim vorrückenden Schmelzen nur wenig, bis das Schmelzen fast den Draht erreicht hat; in diesem Augenblicke fährt wegen der verbesserten Leitungsfähigkeit die Nadel in der Richtung eines absteigenden Stromes gegen die Hemmung; unterdess ist aber der letzte Rest des Salzes am Drahtringe geschmolzen, die Nadel kann also nicht auf der Seite, wohin sie gegangen, bleiben, sondern wird infolge des aus der Temperaturdifferenz entstehenden aufsteigenden Stromes auf die andere Seite geworfen, um dort bis zum beginnenden Erkalten zu verweilen.

Man wird nun ohne Schwierigkeit übersehen, in welcher Weise in solchen Fällen wie der vorhergehende der letzte absteigende Strom beim Erkalten ebenfalls nicht zur Erscheinung kommen kann. Wenn die Masse zu erstarren beginnt, so zeigt die Nadel einen aufsteigenden Strom an; während das Erstarren aber nach innen zu fortschreitet, erkalten die äussern Schichten am Tiegel immer mehr, ihre Leitungsfähigkeit nimmt stark ab, der aufsteigende Strom wird immer schwächer und schwächer; noch ehe das Innere erstarrt, hören die äussern Schichten auf zu leiten, die Nadel des Galvanometers kehrt auf Null zurück, und es folgt kein aus der blossen Temperaturdifferenz entstehender Strom.

Auch auf die Stärke des beim Ablösen erstarrender Salze entstehenden Stromes muss natürlich die mit dem Sinken der Temperatur abnehmende Leitungsfähigkeit von grossem Einflusse sein. Je tiefer die Temperatur bis zum Augenblicke des Ablösens bereits gesunken ist, um so schwächer wird der Ausschlag im Galvanometer erscheinen; ja es kann bei sehr weit vorgeschrittener Erkaltung bisweilen selbst der Fall eintreten, dass trotz des unter solchen Umständen heftigen Losreissens der Salzmasse an ihrer gesammten Oberfläche dennoch die Nadel, die zuvor auf Null gekommen, fast ruhig daselbst stehen bleibt; der Grund des Ausbleibens eines Ausschlags liegt allein in dem Mangel der Leitungsfähigkeit. In den Fällen, wo das Ablösen mit Ablenkung der Nadel erfolgt, existirt in der Salzmasse noch Leitung, wovon ich mich durch Hindurchleiten des Stroms eines Elementes aus Zink, Kupfer und Wasser überzeugt habe.

Ebenso kann endlich Mangel an Leitungsfähigkeit auch den aus

dem Anlegen einer abgelösten Salzmasse entstehenden Strom unmöglich machen. Welches Verfahren man anzuwenden hat, um diesen Einfluss zu beseitigen, bedarf keiner weitern Erläuterung.

### 7. Einfluss der Schmelzbarkeit und des Flüssigkeitszustandes auf die elektrischen Ströme.

Ist ein Salz sehr leicht schmelzbar, so wird, besonders wenn seine Leitungsfähigkeit erst bei höhern Temperaturen einen merklichen Werth erhält, der beim Beginn des Erhitzens aus der Temperaturdifferenz entstehende Strom aus dem im vorhergehenden Abschnitte erläuterten Grunde ausfallen.

Wenn ein Salz bei hoher Temperatur sehr dünnflüssig ist, so wird sich infolge der Beweglichkeit seiner Theilchen die Temperatur in der ganzen Masse leichter als bei zähflüssigen Substanzen ausgleichen, und die Temperaturdifferenz zwischen dem Tiegel und dem innern Drahte geringer werden. Man bemerkt daher bei solchen Salzen, dass unmittelbar nach Beendigung des Schmelzens der aufsteigende Strom infolge eines noch vorhandenen bedeutenden Unterschiedes in den Wärmegraden stark auftritt, dann aber allmählig auf einen geringern Werth herabsinkt.

Ein zähflüssiger Zustand wie beim borsauren Natron scheint den absteigenden Strom beim Schmelzen während des Erhitzens, und den aufsteigenden Strom beim Erstarren während des Erkaltens nicht hervortreten zu lassen. Liegt der Grund etwa darin, dass die Masse glasig, amorph ist und hierin der Flüssigkeit gleicht, sodass gewissermassen keine hinreichend verschiedenen Aggregatszustände berührt werden? Ist etwa zum Entstehen der beiden genannten Ströme Bildung oder Vernichtung von Krystallen erforderlich?

### 8. Ueber die Stärke der Ströme.

Die Stärke der fraglichen Ströme hängt gar sehr von der Grösse des Temperaturunterschiedes zwischen dem Tiegel und Drahtringe, sowie der Berührung verschiedener Aggregatszustände, und dem Leitungswiderstande ab. Bei der Veränderlichkeit dieser Elemente kann daher von einer Stromstärke im Allgemeinen keine Rede sein; weshalb ich mich hier begnüge Grenzwerthe anzugeben, die nicht überschritten

werden. Die Schwankungen in der Stromstärke gestatten keine Bestimmung der Grösse der elektromotorischen Kraft und des Widerstandes nach dem bei constanten Ketten üblichen Verfahren. Die elektromotorischen Kräfte liessen sich allerdings durch das von mir construirte Elektrometer bestimmen; indess würde hierbei die Elektricität der Flamme ein Hinderniss sein (das übrigens, wenn es durchaus erfordert würde, beseitigt werden könnte). Will man sich des Galvanometers bedienen, so bleibt nur der schon von Andrews (S. 258.) eingeschlagene Weg übrig, eine bekannte hydroelektrische Kette mit entgegengesetzt gerichtetem Strome in den Kreis einzuschalten.

Nach solchen Versuchen übersteigt die elektromotorische Kraft der aus den Temperaturdifferenzen und den Berührungen verschiedener Aggregatszustände entstehenden Ströme nicht die eines Elementes aus Zink, Kupfer und Wasser. Dasselbe gilt auch für den aus dem Anlegen einer abgelösten glasartigen Masse entstehenden Strom. Anders verhält es sich dagegen mit dem beim Ablösen einer solchen Masse erzeugten; dieser überwindet nicht nur die Kraft eines, sondern selbst zweier solcher Elemente.

## II. Specielle Angaben über die Ströme zwischen Metallen und erhitzten Salzen.

Die nachstehenden Angaben bezwecken einestheils die bei jedem einzelnen der von mir untersuchten Salze beobachteten Erscheinungen kennen zu lehren, sind aber anderntheils als Belege für die im Vorhergehenden ausgesprochenen allgemeinen Sätze unumgänglich nöthig. Die frühern Erläuterungen über die Vorgänge im Allgemeinen, sowie über die Störungen und Abweichungen vom gewöhnlichen Gange überheben mich jetzt der Mühe, in jedem einzelnen Falle die Erklärung beizufügen; dieselbe ergibt sich aus den vorhergehenden Abschnitten von selbst. Nur hier und da werden einige ausführlichere Details besonders in Betreff des Verfahrens erfordert werden.

Bei den folgenden Mittheilungen setze ich stets voraus, dass das Salz zuvor geschmolzen, der Drahtring auf gewünschte Tiefe eingetaucht und dann die Masse erkalten gelassen ist.

## I. Chlormetalle.

### a. Chlornatrium.

Das Chlornatrium schmilzt im offenen Tiegel über der blossen Flamme der Lampe zu schwer; um die Schmelzung zu beschleunigen, muss man entweder den Tiegel bedecken, was freilich die Beobachtung der Vorgänge im Innern des Tiegels unmöglich macht, oder die Gebläsevorrichtung zu Hülfe nehmen. Wird unter dem zur Hälfte mit reinem Chlornatrium gefüllten offenen Tiegel die Lampe angezündet (Grösse der Flamme $^1/_1$), und ohne Anwendung des Gebläses erhitzt, so zeigt die Nadel des Galvanometers einige Zeit nach dem Beginn des Erhitzens einen aufsteigenden Strom an, dessen Stärke allmählig wächst, und, wenn die Hitze nicht hinreicht, um das an den Tiegelwänden anliegende Salz zu schmelzen, zuletzt ein Maximum erreicht. Wird die Flamme ausgelöscht, so schlägt die Nadel sogleich nach der entgegengesetzten Seite hinüber, und zeigt also einen vom Drahte durch die Salzmasse zum Tiegel gerichteten, also absteigenden Strom an.

Viel verwickelter gestalten sich aber die elektrischen Vorgänge, wenn das Chlornatrium allmählig noch höher bis zum völligen Schmelzen erhitzt wird.

Um von einem bestimmten Falle auszugehen, wollen wir annehmen, dass der Tiegel gerade wie zuvor mit der blossen Flamme der Lampe erhitzt worden ist, und infolge dessen die Nadel des Galvanometers eine ziemlich constante Ablenkung von 50 bis 60° im Sinne eines aufsteigenden Stromes angenommen hat. Wird dann die Flamme vergrössert und das Gebläse in Thätigkeit gesetzt, so geht die Nadel in der eben angegebenen Richtung noch weiter vorwärts, legt sich gegen die Hemmung und verweilt dort einige Zeit, bis das Salz an den Wänden des Tiegels zu schmelzen beginnt.

Sobald dieser letztere Vorgang eintritt, zeigt das Galvanometer entweder einen verringerten aufsteigenden oder gar einen absteigenden Strom an; und dieser Zustand besteht unter kleinen Schwankungen fort, während das Schmelzen vom Tiegel aus sich immer weiter in die Masse hinein verbreitet, bis dasselbe den innern Platindraht erreicht, worauf sofort die Nadel im Sinne eines aufsteigenden Stromes sich in Bewegung setzt, bis zur diesseitigen Hemmung vorwärts geht, und gegen dieselbe angelehnt bleibt, so lange das Erhitzen fortgesetzt wird.

Steht der Ring am untern Ende des Platindrahtes etwas tief in der Salzmasse nahe am Boden des Tiegels, so wird derselbe schon in flüssiger Masse sich befinden können, wenn eben erst das Salz an der Oberfläche zu schmelzen anfängt; wird hierauf nicht geachtet, so sind starke Irrungen möglich, indem man beim Schmelzen einen aufsteigenden Strom wahrzunehmen glaubt, während das Eintreten dieses aufsteigenden Stroms nur anzeigt, dass die Masse unterhalb der Oberfläche in der Umgebung des Drahtringes bereits vollkommen geschmolzen ist.

Nach dem Auslöschen der Flamme werden sich nun die Erscheinungen je nach den Umständen sehr verschieden gestalten. Ist die Salzmasse sehr weit über ihren Schmelzpunkt erhitzt, so hat die Nadel trotz ihrer grossen Schwingungsdauer Zeit bis zur Hemmung im Sinne eines absteigenden Stroms hinüber zu gehen, bevor das Erstarren beginnt. Sobald aber letzteres eintritt, zeigt die Nadel wieder einen mehr oder weniger starken aufsteigenden Strom, der zuletzt wieder einem absteigenden weicht.

Ist das Chlornatrium nicht weit über seinen Schmelzpunkt erhitzt, so beginnt die Nadel nach dem Auslöschen allerdings auch rückwärts zu gehen (Zeichen eines absteigenden Stromes), hat aber den Nullpunkt noch nicht erreicht, wenn das Erstarren am Tiegel eintritt. Die Nadel geht dann (ohne auf die andere Seite gelangt zu sein) sogleich im Sinne eines aufsteigenden Stromes wieder vorwärts bis zur Hemmung, und wendet sich erst nach Vollendung des Erstarrens auf die andere Seite. Die Nadel zeigt also in diesem Falle anstatt des ersten absteigenden Stromes beim Erkalten nur einen Rückgang auf der Seite, wo sie sich vom Ende des Erhitzens her infolge eines aufsteigenden Stromes noch befand.

Will man in solchem Falle den absteigenden Strom sichtbar machen, so öffnet man zu Ende des Erhitzens die Kette, lässt die Nadel auf den Nullpunkt sich ruhig einstellen, und schliesst erst unmittelbar nach dem Auslöschen wieder; der erste Stoss setzt dann die Nadel im Sinne eines absteigenden Stromes in Bewegung.

Die Stärke des beim Erstarren eintretenden aufsteigenden Stromes kann je nach den Umständen sehr variiren, ja es hält selbst nicht schwer anstatt eines aufsteigenden Stromes nur ein Minimum in dem absteigenden zu beobachten. Ich will als Beispiel nicht das reine Chlornatrium, sondern ein etwas leichter flüssiges Gemenge aus ungefähr gleichen

Theilen Chlornatrium und Chlorkalium wählen. Als nach dem Schmelzen dieses Salzgemenges die Flamme ausgelöscht wurde, schwang die Nadel im Sinne eines absteigenden Stromes sogleich bis zur Hemmung, kehrte aber beim Eintreten des Erstarrens zum Theil zurück, zeigte also eine Schwächung des Stromes an, und ging dann nach einiger Zeit (nach Vollendung des Erstarrens) wieder gegen die Hemmung vor.

Falls der aufsteigende Strom beim Erstarren schwach ist, kann man denselben auch auf die Weise beobachten, dass man ihn zu einem schon vorhandenen aufsteigenden Strome hinzutreten lässt, wie folgender Versuch zeigt.

Nachdem die Masse durch das Gebläse einige Zeit im vollen Flusse gehalten worden war, und die Nadel an der Hemmung (aufsteigender Strom) lag, ward das Gebläse nicht weiter angewandt und die Flamme so weit verkleinert (Grösse $^3/_4$), dass ihre leuchtenden Spitzen den Boden des Tiegels erreichten. Die Nadel blieb dabei noch kurze Zeit an der Hemmung, ging aber dann langsam zurück, bis an der Oberfläche die Erstarrung der geschmolzenen Masse sichtbar wurde (in welchem Zeitpunkte noch ein Ausschlag [aufsteigender Strom] von 50 bis 60° vorhanden war), dann aber wieder um ungefähr 10° weiter (aufsteigender Strom) vor, und darauf später wieder zurück bis 30° (aufsteigender Strom). Wurde die Flamme ausgelöscht, so schlug die Nadel zur andern Seite (absteigender Strom) hinüber bis zur Hemmung u. s. f.

Hat der nach dem Erstarren eingetretene absteigende Strom eine Zeit lang gedauert, so hört man ein Knistern im Tiegel, wobei sich die Masse theilweise oder ganz (die Undurchsichtigkeit verhindert das Beobachten) ablöst, und zugleich zeigt die Nadel eine plötzliche Ablenkung im Sinne eines absteigenden Stromes. Selbst bei nur 3600 Windungen des mit Spiegelvorrichtung versehenen Multiplicators ward noch ein Ausschlag von $50^{mm}$ (Abstand der Skale vom Spiegel gegen $1200^{mm}$) beobachtet, obschon der Strom ausser jenen Windungen noch die 16000 Fuss des andern Multiplicators durchlaufen musste.

### *b.* Chlorkalium.

Das zu den Versuchen angewandte Chlorkalium war theils durch Glühen des chlorsauren Kalis (das zu ähnlichen später zu erwähnenden Versuchen gedient hatte) bereitet, theils aus einer chemischen Fabrik bezogen worden.

Wird das Chlorkalium mit der blossen Flamme ohne Anwendung eines Gebläses nur so weit erhitzt, dass es nicht zum Schmelzen kommt, so entsteht ein aufsteigender Strom; es bedarf aber erst ziemlich langer Erhitzung, ehe er sich zeigt, und gewöhnlich rückt die Nadel anfangs nur sehr langsam vor, während sie später schneller geht. Nach dem Auslöschen der Flamme zeigt die Nadel sofort einen absteigenden Strom an.

Unter Anwendung des Gebläses entstand beim Beginn des Erhitzens ein aufsteigender Strom, der nach und nach an Stärke zunahm, aber in einen absteigenden Strom überging, als das Schmelzen begann. Erst als Alles geschmolzen war, zeigte die Nadel wieder einen aufsteigenden Strom, der bald ein Maximum erreichte und dann infolge der Dünnflüssigkeit der Masse, wodurch sich die Temperatur des Tiegels und Drahtes mehr ausglich (S. 278), ein wenig abnahm.

Nach dem Auslöschen der Flamme wich die Nadel etwas zurück und zeigte dann während des Erstarrens entweder unausgesetzt einen schwachen aufsteigenden Strom, oder ging auch, wenn sie noch nicht auf die entgegengesetzte Seite gelangt war, nochmals im Sinne eines aufsteigenden Stromes vorwärts, und begab sich dann erst später, aber auch nicht sehr weit auf die andere Seite (absteigender Strom).

### c. Chlorcalcium.

Beim Erhitzen wird bei diesem Salze bald nach dem Anzünden der Lampe ein absteigender Strom beobachtet, der nach einiger Zeit einem aufsteigenden Strome weicht. Stellt man den Versuch in einem offenen Tiegel an, der durch die blosse Flamme (Grösse $1/1$) ohne Gebläse erhitzt wird, so sieht man den absteigenden Strom lange bestehen, ehe von einer Schmelzung etwas sichtbar ist, ja selbst der dann folgende aufsteigende Strom tritt schon ein, wenn die Masse noch fest und grau erscheint. Bei dem bald darauf unter Anwendung des Gebläses erfolgenden Schmelzen bleibt die Nadel, wenn auch unter einigen Schwankungen in der Richtung eines aufsteigenden Stromes abgelenkt.

Trotz dieser scheinbaren Abweichungen von dem Verhalten der beiden vorhergehenden Salze glaube ich doch nicht, dass wir es hier mit einem Salze zu thun haben, welches in seiner Berührung mit Platin und beim Schmelzen theilweise entgegengesetzte Eigenschaften besitzt, als die vorhergehenden Chlormetalle; nach meiner Ansicht ist der zuerst

wahrzunehmende absteigende Strom der dem Schmelzen entsprechende, und der sonst gleich zu Anfang des Erhitzens wahrnehmbare aufsteigende Strom *) wird durch jenen absteigenden unterdrückt, was wohl aus dem eigenthümlichen grauen Zustande, den die Masse annimmt, und den man für eine feste mit flüssigen Theilchen durchzogene Masse halten möchte, erklärbar wäre. Dafür, dass die Unterschiede der Temperatur und des Aggregatszustandes dieselben Ströme, wie oben angegeben, veranlassen, sprechen 1) der nach dem Schmelzen während des Erhitzens bleibende aufsteigende Strom und 2) vor Allem die Vorgänge beim Erkalten. Nach dem Auslöschen der Flamme nämlich zeigt die Nadel erst einen starken absteigenden Strom; diesem folgt ein beim ersten Auftreten starker aufsteigender Strom, dessen Intensität aber, wohl infolge der eigenthümlichen Art und Weise des Erstarrens, bald gering wird; zu Ende der Abkühlung erscheint dann noch auf kurze Zeit ein ebenfalls nur schwacher absteigender Strom.

### 2. Jodmetalle.

#### Jodkalium.

Die Nadel zeigt bisweilen zuerst einen aufsteigenden Strom, der aber keine beträchtliche Stärke erreicht, und, sobald das Schmelzen begonnen hat, in einen absteigenden übergeht; sehr oft ist es indess durchaus nicht möglich, jenen ersten aufsteigenden Strom wahrzunehmen, indem infolge der leichten Schmelzbarkeit, sobald Leitung vorhanden ist, sofort der absteigende Strom eintritt. Wenn um den Draht herum Alles geschmolzen ist, wird wieder ein aufsteigender Strom am Galvanometer wahrgenommen.

Nach dem Auslöschen der Flamme, die zum Schmelzen des Salzes nicht gross zu sein braucht, zeigt die Nadel zuerst einen absteigenden Strom, der aber während des Erstarrens einem aufsteigenden Strome weicht; zuletzt erscheint wieder ein absteigender Strom. Der gleich beim Auslöschen erscheinende absteigende Strom ist stark, dagegen besitzen der dann folgende aufsteigende und der letzte absteigende nur eine geringe Intensität.

Bei Anwendung des Golddrahtes anstatt des Platindrahtes erhielt

*) Ist nicht eine besondere Störung eingetreten, so hat sich dieser Strom auch ein Mal gezeigt.

ich im Allgemeinen dieselben Erscheinungen, wie sie oben angegeben wurden, nur ward der aufsteigende Strom in der dritten Periode des Erhitzens nicht beobachtet; es bestand vielmehr nach dem anscheinend beendigten Schmelzen der absteigende Strom fort. Es ist indess möglich, dass das Fehlen dieses Stromes darin seinen Grund hat, dass die Masse an dem ziemlich dicken Golddrahte so weit abgekühlt wurde, dass sie denselben noch mit einer sehr dünnen festen Kruste umgab; eine bedeutende Temperaturerhöhung, um dies zu vermeiden, würde aber durch das Schmelzen des Goldes für den Platintiegel verderblich geworden sein.

### 3. Borsaure Salze.

Borsaures Natron.

Wird nach vorhergegangenem Erkalten der mit diesem Salze gefüllte Tiegel von Neuem erhitzt, so zeigt sich anfangs ein aufsteigender Strom, der aber nicht stetig wächst, sondern je nach den Umständen eine Zeit lang stationär bleibt, oder auch eine Abnahme und selbst kurzen Uebergang in den entgegengesetzten darbietet. Jenes Stehenbleiben oder Zurückschwanken weist auf einen absteigenden Strom hin, der in diesen Fällen von dem aufsteigenden Strome überwogen wurde. Eine genaue Untersuchung zeigt, dass das Auftreten dieses absteigenden Stromes mit dem oben S. 272 als Anlegen bezeichneten Vorgange zusammenhängt. Wenn nämlich der geschmolzene Borax bis auf einen gewissen Grad erkaltet ist, so löst er sich entweder plötzlich oder auch allmählig von der Tiegelwand los; erfolgt die Ablösung plötzlich, so ist sie mit einem lauten Knacken verbunden, das bei ruckweiser Ablösung sich mehrere Male wiederholt, bei allmähliger aber gänzlich fehlt; das Vorschreiten kann man sehr gut durch den Lichtreflex an der äussern Oberfläche der Boraxmasse erkennen. Wird nun eine solche Masse von Neuem erhitzt, so legt sie sich allmählig wieder an die Tiegelwand an; mit dem Beginn des Anlegens tritt der zuvor genannte absteigende Strom ein und verschwindet wieder mit dem Aufhören desselben. Man erhält diesen Strom am leichtesten, wenn man die Lampe gleich nach dem Ablösen der Boraxmasse von den Wänden des Tiegels beim Erkalten, noch ehe die Masse Quersprünge erhält oder sich von dem Drahtringe löst, wieder anzündet, und der Flamme die Höhe des Schornsteins gibt. Das Anlegen der noch heissen Masse an den Tiegel tritt dann sehr

bald ein, und damit, wie schon angedeutet, der absteigende Strom, dem jetzt nur ein schwacher aufsteigender aus der Temperaturdifferenz entgegenwirkt, indem der innere Draht von der vorhergehenden Erhitzung noch eine ziemlich hohe Temperatur besitzt. Ist das Anlegen vollendet, so zeigt die Nadel sofort und unausgesetzt einen aufsteigenden Strom, wie ihn die Temperaturdifferenz fordert.

Ob durch das Schmelzen und Erweichen der Masse ebenfalls, wie bei den obigen Chlorverbindungen ein absteigender Strom entsteht, der aber durch den aus der Temperaturdifferenz entstehenden aufsteigenden Strom unterdrückt wird, (vgl. S. 278) will ich dahin gestellt sein lassen; es kommen allerdings Rückgänge der Nadel vor, die hierin ihren Grund haben können; bei der Durchsichtigkeit und dem allmähligen Erweichen der Masse lässt sich aber der Fortgang des Schmelzens oder Erweichens nicht erkennen, weshalb jede Aufstellung einer Beziehung desselben zu den Ausschlägen gewagt erscheint.

Dazu kommt noch, dass eben infolge des ziemlich zähen, dickflüssigen Zustandes der erhitzten Masse je nach der Vertheilung der Temperatur nicht bloss in der Grösse, sondern auch selbst in der Richtung verschiedene Ausschläge der Galvanometernadel erhalten werden können. Sind die Umstände günstig gewählt, so gelingt es durch abwechselnde Vergrösserung und Verkleinerung der Flamme die Nadel des Galvanometers beliebig auf die eine oder andere Seite zu treiben und dort fest zu halten (Vgl. S. 267).

Einzelne plötzliche Uebergänge des aufsteigenden Stromes in einen absteigenden Strom haben noch einen andern Grund, der oben S. 274 schon erläutert ist. Wenn die geschmolzene Boraxmasse erkaltet, so löst sie sich, wie bereits erwähnt, vom Tiegel ab; einige Zeit darauf zerspringt und zerreisst dieselbe mehrfach und löst sich auch theilweise von dem Drahtringe. In die Spalten und Risse dringt nun Luft, die beim nachherigen Erweichen infolge einer neuen Erhitzung in die zähe Masse eingeschlossen wird. Diese Luftblasen liegen dann längere Zeit still, bis die Masse hinreichend flüssig ist, um ihnen das Aufsteigen zu gestatten. Befindet sich eine solche Blase an der Tiegelwand, und steigt plötzlich auf, so wirkt dem vorhandenen aufsteigenden Strome in dem Augenblicke, wo die Blase ihren Ort verlässt, ein absteigender Strom entgegen, der die Nadel für einen Augenblick auf die entgegengesetzte Seite treibt.

Wird die Flamme ausgelöscht, so zeigt das Galvanometer einen absteigenden Strom an, der die Nadel bis zur Hemmung ablenkt; seine Intensität nimmt aber mit dem Erkalten rasch ab, die Nadel nähert sich dem Nullpunkte und erreicht ihn auch in manchen Fällen. Sobald nun aber die Temperatur so weit gesunken ist, dass die Salzmasse sich vom Tiegel ablöst, entsteht plötzlich wieder ein absteigender Strom; die Nadel kehrt also wieder nach der Seite hin zurück, von woher sie gekommen war. Die Intensität und Dauer dieses Stromes, die beide zu einander in umgekehrten Verhältnissen zu stehen scheinen, hängen, wie oben S. 272 erörtert, von der Art und Weise ab, wie sich die erstarrte Masse vom Tiegel löst. Der ganze Vorgang hat auf mich den Eindruck gemacht, als ob es sich dabei um den Verbrauch eines bestimmten Quantums elektromotorisch wirkender Kraft handelt, dessen Grösse im geraden Verhältnisse zu der sich ablösenden Fläche steht.

Ob nach dem Ablösen noch ein schwacher absteigender Strom sichtbar wird, wie dies sehr häufig der Fall ist, oder ob kein solcher mit Sicherheit mehr wahrgenommen werden kann, hängt von der Art des Ablösens und den stattfindenden Temperaturverhältnissen ab. Ich bemerke nur, dass der Boraxmasse unmittelbar nach dem Ablösen, wie ich sogleich durch specielle Versuche nachweisen werde, die Leitungsfähigkeit gewöhnlich nicht fehlt, wenn dieselbe auch nur schwach ist, und dass in den noch vorhandenen Temperaturunterschieden eine elektromotorische Kraft gegeben ist.

Die beim Ablösen der Boraxmasse von den Wänden des Tiegels entstehende Elektricität lässt sich leicht durch mein Elektrometer wahrnehmen. Bei einem nach dem S. 273 angegebenen Verfahren angestellten Versuche beobachtete ich im Augenblicke der Ablösung eine Bewegung des Goldblättchens bis zu 0,4 Skalentheilen im Sinne einer Ladung mit negativer Elektricität, als der Platindraht mit dem Goldblättchen in Verbindung stand; als umgekehrt der Tiegel (das Stativ war durch einige untergelegte Siegellackstücke nothdürftig isolirt) mit dem Drahte des Goldblättchens verbunden war, erschienen Ausschläge im Sinne einer positiven Ladung bis zu 0,3 Skalentheilen.

Die Empfindlichkeit des Elektrometers war so gross, dass durch die abwechselnde Berührung des Drahtes, welcher das Goldblättchen trägt, mit einem Elemente aus Zink und Platin, dessen Enden mit feuchtem Papier umwunden waren, ein Ausschlag von 1,1 Skalentheilen entstand.

Zum Schluss will ich noch einige Versuche über die Grösse der elektromotorischen Kraft, worauf schon oben S. 279 Bezug genommen wurde, mittheilen.

Es wurde ein kleines Element aus schmalen Zink- und Kupferblechen, die in einem mit Brunnenwasser gefüllten Gefässe schon lange Zeit gestanden hatten, in den Kreis mit eingeschlossen, und zwar zuerst in der Weise, dass der Strom des Elementes, falls Leitung vorhanden, vom Tiegel durch die Boraxmasse zum innern Drahte gehen musste; das Element gab also einen sogenannten aufsteigenden Strom. Ist die Boraxmasse gehörig erkaltet, so lässt sie den Strom nicht hindurch; es vergeht nach dem Anzünden der Lampe erst einige Zeit, bevor die Nadel sich im Sinne eines aufsteigenden Stromes in Bewegung setzt. Die Nadel geht übrigens nicht sehr schnell und sehr weit (bis ungefähr 50°) vor, und macht dort Halt, solange das Anlegen der abgelösten Masse an die Wand des Tiegels dauert; nach Vollendung des Anlegens geht die Nadel im Sinne eines aufsteigenden Stromes bis zur Hemmung. Es macht sich also auch hier, wo der Strom des Elementes mit dem Strome aus der Temperaturdifferenz in seiner Richtung zusammenfällt, der absteigende Strom, den das Anlegen hervorruft, durch seinen Gegensatz bemerklich. Da die Widerstände für alle drei Ströme gleich gross sind, so sieht man, dass die elektromotorische Kraft jenes absteigenden Stromes nicht gering ist (S. 274). Nach dem Auslöschen der Flamme bleibt die Nadel durch das Uebergewicht des aufsteigenden hydroelektrischen Stromes noch einige Zeit an der Hemmung liegen und geht dann langsam zurück; sie gelangt bei diesem allmähligen ruhigen Zurückgehen bis auf ungefähr 20°, bevor das Ablösen beginnt. In dem Augenblicke, wo letzteres nun aber eintritt, setzt sie sich in schnellere Bewegung und schlägt trotz des vorhandenen aufsteigenden hydroelektrischen Stromes eines Zinkkupferelementes nach der andern Seite hinüber, zeigt also als Resultante der in diesem Augenblicke vorhandenen elektromotorischen Kräfte einen absteigenden Strom an.

Als nicht ein, sondern zwei Zinkkupferelemente mit aufsteigendem Strome eingeschaltet wurden, gelangte die Nadel während des Erkaltens bis zum Ablösen der Salzmasse nur bis 40° zurück; aber auch in dieser Stellung machte sich das Ablösen durch eine starke Rückschwankung bemerklich. Wurde die Nadel des Galvanometers nach dem Auslöschen der Flamme durch einen angemessen mit der Hand bewegten

kleinen Magnetstab auf dem Nullpuncte der Theilung gehalten, so schlug bei Einschaltung zweier Zinkkupferelemente mit aufsteigendem Strome die Nadel doch im Augenblicke des Ablösens im Sinne eines absteigenden Stromes aus.

Ueber die elektromotorische Kraft während des Erhitzens lehren die vorstehenden Versuche nichts, weil sich der hydroelektrische Strom zu dem durch die Erhitzung entstehenden hinzufügte. Um über die Kraft des letztern ein Urtheil zu gewinnen, musste das Zinkkupferelement in umgekehrter Richtung, also mit absteigendem Strome eingeschaltet werden. In diesem Falle zeigte die Nadel beim Erhitzen einen absteigenden Strom; der Strom war aber nicht stark, die Nadel stand lange in der Gegend von 50°, bis die Schmelzung fast den Draht erreichte; dann erst ging sie schneller im Sinne des absteigenden hydroelektrischen Stromes bis zur Hemmung. Das zuletzt erwähnte raschere Vorwärtsgehen der Nadel hat seinen Grund erstens in einer Vermehrung der Leitungsfähigkeit der geschmolzenen Salzmasse und zweitens in einer Verminderung der elektromotorischen Kraft des durch Temperaturunterschiede entstehenden Stromes. Nach dem Auslöschen der Flamme bleibt die Nadel sehr lange an der Hemmung liegen und geht dann sehr allmählig zurück, bis die Ablösung erfolgt, wo sie augenblicklich wieder (im Sinne des absteigenden Stromes) vorwärts springt.

Die vorstehenden Versuche habe ich auch zugleich benutzt, um über die Leitungsfähigkeit der Salzmasse nach dem Ablösen zu entscheiden. Sie leitet nach dem genannten Zeitpunkte in der That noch schwach den Strom eines hydroelektrischen Elementes (5 bis 10° Ablenkung je nach den Umständen); indess verliert sich diese Eigenschaft mit fortschreitender Erkaltung immer mehr und mehr.

### 4. Kohlensaure Salze.

#### *a.* Gemisch aus kohlensaurem Kali und Natron.

Um ein vollkommen genau aus 1 Aequivalent kohlensaurem Kali und 1 Aequivalent kohlensaurem Natron zusammengesetztes Salz zu erhalten, nahm ich weinsaures Kali-Natron (Seignettesalz), verkohlte dasselbe im Platintiegel und glühte, bis es vollkommen weiss war. Die auf diese Weise gewonnene Mischung ist ziemlich leicht flüssig; sie schmilzt

schon im bedeckten Platintiegel über der Flamme der Spirituslampe, ohne dass es nöthig ist, das Gebläse in Thätigkeit zu setzen.

Wird das Salzgemisch in einem offenen Tiegel dem Gebläsefeuer ausgesetzt, so zeigt sich zunächst ein aufsteigender Strom, der sich beim Schmelzen in einen absteigenden Strom verwandelt, aber augenblicklich wieder die erste Richtung (aufsteigender Strom) annimmt, sobald das Salz auch am Drahte geschmolzen ist. Es nehmen indess die Ströme bei dem angegebenen Verfahren nicht immer regelmässig bis zu einem Maximum zu und dann wieder ab, sondern es treten bisweilen Ab- und Zunahmen in der Stärke derselben ein, wie solche schon oben S. 265 erwähnt worden sind.

Ich will einen speciellen Fall anführen, wo die Schwankungen sehr stark waren. Es wurde die Salzmasse in einem Tiegel mit aufgelegtem Deckel durch die blosse Flamme (Grösse $^5/_4$) ohne Anwendung des Gebläses geschmolzen (wobei leider durch den aufgelegten Deckel die Beobachtung der Vorgänge im Tiegel unmöglich gemacht war). Zuerst erschien der aufsteigende Strom, der die Nadel bis zur Hemmung trieb; nach vielleicht 2 Minuten ging dieselbe zur andern Seite hinüber und erreichte ebenfalls die Hemmung (also im Sinne eines absteigenden Stromes), bewegte sich dann, nachdem jener absteigende Strom allmählig schwächer geworden war (nach Verlauf von fast 1 Minute) wieder nach der ersten Seite bis zur Hemmung (aufsteigender Strom), begab sich nach 1 Minute wieder auf die zweite Seite bis zur Hemmung (absteigender Strom) und kehrte endlich nach 1 Minute auf die erste Seite zurück (aufsteigender Strom), wo sie auf 65 bis 70° Ablenkung stehen blieb. Leider konnte in diesem besonderen Falle nicht entschieden werden, ob nicht etwa der zweite aufsteigende Strom Folge der oben S. 274 beschriebenen Capillarwirkung war.

Während des Erkaltens zeigen sich die drei oben bei den Chlorverbindungen bereits angegebenen Perioden; ausserdem aber existirt noch ein Minimum oder eine diesem entsprechende Umkehrung (vgl. S. 266). Wird das Salzgemisch mittelst Gebläses im bedeckten Tiegel heftig erhitzt, so ist also zu Ende des Erhitzens ein aufsteigender Strom vorhanden. Nach dem Auslöschen der Flamme entsteht sofort ein absteigender Strom, der die Nadel bis zur Hemmung wirft, aber auch, weil das Erstarren des Salzes als grauliche opalartige Masse eintritt, sofort einem starken aufsteigenden weichen muss. Die Nadel ging darauf z. B.

in einem speciellen Versuche nach ungefähr 1 Minute wieder zurück und zeigte einen absteigenden Strom an, dessen Intensität beim Eintritt des Knisterns in der Masse ab-, und bald darauf wieder zunahm, sodass die Nadel noch länger als 1 Minute an der Hemmung fest liegen blieb, und dann erst sehr langsam im Verlaufe mehrerer Minuten zum Nullpunkte zurückkehrte. Unter günstigen Umständen ist es mir auch wiederholt gelungen an der Stelle des eben bezeichneten Minimums im absteigenden Strome nochmals einen aufsteigenden, und dann schliesslich wieder absteigenden Strom zu beobachten.

Ganz ähnliche Erscheinungen traten ein, als der Platindraht durch einen Golddraht ersetzt wurde.

Beim Erstarren und Erkalten zieht sich die Masse sehr stark zusammen, so dass gewöhnlich an irgend einer Stelle ein tiefes Loch entsteht; bildet sich dasselbe dicht an dem Platinringe, so kann die dadurch möglich gemachte schnellere Abkühlung auch zu Stromschwankungen Veranlassung geben.

Das Verhalten des borsauren Natrons scheint bei flüchtigem Blicke von dem Verhalten des vorstehenden Gemenges aus kohlensaurem Kali und Natron sehr verschieden zu sein; denn erstens zeigt jenes Salz beim Anlegen seiner Masse an den Tiegel während des Erhitzens und ebenso beim Ablösen während des Erkaltens einen absteigenden Strom, und zweitens finden sich bei ihm nicht die Umkehrungen in der Stromrichtung während des Schmelzens und Erstarrens. Der Grund dieser Abweichung liegt indess nicht in chemischen Verhältnissen, sondern hat allein in physikalischen Eigenschaften, in der Zähflüssigkeit und dem glasigen Erstarren der Masse seinen Grund. Ist dies der Fall, so muss das Verhalten des borsauren Natrons wenigstens angenähert sich künstlich durch solche Gemenge nachbilden lassen, welche in genannter Hinsicht ähnliche physikalische Eigenschaften besitzen.

In dieser Absicht schmolz ich ein Gemenge von einigen Grammen kohlensauren Kalis und kohlensauren Natrons zusammen, und prüfte zunächst die Masse für sich. Sie glich in ihrem Verhalten dem vorhergehenden nach gleichen Aequivalenten zusammengesetzten Gemische. Darauf setzte ich derselben 0,5 Gr. feinen Sand hinzu, schmolz die Masse gut durch, bis die Kieselerde vollständig gelöst war, und untersuchte von Neuem ihre Eigenschaften; dieselben fanden sich gegen vorhin im Allgemeinen nicht verändert. Ich löste nun in wiederholten

Malen 0,5 Gr. Sand in dem Salze auf und prüfte nach jedem einzelnen Zusatze die Mischung. Nach einem zweiten solchen Zusatze war der beim Schmelzen entstehende absteigende Strom geringer geworden, ja er erschien öfter auch nur als ein Minimum des aufsteigenden Stromes. Bei noch weiterem Zusatze war dieser absteigende Strom oder das ihn vertretende Minimum im aufsteigenden nicht mehr zu erkennen. Die Salzmasse glich also in ihrem elektrischen Verhalten dem borsauren Natron; sie gewann auch nach und nach die Eigenschaften des letztern, beim Erkalten glasig zu erhärten, und sich vom Tiegel zu lösen, sowie beim Erhitzen sich wieder anzulegen; daher zeigte sie auch, gerade wie das borsaure Natron, in beiden Fällen, beim Anlegen und Ablösen, einen absteigenden Strom.

Indess in einer Hinsicht besteht doch eine Abweichung zwischen diesem Salzgemenge aus kieselsaurem und kohlensaurem Kali und Natron und dem borsauren Natron, die jedenfalls eben in der Zusammensetzung des Gemenges und der daraus folgenden Weise des Erstarrens ihren Grund hat. Beim Erkalten nämlich zeigen die kohlensauren Salze im Allgemeinen erst einen absteigenden, dann beim Erstarren einen aufsteigenden, und zuletzt wieder einen absteigenden Strom, während das borsaure Natron nur einen absteigenden Strom darbietet. Mit dem Zusatze von Kieselerde zu den kohlensauren Salzen wird allerdings der aufsteigende Strom etwas schwächer, verschwindet indess nicht ganz; dabei nimmt aber nach dem Erstarren die Leitungsfähigkeit stark ab, so dass infolge dessen der letzte absteigende Strom stark geschwächt und zuletzt gar nicht mehr beobachtet wird. Hat man dem Gemenge nach und nach so viel Sand zugesetzt, dass die Masse beim Erstarren glasig durchsichtig bleibt und schmilzt dieselbe im bedeckten Tiegel, so zeigt sie also nach dem Auslöschen der Flamme erst einen absteigenden Strom, bald darauf aber einen aufsteigenden, der eine Zeit lang fortdauert; beim Ablösen der Masse erscheint dann der bekannte absteigende Strom. Wird die Masse im offenen Tiegel geschmolzen, so kömmt der absteigende Strom unmittelbar nach dem Auslöschen der Flamme nicht zur Erscheinung, weil die Temperatur relativ so niedrig gewesen ist, dass die schwer schmelzbare Masse augenblicklich erstarrt.

*b.* Verhalten des kohlensauren Kalis.

Das kohlensaure Kali gleicht in seinem Verhalten im Allgemeinen dem vorhergehenden Gemische aus gleichen Aequivalenten kohlensauren Kalis und Natrons. Beim Beginn des Erhitzens zeigt es einen aufsteigenden Strom, dann einen absteigenden während des Schmelzens, und nach Vollendung desselben wieder einen aufsteigenden; beim Erkalten aber entsteht zuerst ein absteigender Strom, dann beim Erstarren ein aufsteigender, und darauf ein starker absteigender Strom, der nach einiger Zeit schwächer wird, und dann sich wieder steigert. Anstatt dieser Schwächung des absteigenden Stromes habe ich auch je nach den Umständen auf kurze Zeit einen Ausschlag der Nadel im Sinne eines aufsteigenden Stromes gesehen, nach dessen Verlauf dieselbe dann wieder einen absteigenden Strom anzeigte. Dieser absteigende Strom zu Ende des Erkaltens hält sehr lange an.

*c.* Verhalten des kohlensauren Natrons.

Das kohlensaure Natron verhält sich beim Erhitzen wie das vorhergehende Salz, zeigt dagegen beim Erkalten eine Abweichung.

Ist die Masse des kohlensauren Natrons vollständig mittelst der Gebläsevorrichtung in dem bedeckten Tiegel geschmolzen, so zeigt die Nadel während des Erhitzens den aufsteigenden Strom. Nach dem Auslöschen der Flamme erscheint ein starker absteigender Strom, sehr bald aber beim Beginn des Erstarrens ein starker aufsteigender; ist die anfangs graulich und matt aussehende Masse zum Theil weiss geworden (natürlich können sich alle diese Angaben über die Beschaffenheit der Masse nur auf die Oberfläche und die unmittelbar unter ihr liegenden Schichten beziehen), so geht die Nadel auf die entgegengesetzte Seite (absteigender Strom) und verweilt dort in der Nähe der Hemmung. Nach längerer Zeit beginnt sie erst langsam, dann aber schneller zurück zu kehren, und, ich möchte sagen plötzlich, erscheint ein aufsteigender Strom, dessen Stärke je nach den Umständen verschieden ausfällt; bald darauf nimmt man ein Knistern in dem Tiegel wahr, und damit hört jeder Strom auf. Der letzte aufsteigende Strom ist (vgl. S. 275) wahrscheinlich nur Folge einer Polarisation. Als ich den Tiegel ohne Deckel und ohne das durchlöcherte Platinblech anwandte, zeigte sich einige Male die Dauer des nach dem Weisswerden der Masse erscheinenden absteigenden Stromes vermindert, dagegen trieb der zu Ende entste-

hende aufsteigende Strom die Nadel in seinem Sinne bis zur Hemmung, und hielt sie einige Zeit auf hohen Graden abgelenkt, bis mit dem Knistern sein Ende eintrat.

### 5. Phosphorsaure Salze.

#### a. [b]Phosphorsaures Natron.

Das Salz wurde erhalten durch Schmelzen des gewöhnlichen phosphorsauren Natrons. Seine Unteruchung wird durch die hohe Temperatur, die es zum Schmelzen erfordert, sehr erschwert; es lässt sich nur im bedeckten Tiegel unter Anwendung des Gebläses in Fluss bringen. Beim Erstarren dehnt es sich sehr stark aus, und schiebt sich in flachen Krystallmassen über die Oberfläche; einmal entstand dadurch eine so heftige Explosion, dass grosse Stücke aus dem Tiegel fortgeschleudert und der aufliegende Deckel aus dünnem Platinblech zur Hälfte aufgebogen wurde.

Beim Erhitzen zeigt das phosphorsaure Natron dieselben Erscheinungen, wie das Chlornatrium; beim Erkalten der heftig glühenden geschmolzenen Masse entsteht zuerst ein absteigender Strom, der entweder bleibt, oder beim Erstarren in einen aufsteigenden Strom übergeht, auf welchen dann nochmals ein absteigender Strom folgt. Nach einiger Zeit erscheint schliesslich gerade wie beim kohlensauren Natron noch ein schwacher aufsteigender Strom. (Vgl. S. 275).

Wenn das Salz zu schmelzen beginnt, so können durch Capillarwirkungen (vgl. S. 274.), welche die am Drahte festsitzende Masse an verschiedene Stellen des Tiegels drücken, Schwankungen in der Ablenkung der Galvanometernadel entstehen.

#### b. [a]Phosphorsaures Natron.

Das Salz wurde erhalten durch Schmelzen des phosphorsauren Natron-Ammoniaks.

Beim Erhitzen wird gewöhnlich nur ein aufsteigender Strom beobachtet, dessen Stärke nach dem vollständigen Schmelzen sich etwas verringert.

Bei dem Erkalten zeigt sich ebenfalls nur ein absteigender Strom, der aber nach einiger Zeit schwächer wird (Andeutung des aufsteigenden Stromes) und bald darauf an Intensität wieder wächst. Beim wei-

tern Erkalten erfolgt die Abnahme erst langsam, dann schneller; der Strom verschwindet nach dem Knistern der Masse.

### 6. Schwefelsaure Salze.

*a.* Schwefelsaures Natron.

Beim Erhitzen mit blosser Flamme kommt das Salz im offenen Tiegel nicht zum Schmelzen; es entsteht dabei ein aufsteigender Strom, der nach dem Auslöschen der Flamme augenblicklich in einen absteigenden übergeht.

Wird der Tiegel bedeckt, und das Gebläse angewandt, so zeigt das Galvanometer einen starken aufsteigenden Strom, der aber während des Schmelzens schwächer wird. Erst wenn die Masse am Drahte völlig geschmolzen ist, geht die Nadel wieder vorwärts zum Zeichen einer Zunahme des aufsteigenden Stromes.

Nach dem Auslöschen geht die Nadel je nach den Umständen mehr oder weniger zurück, wird aber sofort von dem aufsteigenden Strome infolge des Erstarrens erfasst, und schlägt wieder bis zur Hemmung im Sinne dieses Stromes. Nach Vollendung des Erstarrens schwingt dann die Nadel auf die andere Seite bis zur Hemmung, zeigt also einen starken absteigenden Strom an.

*b.* Schwefelsaures Kali und schwefelsaures Natron.

Da das schwefelsaure Kali zu schwer flüssig war, so wandte ich, um ein leichter schmelzbares Salz zu erhalten, eine Mischung aus gleichen Aequivalenten schwefelsauren Kalis und schwefelsauren Natrons an. Beim Erhitzen über dem Gebläse zeigte das Salz nur einen aufsteigenden Strom; doch schien zur Zeit des Schmelzens seine Intensität geringer zu sein. Nach dem Auslöschen der Lampe bestand der aufsteigende Strom noch einige Augenblicke und ging dann in einen absteigenden über. Sehr bald löste sich die Salzmasse von den Wänden des Tiegels, und dieses Ablösen war stets mit der Entwickelung eines absteigenden Stromes verbunden.

*c.* Schwefelsaures Kupferoxyd-Kali.

Das Doppelsalz aus schwefelsaurem Kupferoxyd und schwefelsaurem Kali schmilzt im offenen Tiegel über der Flamme einer Spiritus-

lampe mit doppeltem Luftzuge sehr leicht. Nach dem Erstarren zerfällt das Salz beim weitern Abkühlen nach und nach zu Pulver. Lässt man das Salz in einem isolirten und mit dem Goldblättchen eines empfindlichen Elektrometers verbundenen Platintiegel erstarren, so zeigt das Elektrometer nach Böttgers Beobachtung*) positive Elektricität, sobald das Salz unter Knistern sich zusammenzieht und zerfällt.

Infolge des eben erwähnten Zerfallens tritt beim Beginn des Erhitzens, wenn das Salz zuvor weit erkaltet ist, erst sehr spät eine hinreichende Leitung für den elektrischen Strom ein; es muss das Schmelzen fast den Ring des Platindrahtes erreichen, bevor die Nadel des Galvanometers merklich abgelenkt wird. Dieser Umstand, verbunden mit der leichten Schmelzbarkeit des Salzes erklärt, weshalb der erste von der Temperaturdifferenz herrührende aufsteigende Strom nicht sichtbar wird; der erste überhaupt wahrnehmbare Ausschlag weist auf einen durch das Schmelzen erzeugten absteigenden Strom hin. Dieser Strom wächst allmählig und erreicht eine ziemlich bedeutende Stärke, die aber nach dem völligen Schmelzen geringer wird. Auffallenderweise verwandelt sich aber auch selbst nach Beendigung des Schmelzens der absteigende Strom nicht wie sonst gewöhnlich in einen aufsteigenden; er besteht vielmehr bei weiterm Erhitzen in mässiger Stärke fort.

Dem entsprechend erscheint unmittelbar nach dem Auslöschen der Flamme ein mässig starker aufsteigender Strom, dessen Intensität aber ausserordentlich anwächst, sobald das Ansetzen und Krystallisiren der Masse beginnt. Wenn die Oberfläche der Masse erstarrt ist, nimmt die Intensität unter Knistern ab, und schliesslich folgt auf den aufsteigenden Strom noch ein schwacher absteigender, dessen Stärke und Dauer wegen mangelnder Leitungsfähigkeit nur gering ist.

Wird an die Stelle des innern Platindrahtes ein Golddraht gebracht, und das Salz im offenen oder bedeckten Tiegel erhitzt, so sind bei steigender Temperatur die elektrischen Vorgänge ähnlich, wie zuvor angegeben; nur ist im bedeckten Tiegel die Stärke des nach Beendigung des Schmelzens fortdauernden absteigenden Stromes etwas geringer als im offenen Tiegel. Beim Erkalten weichen die Erscheinungen bei bedecktem und bei offenem Tiegel ebenfalls nur wenig, und nicht wesentlich von einander ab, sind aber gar sehr von den bei Anwendung des Pla-

*) Pogg. Annal. Bd. 50. 43.

tindrahtes eintretenden verschieden. Bei offenem Tiegel nämlich entsteht nach dem Auslöschen der Flamme ein mässig starker aufsteigender Strom, der fortbesteht bis zu dem Augenblicke wo die geschmolzene Salzmasse am Tiegelrande zu erstarren beginnt. In diesem Zeitpunkte zeigt die Nadel auf einige Secunden einen absteigenden Strom; die Masse beginnt dann aber auch von dem Drahte aus in Nadeln anzuschiessen, und es entsteht sogleich wieder ein aufsteigender Strom, dessen Intensität unter Knistern allmählig abnimmt. Bei bedecktem Tiegel wird anstatt des absteigenden Stromes nur ein Minimum im aufsteigenden beobachtet; die Nadel bleibt längere Zeit auf diesem Minimum stehen. In beiden Fällen erscheint aber zu Ende des Erstarrens kein absteigender Strom.

### 7. Chromsaure Salze.

Saures chromsaures Kali.

Nach dem Anzünden der Lampe wird lange Zeit (infolge des Mangels von Leitung) keine Bewegung der Magnetnadel wahrgenommen; erst wenn nur noch wenig festes Salz den Drahtring umgiebt, entsteht ein absteigender Strom, der einige Augenblicke schwach ist, aber dann plötzlich so stark wird, dass er die Nadel gegen die Hemmung wirft. Da während dieser Bewegung die zuvor noch vorhandene geringe feste Masse am Drahtringe geschmolzen ist, so fliegt die Nadel sogleich nach der andern Seite hinüber, und legt sich dort an die Hemmung (aufsteigender Strom).

Beim Erkalten tritt zunächst, wenn die Salzmasse hinreichend über den Schmelzpunkt erhitzt gewesen ist, ein absteigender Strom ein, auf welchen dann beim Erstarren ein starker aufsteigender folgt. Dieser aufsteigende Strom wird schwächer und verschwindet bald ganz, ohne dass noch ein absteigender Strom folgt. Das Ausbleiben dieses letzteren, ebenso wie das Nichterscheinen des sonst bei beginnender Erhitzung entstehenden aufsteigenden Stromes wird (vgl. S. 276 und S. 277) durch den Mangel an Leitungsfähigkeit in dem erstarrten und erkalteten Theile der Salzmasse verursacht.

### 8. Chlorsaure Salze.

Chlorsaures Kali.

Beim Erhitzen entsteht erst dann ein schwacher aufsteigender Strom, wenn die Masse vom Rande her bis über die Hälfte geschmolzen

ist; derselbe wächst, wenn die Masse um den Draht ebenfalls flüssig geworden.

Wird die Erhöhung der Temperatur so weit getrieben, dass die Entwickelung des Sauerstoffes beginnt, so nimmt der aufsteigende Strom noch zu. Dauert nach dem Auslöschen der Flamme diese Gasentwickelung noch einige Zeit fort, so zeigt die Nadel einen verstärkten aufsteigenden Strom an und geht erst nach dem Aufhören derselben zurück, worauf entweder ein äusserst schwacher absteigender Strom folgt, oder auch die Nadel auf den Nullpunkt sich einstellt.

Dass die Vorgänge sich ändern werden, wenn nach öfterem Erhitzen die Masse viel Chlorkalium beigemengt enthält, ist aus der Vergleichung der vorstehenden Angaben mit den elektrischen Vorgängen bei dem letztgenannten Salze ersichtlich.

Beiläufig sei hier erwähnt, dass unter günstigen Umständen das Knistern und Knacken (Ablösen) der undurchsichtigen Salzmassen bisweilen von elektrischen Strömen begleitet ist; so z. B. traf es einmal, dass beim Knacken des erstarrten chlorsauren Kalis die fast auf dem Nullpunkte stehende Nadel durch einen absteigenden Strom bis zur Hemmung geworfen wurde.

### 9. Salpetersaure Salze.

#### a. Sapetersaures Kali.

Beim Beginn des Schmelzens zwischen Platinflächen entsteht zuerst ein sehr schwacher absteigender Strom, der an Intensität aber bald abnimmt, und in einen aufsteigenden übergeht; letzterer ist auch schwach, selbst noch, wenn die Salzmasse zur Hälfte geschmolzen; erst wenn anscheinend über drei Viertheile geschmolzen (wo wahrscheinlich die geschmolzene Masse den unterhalb des noch festen Theils liegenden Drahtring erreicht), gewinnt er eine grössere Stärke. Der aufsteigende Strom besteht auch nach Vollendung des Schmelzens fort.

Nach dem Auslöschen der Lampe geht die Nadel in den ersten Augenblicken noch stark vorwärts im Sinne eines aufsteigenden Stromes, dessen Intensität aber bald nachlässt. Beim Ansetzen wird je nach den Umständen entweder ein schwacher aufsteigender oder gar keiner oder ein schwacher absteigender Strom beobachtet. Wenn die ganze Oberfläche erstarrt ist, wird wieder ein schwacher aufsteigender Strom wahrgenommen.

Wird das Salz nach dem Schmelzen mit einer Flamme von $^1/_1$ bis $^5/_4$ Grösse noch weiter bis zum Entwickeln eines Gases erhitzt, so nimmt der aufsteigende Strom zu; wird während der Gasentwickelung die Flamme ausgelöscht, so steigt seine Intensität unmittelbar darauf noch mehr.

Wird der innere Platindraht gegen einen Draht aus reinem Golde vertauscht, so stimmen die beobachteten Erscheinungen mit den vorstehend erwähnten überein. Dagegen zeigen sich einige Abweichungen, wenn der innere Draht aus reinem Silber besteht. Beim Erhitzen beginnt ein sehr schwacher aufsteigender Strom, wenn die Masse zum Theil schon geschmolzen ist; seine Stärke erreicht erst einen grössern Werth mit dem Ende des Schmelzens, wo also Draht und Tiegel von geschmolzener Masse umgeben sind. Indess kaum hat die Galvanometernadel ihre Schwingung vollendet, so verwandelt sich der aufsteigende Strom in einen absteigenden. Die Intensität des letztern wird geschwächt, wenn die Gasentwickelung beginnt. Doch sei noch bemerkt, dass auch anfangs mehrere Male, nachdem schon ein beträchtlicher Theil des Salzes geschmolzen war, die Galvanometernadel durch ihre Bewegung sogleich auf einen absteigenden Strom hinwies, der aber erst nach Vollendung des Schmelzens eine grössere Stärke erreichte. Vielleicht ist die angeführte Abweichung eine Folge von Aenderungen in der Oberfläche des Silberdrahtes, der nach öfter wiederholtem Schmelzen seine glänzende Oberfläche verloren hatte. Nach dem Auslöschen der Flamme besteht einige Augenblicke noch der absteigende Strom fort, und geht dann während die Masse noch flüssig ist in einen aufsteigenden über, an welchen sich zuletzt (ob nach oder während des Erstarrens im Innern der Masse wage ich nicht zu entscheiden) ein schwacher kurze Zeit dauernder absteigender Strom anschliesst.

*b.* Salpetersaures Natron.

Beim Beginn des Erhitzens entsteht ein äusserst schwacher aufsteigender Strom, welcher, wenn das Schmelzen der Masse begonnen hat, einem absteigenden Strome weicht, der aber auch nur eine mässige Stärke erreicht. Ist die Flamme der Lampe klein (Grösse $^1/_2$), so bleibt die Galvanometernadel im Sinne des letztern Stromes mässig abgelenkt.

Wird die Temperatur etwas höher gesteigert, so zeigt die Nadel einen aufsteigenden Strom an, dessen Intensität zunimmt, wenn die Gas-

entwickelung lebhafter wird. Bei mässig grosser Flamme ohne sichtbare Gasentwickelung trat auch einige Male der Fall ein, dass der nach Beendigung des Schmelzens eintretende aufsteigende Strom nur wenige Augenblicke anhielt, und sogleich einem schwächern absteigenden wieder Platz machte.

Wird bei vorhandenem aufsteigenden Strome die Flamme ausgelöscht, so nimmt im Augenblicke die Intensität dieses Stromes noch zu; bald verringert sie sich aber sehr bedeutend; beim Ansetzen ist nur ein äusserst schwacher aufsteigender Strom wahrzunehmen, auf welchen zuletzt nach dem Erstarren ein noch schwächerer absteigender Strom folgt.

Wird der innere Platindraht durch einen Golddraht ersetzt, so entsteht je nach der Erkaltung bei erneuter Erhitzung während des Schmelzens entweder zuerst ein schwacher absteigender Strom, der aber noch ehe die ganze Masse geschmolzen, in einen starken aufsteigenden übergeht, oder es erscheint sogleich der aufsteigende Strom. Dieser letztere besteht bis einige Augenblicke nach der Beendigung des Schmelzens, wo ein stärkerer absteigender Strom an seine Stelle tritt. Nach dem Auslöschen der Flamme entsteht sofort ein aufsteigender Strom, der allmählig verschwindet.

Wird anstatt des Platindrahtes ein Silberdraht angewandt, so sind die Vorgänge beim Erhitzen den so eben beim Golddraht angeführten ähnlich; der absteigende Strom zu Ende des Erhitzens nach dem Schmelzen ist stark. Derselbe besteht nach dem Auslöschen der Flamme noch einige Zeit fort, verliert aber an Stärke, und geht, wenn noch die ganze Masse flüssig ist, in einen mässig starken aufsteigenden Strom über, welcher letztere beim Beginn des Erstarrens abnimmt, und wenn ein Theil der Oberfläche fest geworden, einem schwachen absteigenden Strome wieder Platz macht.

#### c. Salpetersaures Ammoniak.

Sehr bald nach dem Anzünden der Flamme entsteht ein aufsteigender Strom; während die Masse raucht und schmilzt, liegt die Nadel an der Hemmung. Bei heftiger Gasentwickelung wird die Intensität des aufsteigenden Stromes geringer.

Nach dem Auslöschen der Flamme geht die Nadel auf die andere Seite bis zur Hemmung, zeigt also einen starken absteigenden Strom an; derselbe besteht in der angegebenen Weise fort, so lange die flüssige

Masse von den sich entwickelnden Gasbläschen noch weisslich aussieht; darauf nimmt die Intensität ab, die Nadel geht bis zum Nullpunkte zurück, ja in einzelnen Fällen selbst bis auf die entgegengesetzte Seite (schwacher aufsteigender Strom); in dieser Zeit beginnt das Ansetzen. Wenn nur erst geringe Mengen erstarrt sind, erscheint wieder ein starker absteigender Strom, der die Nadel bis zur Hemmung führt, von wo sie dann allmählig zurückkehrt.

---

## Inhalt.



---

# THEORIE

DER

# SONNENFINSTERNISSE

UND

## VERWANDTEN ERSCHEINUNGEN.

VON

P. A. HANSEN.

MIT 2 TAFELN.

In dieser Abhandlung leite ich zwei Systeme von Grundgleichungen ab, von welchen das eine dasjenige ist, welches Bessel zuerst veröffentlicht hat, und ich schon im Jahre 1837 in den Astr. Nachr. B. XV. Nr. 339—342 auf die Ermittelung der Umstände einer Sonnenfinsterniss angewandt habe, das andere aber meines Wissens neu ist. Das erstgenannte System besteht aus drei Gleichungen, durch welche der veränderliche Halbmesser des Schattenkegels in einer durch den Beobachtungsort gelegten, und auf der die Mittelpunkte der Sonne und des Mondes verbindenden graden Linie senkrecht stehenden Ebene, und dessen Lage bestimmt wird. Nennt man diesen Halbmesser $u$, und dessen Positionswinkel $\theta$, so sind $u$, $u \cos \theta$ und $u \sin \theta$ die drei Grössen, die durch diese Gleichungen bestimmt werden. Das zweite System von Gleichungen bestimmt hingegen die Lage eines constanten Halbmessers, und besteht daher nur aus zwei Gleichungen, die die Ausdrücke von $s \cos \theta''$ und $s \sin \theta''$ geben, wenn $s$ der Halbmesser und $\theta''$ dessen Positionswinkel bedeuten. Dieser Halbmesser ist nichts andres wie das Verhältniss des Halbmessers des Mondes zu der Aequatorealhorizontalparallaxe desselben, und der Positionswinkel $\theta''$ wird in einer Ebene gezählt, die durch den Beobachtungsort geht, und auf der von diesem nach dem Berührungspunkt der Ränder gezogenen graden Linie senkrecht steht.

Die Ausdrücke für $s \cos \theta''$ und $s \sin \theta''$ haben bez. genau dieselbe Form wie die für $u \cos \theta$ und $u \sin \theta$, aber in diesen treten die Coordinaten des selenocentrischen Ortes des Mittelpunkts der Sonne ein, während in jenen die auf den Beobachtungsort bezogenen Coordinaten des Punkts der Ränderberührung vorkommen.

In der Eingangs genannten Abhandlung habe ich das erste System von Grundgleichungen analytisch abgeleitet, hier leite ich es im Gegen-

theil durch Anwendung geometrischer Betrachtungen ab. Von diesem System gehe ich zuerst durch analytische Betrachtungen zu dem zweiten über, und zeige darauf auch wie man durch geometrische Betrachtungen dasselbe erhalten kann.

In der Ableitung dieser beiden Systeme von Gleichungen habe ich die Mond- und Sonnenörter, so wie das geocentrische Zenith des Beobachtungsortes auf die Ecliptik bezogen, während die Anwendung der Länge und Breite des Zeniths in den den Verlauf der Finsterniss umfassenden Aufgaben sehr unbequem ist. Um diesen Uebelstand zu entfernen wäre blos nöthig gewesen, die Coordinaten des Mondes, der Sonne und des Beobachtungsortes auf den Aequator zu beziehen, und dieses hätte ohne Weiteres geschehen können, da die Grundgleichungen dieselbe Form behalten, auf welche Fundamentalebene man auch die Coordinaten bezieht. So hat man es in der That seit einer Reihe von Jahren gemacht, und den kleineren Uebelstand, der daraus erwuchs, dass man nun die graden Aufsteigungen des Mondes und der Sonne, statt der blosen Längen und Breiten derselben, mit grösster Genauigkeit berechnen musste, gern ertragen, weil man den grössern Uebelstand, der aus der Anwendung der Länge und Breite des Zeniths entspringt, vermieden hatte. Ich habe aber hier ein anderes Verfahren angewandt, und zwar dasjenige, welches ich in der Einleitung zu den kürzlich publicirten ecliptischen Tafeln schon erklärt habe. Durch die Betrachtung einiger sphärischen Dreiecke bin ich dahin gekommen, die Länge und Breite des Zeniths auf strenge Weise aus den Grundgleichungen zu eliminiren, und durch die grade Aufsteigung und Abweichung desselben zu ersetzen, ohne dass es nöthig geworden ist, die graden Aufsteigungen und Abweichungen des Mondes einzuführen. Die Gleichungen behalten nach dieser Elimination dieselbe Form, welche sie vorher hatten.

Es ist hiedurch eine nicht unwesentliche Vereinfachung der Berechnung einer Sonnenfinsterniss aufgedeckt worden; wenn man die Mondörter aus den Tafeln berechnen muss, so erspart man sich die nicht ganz unbedeutende Verwandlung der Längen und Breiten des Mondes in grade Aufsteigungen und Abweichungen, und wenn man die Mondörter aus Ephemeriden nehmen kann, so ist wenigstens wenn man eine Interpolation dazu anwenden muss, diese für Längen und Breiten einfacher wie für grade Aufsteigungen und Abweichungen, weil die Differenzen der zweiten und höheren Ordnungen für jene klei-

ner sind wie für diese. Auch werden in jedem Falle die Coordinaten der relativen Bewegung des Mondes und der Sonne auf der Projectionsebene — in dieser Abhandlung allgemein mit $P$ und $Q$ bezeichnet — durch einfachere Ausdrücke erhalten.

Die Strahlenbrechung, von welcher ich zuerst gezeigt habe, dass sie bei den Sonnenfinsternissen und verwandten Erscheinungen nicht ohne Wirkung ist, berücksichtige ich soviel die Grösse ihrer Wirkung erheischt. Sie ist auf der westlichen und der östlichen Grenzcurve auf der ganzen Ausdehnung derselben am Grössten, und verschiebt diese Curven auf der Erdoberfläche nahe um den Betrag der Strahlenbrechung im Horizonte, also um mehr wie einen halben Grad. Den Halbmesser der Erde am Beobachtungsort und die geocentrische Breite dieses Ortes eliminire ich durch den Bogen, welcher in der Ellipse, die von den Meridianen der Erde gebildet wird, dieselbe Bedeutung hat, wie die excentrische Anomalie in der Bewegung der Planeten. Es werden hiedurch zwei veränderliche Grössen durch Eine ersetzt, und directe Auflösungen gewonnen, wo ohne diese Umformung dieselben indirect geworden wären. Die Abplattung der Erde darf man auch dann nicht übergehen, wenn man die Resultate auch nur auf Minuten genau erhalten will, denn die Uebergehung der Abplattung kann unter Umständen die Grenz- und anderen Curven um mehrere Grade unrichtig machen, ja sie sogar als reel erscheinen lassen, während sie in der That imaginär sind.

Die Aufgaben, welche die Auffindung und Berechnung der Grenz- und anderer Curven betreffen, löse ich mit geringer Ausnahme hier eben so wie in der oben angezogenen Abhandlung. Da wohl selten oder nie der Fall eintreten wird, dass man diese Curven genauer wie auf Minuten, oder höchstens Zehntheile von Minuten kennen zu lernen braucht, so darf man sich bei deren Berechnung verschiedene Uebergehungen in den strengen Formeln erlauben, durch welche diese vereinfacht werden. In jener Abhandlung habe ich diese Uebergehungen nicht in den Formeln angebracht, sondern nur im Text angemerkt, hier im Gegentheil habe ich dieselben in den Formeln angebracht, wodurch aber nicht verhindert wird, dass man sie ergänzen kann, wenn man Resultate auf Secunden oder genauer noch erhalten will.

Da die westliche und die östliche Grenzcurve unter verschiedenen Umständen sehr von einander verschiedene Formen annehmen, so habe ich diesen eine besondere ausführliche Untersuchung zu widmen für

nicht uninteressant gehalten, die unter andern auch Umstände aufgedeckt hat, von welchen mir unbekannt ist, dass sie früher zur Sprache gebracht worden wären.

Die Bestimmung der Längen durch eine beobachtete Sonnenfinsterniss hat man, meines Wissens ohne Ausnahme, in der Theorie blos auf die Beobachtungen der Ränderberührungen gegründet, während man in der Praxis schon mehrmals auch während einer Sonnenfinsterniss Hörnerabstände beobachtet hat. Da diese sich auch zu Längenbestimmungen gut zu eignen scheinen, und eine grössere Sicherheit in diese legen, da man während einer Sonnenfinsterniss eine Anzahl davon beobachten, und die daraus gezogenen Resultate, indem man daraus das Mittel nimmt, zu einem genaueren Resultat vereinigen kann, so habe ich auch die für die Benutzung von Hörnerabständen zu Längenbestimmungen nöthigen Ausdrücke entwickelt. Diese Abhandlung ist in folgende Abschnitte eingetheilt.

## §. 1. Ableitung von zwei verschiedenen Systemen von Grundformeln der Theorie der Finsternisse.

1.

Denken wir uns, um den Vorstellungen eine bestimmte Richtung zu geben, von der Erde aus gesehen den Mond nahe in Conjunction mit der Sonne. Durch die Mittelpunkte des Mondes und der Sonne ziehen wir eine grade Linie, und parallel zu dieser eine andere die durch den Mittelpunkt der Erde geht, und die Achse der Coordinaten $Z$ sein soll. Nehmen wir den Mittelpunkt der Erde als Anfangspunkt der rechtwinklichen Coordinaten $Z$, $P$ und $Q$ an, legen die Achse der $P$ in die Ebene der Ecliptik, und nehmen die positiven $P$ an der Seite, an welcher die Längen wachsen, also nach Osten, so wie positiven $Q$ nach Norden.

Um den Mittelpunkt der Erde legen wir eine Kugeloberfläche von unbestimmtem Halbmesser, welche von den hinreichend verlängerten positiven Coordinatenachsen in drei Punkten geschnitten werden wird, die ich mit denselben Buchstaben $Z$, $P$, $Q$ bezeichnen werde. Diese Punkte bilden auf der Kugeloberfläche ein sphärisches Dreieck, dessen Winkel sowohl wie Seiten jede $90^0$ sind. Ziehen wir auch durch die Mittelpunkte der Erde und des Mondes eine grade Linie und verlängern

diese wo nöthig über den letztgenannten Mittelpunkt hinaus bis sie die Kugeloberfläche in einem Punkte, den ich mit $M$ bezeichnen will, schneidet. Nennen wir nun die Entfernung des Mittelpunkts des Mondes von dem der Erde $r$, so sind die Coordinaten des ersteren offenbar

$$Z = r \cos(MZ)$$
$$P = r \cos(MP)$$
$$Q = r \cos(MQ)$$

wenn unter $MZ$, $MP$, $MQ$ die Bögen grössten Kreises verstanden werden, die die durch diese Buchstaben bezeichneten Punkte der Kugeloberfläche mit einander verbinden.

## 2.

Die durch die Mittelpunkte des Mondes und der Sonne gezogene grade Linie, und folglich auch die damit parallel laufende Achse der $Z$ bezeichnet auf der Kugeloberfläche die selenocentrische Länge und Breite der Sonne. Nennen wir diese bez. $\lambda'$ und $\beta'$, so entspricht auf der Kugeloberfläche der

Punkt $Z$ der Länge $\lambda'$, und der Breite $\beta'$;
Punkt $P$ - - $90^0+\lambda'$, - - - $0$;
Punkt $Q$ - - $\lambda'$, - - - $90^0+\beta'$.

Nennt man ferner die geocentrische Länge und Breite des Mittelpunkts des Mondes $l$ und $b$, so entspricht auf der Kugeloberfläche der

Punkt $M$ der Länge $l$, und der Breite $b$.

Auf der Seite $ZQ$ liegt der Durchschnittspunkt des Nordpols der Ecliptik mit der Kugeloberfläche, nennen wir diesen $p$, und ziehen die Bögen grössten Kreises $pM$ und $pP$. In dem sphärischen Dreieck $ZpM$ sind nun die Seiten

$$Zp = 90^0 - \beta' \quad , \quad Mp = 90^0 - b$$

und der eingeschlossene Winkel $ZpM = l - \lambda'$.
Ferner sind in dem Dreieck $QpM$ die Seiten

$$Qp = \beta \quad , \quad Mp = 90^0 - b$$

und der eingeschlossene Winkel $QpM = 180^0 - (l - \lambda')$
Endlich sind im Dreieck $PpM$ die Seiten

$$Pp = 90^0 \quad , \quad Mp = 90^0 - b$$

und der eingeschlossene Winkel $PpM = 90^0 - (l - \lambda')$, und hiemit giebt

die sphärische Trigonometrie sogleich für die Coordinaten des Mondmittelpunkts

$$\left.\begin{aligned} P &= r\cos b\sin(l-\lambda') \\ Q &= r\{\sin b\cos\beta' - \cos b\sin\beta'\cos(l-\lambda')\} \\ Z &= r\{\sin b\sin\beta' + \cos b\cos\beta'\cos(l-\lambda')\} \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

3.

Ziehen wir jetzt durch den Mittelpunkt der Erde und einen beliebigen Punkt der Erdoberfläche eine grade Linie und verlängern diese bis sie die Kugeloberfläche schneidet, dann bekommen wir offenbar die Coordinaten dieses Punkts der Erdoberfläche auf dieselbe Weise, wie eben die des Mondmittelpunkts. Nennen wir die Entfernung des Punkts der Erdoberfläche vom Mittelpunkt $\varrho$, und die Länge und Breite des geocentrischen Zeniths desselben $L$ und $B$, so wie dessen Coordinaten $z$, $p$, $q$, so ergeben sich diese aus den Ausdrücken (1), wenn man darin bez. $r$, $l$, $b$ in $\varrho$, $L$, $B$ verwandelt. Es wird daher

$$\left.\begin{aligned} p &= \varrho\cos B\sin(L-\lambda') \\ q &= \varrho\{\sin B\cos\beta' - \cos B\sin\beta'\cos(L-\lambda')\} \\ z &= \varrho\{\sin B\sin\beta' + \cos B\cos\beta'\cos(L-\lambda')\} \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Bezeichnen wir hierauf endlich die auf diesen Punkt der Erdoberfläche bezogenen Coordinaten des Mondmittelpunkts mit $P'$, $Q'$, $Z'$, so wird

$$\left.\begin{aligned} P' &= P - p \\ Q' &= Q - q \\ Z' &= Z - z \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

4.

Die eben entwickelten Ausdrücke der Coordinaten $P'$, $Q'$, $Z'$ gelten für jeden beliebigen Zeitpunkt, und wie auch die relative Lage der Sonne, des Mondes und der Erde beschaffen sein mag. Wenn nun ein im Punkt ($\varrho$, $L$, $B$) der Erdoberfläche befindlicher Beobachter eine äussere oder innere Berührung der Ränder der Sonne und des Mondes sehen soll, so muss die Oberfläche des durch den Mond von der Sonne verursachten Schattenkegels einestheils für den Halbschatten und anderntheils für den Vollschatten durch diesen Punkt gehen. Es ist also jetzt diese Bedingung auszudrücken. Drücken wir die Halbmesser des Mondes

und der Sonne in derselben Einheit aus wie $r$ und $\varrho$, und bezeichnen jenen mit $s$ und diesen mit $s'$, ferner die Entfernung der Mittelpunkte des Mondes und der Sonne von einander mit $\varrho'$, und den Erzeugungswinkel des Schattenkegels mit $f$, so zeigt eine Construction, die so einfach ist, dass sie wohl nicht beschrieben zu werden braucht, dass

$$\sin f = \frac{s \pm s'}{\varrho'}$$

ist, wo das obere Zeichen für äussere, und das untere für innere Berührungen gilt. Dieselbe Construction zeigt ferner, dass die Entfernung der Spitze des Schattenkegels vom Mittelpunkt des Mondes $\frac{s}{\sin f}$ zum Ausdruck hat, und die Entfernung dieser Spitze von der durch den Punkt ($\varrho$, $L$, $B$) gehenden Ebene der $P'$ und $Q'$ ist also =

$$Z' + \frac{s}{\sin f}$$

Nennen wir daher den Halbmesser des Kreises, den der Schattenkegel in dieser Ebene ausschneidet $u$, so ist $u$ offenbar gleich dem Product von $tg\, f$ in die eben ermittelte Entfernung, oder

$$u = (s + Z' \sin f) \sec f$$

Dieser Ausdruck zeigt in Verbindung mit dem obigen Ausdruck für $\sin f$, dass für alle äusseren Ränderberührungen, das ist für den Anfang und das Ende einer Sonnenfinsterniss überhaupt, $u$ immer positiv ist, dass aber für die inneren Berührungen, das ist für den Anfang und das Ende der Totalität oder der Ringförmigkeit einer Sonnenfinsterniss $u$ nicht unbedingt positiv ist, sondern auch negativ werden kann. Es bleibt nemlich $u$ positiv, wenn die Spitze des Schattenkegels für den Vollschatten weiter vom Monde entfernt ist, wie die Ebene der $P'$ und $Q'$, und wird im Gegentheil negativ, wenn diese Spitze dem Monde näher ist, wie diese Ebene. Denn da die Entfernung dieser Spitze vom Mittelpunkt des Mondes $\frac{s}{\sin f}$ zum Ausdruck hat, und für den Vollschatten $f$ negativ ist, so wird $u$ offenbar positiv oder negativ, je nachdem $\frac{s}{\sin f}$ grösser oder kleiner ist wie $Z'$. Da nun jener Fall eine totale, und dieser eine ringförmige Sonnenfinsterniss bedingt, so folgt hieraus, dass:

Wenn für eine innere Ränderberührung $u$ positiv ist, so ist die Sonnenfinsterniss total, wenn negativ, ringförmig.

5.

Nennen wir nun den Winkel, den der Halbmesser $u$ in der Ebene der $P'$ und $Q'$ mit der positiven Achse der $Q'$ macht $\theta_1$, dann ist auch

$$\left.\begin{aligned} P' &= u \sin\theta_1 \\ Q' &= u \cos\theta_1 \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (4)$$

und hiemit können wir die zu entwickelnden Grundgleichungen sogleich aufstellen.

Stellen wir die Ausdrücke (3) für $P'$ und $Q'$ den Ausdrücken (4) gleich, substituiren die Ausdrücke (1) und (2) darin, und setzen zur Abkürzung

$$u' = (s + Z \sin f) \sec f$$

wo den (1) zufolge

$$Z = r\,\{\sin b \sin\beta' + \cos b \cos\beta' \cos(l - \lambda')\}$$

ist, so bekommen wir

$$\begin{aligned} u &= u' - \varrho\,\{\sin B \sin\beta' + \cos B \cos\beta' \cos(L - \lambda')\}\, tg f \\ u \sin\theta_1 &= r \cos b \sin(l - \lambda') - \varrho \cos B \sin(L - \lambda') \\ u \cos\theta_1 &= r\,\{\sin b \cos\beta' - \cos b \sin\beta' \cos(l - \lambda')\} \\ &\quad - \varrho\,\{\sin B \cos\beta' - \cos B \sin\beta' \cos(L - \lambda')\} \end{aligned}$$

welches die strengen Grundgleichungen der Theorie der Finsternisse sind.

Die geometrische Bedeutung der Hülfsgrösse $u'$ ist leicht zu finden. Sie ist in der Ebene der $P$ und $Q$ dasselbe, was $u$ in der Ebene der $P'$ und $Q'$ ist, und bedeutet also den Halbmesser des Kreises, den der Schattenkegel in der genannten durch den Mittelpunkt der Erde gelegten Ebene ausschneidet.

Aus dem oben für die Ränderberührungen gegebenen Ausdruck für $u'$ kann man leicht den Ausdruck finden, welcher irgend einer der Grösse nach gegebenen Phase zukommt, denn man braucht nur dafür in dem Ausdruck für $\sin f$ den entsprechenden Werth von $s'$ zu substituiren. Behält man die alte Eintheilung des Sonnendurchmessers in Zwölftel, Zolle genannt, bei, so ist strenge für die Phase von $i$ Zollen

$$\sin f = \frac{s + (1 - \frac{1}{6} i)\, s'}{\varrho'}$$

welcher Ausdruck die Werthe von $\sin f$ für die Ränderberührungen auch in sich enthält. Wenn für eine bestimmte Sonnenfinsterniss, und strenge genommen auch für einen bestimmten Zeitpunkt, da $\varrho'$ nicht unveränderlich ist, die numerischen Werthe von $\sin f$ sowohl für die äusse-

ren wie für die inneren Ränderberührungen gegeben sind, so kann man daraus durch einfache Interpolation den Werth für jede beliebige Phase finden. Nennt man den Werth von $f$ für äussere Berührungen $f_1$ und den für innere Berührungen $f_2$, so wird für die Phase von $i$ Zollen

$$\sin f = \sin f_1 - \frac{\sin f_1 - \sin f_2}{12} i$$

und wendet man dieselbe Bezeichnung auf $u'$ an, so darf man auch, da $\sec f$ sehr wenig von Eins verschieden ist,

$$u' = u'_1 - \frac{u'_1 - u'_2}{12} i$$

setzen. In Bezug auf den Winkel $\theta_1$ bemerke ich, dass er für den auf der Erdoberfläche befindlichen Beobachter der Positionswinkel ist, den der durch den Mittelpunkt des Mondes und durch den Punkt der Himmelskugel, dessen Länge und Breite $\lambda'$ und $\beta'$ sind, — wofür man in der Anwendung den Sonnenmittelpunkt nehmen kann, — gelegte grösste Kreis mit dem durch den letzteren Punkt gehenden Breitenkreise macht. Wenn $u$ positiv ist, so ist $\theta_1 = 0$, wenn der Mondmittelpunkt sich in dem genannten Breitenkreise nördlich vom Sonnenmittelpunkt befindet, von da an wird $\theta_1$ wachsen, wenn der Mond sich nach Osten von diesem Breitenkreise entfernt. Wenn $u$ negativ ist, so wird der Anfangspunkt von $\theta_1$ um $180^0$ geändert, aber die Richtung in welcher $\theta_1$ sich vergrössert, bleibt dieselbe wie vorher.

## 6.

Für die Anwendung der eben abgeleiteten Grundgleichungen ist vor allen Dingen zu erklären, wie die darin vorkommenden Grössen $\lambda'$, $\beta'$, $\rho'$, die die selenocentrische Länge, Breite und Entfernung der Sonne bedeuten, auf unmittelbar gegebene Grössen zurück geführt werden können. Wir bekommen selbstverständlich diese Grössen aus den geocentrischen Längen, Breiten und Entfernungen des Mondes und der Sonne auf dieselbe Weise, wie man den heliocentrischen Ort eines Planeten aus dem geocentrischen Orte desselben erhält. Es wird daher strenge

$$\begin{aligned}
\rho' \cos\beta' \sin(\lambda' - l') &= r \cos b \sin(l' - l) \\
\rho' \cos\beta' \cos(\lambda' - l') &= r' \cos b' - r \cos b \cos(l' - l) \\
\rho' \sin\beta' &= r' \sin b' - r \sin b
\end{aligned}$$

wenn $l'$, $b'$, $r'$ die geocentrische Länge, Breite und Entfernung der Sonne

bedeuten. Aber selbst in den Fällen, in welchen die genaueste Berechnung erforderlich ist, nemlich wenn es sich um Längenbestimmungen durch Sonnenfinsternisse handelt, braucht man nicht diese strengen Formeln anzuwenden, viel weniger in den Berechnungen zu anderen Zwecken. Man kann stets vollkommen mit den folgenden sich daraus ergebenden Näherungsformeln ausreichen.

$$\left.\begin{aligned} \lambda' &= l' - \frac{r}{r'}(l-l') \\ \beta' &= b' - \frac{r}{r'}(b-b') \\ \varrho' &= r' - r \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

Denn da während einer Sonnenfinsterniss $l-l'$ oder $b$ nie grösser werden kann, wie $1^\circ 36'$, und $r$ nahe 400 Mal kleiner ist wie $r'$, so kann $\lambda'-l'$ oder $\beta'-b'$ nie grösser werden wie $14''$, und diese Unterschiede lassen sich durch die vorstehenden Formeln auf eine sehr einfache Weise erhalten.

7.

Die eben entwickelten Grundformeln gelten nicht blos für Sonnenfinsternisse sondern auch für die Vorübergänge der unteren Planeten vor der Sonne, für die Bedeckungen der Planeten durch den Mond, und für Sternbedeckungen. Für die letztgenannten Erscheinungen werden sie einfacher indem $f=0$, und dadurch $u=s$ wird. Von der ersten der drei Grundgleichungen kann man daher ganz absehen, und die linken Seiten der zweiten und dritten werden bez.

$$s \sin \theta_1 \text{ und } s \cos \theta_1$$

welche eine einfachere Behandlung zulassen, weil $s$ constant, während $u$ veränderlich ist. Aber auch für die übrigen eben angeführten Erscheinungen lassen sich Grundformeln entwickeln, die den eben für die Sternbedeckungen erwähnten völlig ähnlich sind. Diese werde ich jetzt, und zwar zuerst aus den obigen analytisch ableiten.

8.

Die Grundgleichungen des Art. 5 können wir in Folge der Gleichungen (3) wie folgt stellen

$$\begin{aligned} u &= s \sec f + Z \operatorname{tg} f - z \operatorname{tg} f \\ u \sin \theta_1 &= P - p \\ u \cos \theta_1 &= Q - q \end{aligned}$$

Substituiren wir hievon die erste in die zweite und dritte, so bekommen wir

$$s \sin\theta_1 = P\cos f - Z\sin f\sin\theta_1 - p\cos f + z\sin f\sin\theta_1$$
$$s\cos\theta_1 = Q\cos f - Z\sin f\cos\theta_1 - q\cos f + z\sin f\cos\theta_1$$

wofür wir um noch mehr abzukürzen

$$s\sin\theta_1 = A - A'$$
$$s\cos\theta_1 = B - B'$$

schreiben wollen, indem wir

$$A = P\cos f - Z\sin f\sin\theta_1$$
$$B = Q\cos f - Z\sin f\cos\theta_1$$

annehmen, woraus für $A'$ und $B'$ analoge Ausdrücke durch $p$, $q$ und $z$ entstehen. Bezeichnen wir nun den in derselben Richtung wie $\theta_1$ gezählten Positionswinkel des Mondmittelpunkts am Berührungspunkt der Ränder mit $\theta_1''$, und multipliciren die erste der obigen Gleichungen mit

$$\cos\theta_1\cos\theta_1'' + \sin\theta_1\sin\theta_1''\cos f$$

die zweite mit

$$-\sin\theta_1\cos\theta_1'' + \cos\theta_1\sin\theta_1''\cos f$$

und addiren; multipliciren wir ferner die erste mit

$$-\cos\theta_1\sin\theta_1'' + \sin\theta_1\cos\theta_1''\cos f$$

die zweite mit

$$\sin\theta_1\sin\theta_1'' + \cos\theta_1\cos\theta_1''\cos f$$

und addiren, so bekommen wir

$$s\cos f\sin\theta_1'' = \{\cos\theta_1\cos\theta_1'' + \sin\theta_1\sin\theta_1''\cos f\}\{A-A'\}$$
$$+ \{-\sin\theta_1\cos\theta_1'' + \cos\theta_1\sin\theta_1''\cos f\}\{B-B'\}$$
$$s\cos f\cos\theta_1'' = \{-\cos\theta_1\sin\theta_1'' + \sin\theta_1\cos\theta_1''\cos f\}\{A-A'\}$$
$$+ \{\sin\theta_1\sin\theta_1'' + \cos\theta_1\cos\theta_1''\cos f\}\{B-B'\}$$

deren rechte Seiten noch zu entwickeln und zu reduciren sind.

## 9.

Bezeichnen wir die von dem Punkt $(L, B)$ der Erdoberfläche aus erscheinende Länge und Breite des Berührungspunkts der Ränder mit $l''$ und $b''$, dann ist auf der im Art. 1 eingeführten Kugeloberfläche $f$ der Bogen grössten Kreises, welcher die Punkte $(l'', b'')$ und $(\lambda', \beta')$ mit einander verbindet, und in dem sphärischen Dreieck, welches aus diesen beiden Punkten und dem Nordpol der Ecliptik gebildet wird, sind

die Seiten . . . . . . $f$ ; $90^0-b''$ ; $90^0-\beta'$
und die gegenüber liegenden Winkel $l''-\lambda'$ ; $\theta_1$ ; $180^0-\theta_1''$

Von den Relationen, die die sphärische Trigonometrie giebt, wollen wir für dieses Dreieck die folgenden ausheben, die zu den vorzunehmenden Reductionen genügen.

$$\cos\theta_1\cos\theta_1'' + \sin\theta_1\sin\theta_1''\cos f = \cos(l''-\lambda')$$
$$-\sin\theta_1\cos\theta_1'' + \cos\theta_1\sin\theta_1''\cos f = \sin\beta'\sin(l''-\lambda')$$
$$\sin\theta_1''\sin f = \cos\beta'\sin(l''-\lambda')$$
$$\cos\theta_1\sin\theta_1'' - \sin\theta_1\cos\theta_1''\cos f = \sin b''\sin(l''-\lambda')$$
$$\sin\theta_1\sin\theta_1'' + \cos\theta_1\cos\theta_1''\cos f = \sin\beta'\sin b''\cos(l''-\lambda') + \cos\beta'\cos b''$$
$$\cos\theta_1''\sin f = \cos\beta'\sin b''\cos(l''-\lambda') - \sin\beta'\cos b''$$

Substituiren wir die Ausdrücke (1) der Coordinaten $P, Q, Z$ in die Ausdrücke für $A$ und $B$ des vor. Art., so wird

$$A = r\cos f\cos b\sin(l-\lambda') - r\sin f\sin\theta_1\{\sin b\sin\beta' + \cos b\cos\beta'\cos(l-\lambda')\}$$
$$B = r\cos f\{\sin b\cos\beta' - \cos b\sin\beta'\cos(l-\lambda')\} - r\sin f\cos\theta_1\{\sin b\sin\beta' + \cos b\cos\beta'\cos(l-\lambda')\}$$

und hieraus bekommt man die Ausdrücke für $A'$ und $B'$, wenn man $r$, $l$ und $b$ bez. in $\varrho$, $L$ und $B$ verwandelt. Durch Zuziehung der ersten drei der vorstehenden trigonometrischen Relationen ergiebt sich nun sogleich

$$\begin{aligned}
&A\{\cos\theta_1\cos\theta_1'' + \sin\theta_1\sin\theta_1''\cos f\} + B\{-\sin\theta_1\cos\theta_1'' + \cos\theta_1\sin\theta_1''\cos f\}\\
&= r\cos f\{\cos b\sin(l-\lambda')\cos(l''-\lambda') + \sin\beta'\sin(l''-\lambda')\{\sin b\cos\beta' - \cos b\sin\beta'\cos(l-\lambda')\}\}\\
&\quad - r\sin f\cos f\sin\theta_1''\{\sin b\sin\beta' + \cos b\cos\beta'\cos(l-\lambda')\}\\
&= r\cos f\{\cos b\sin(l-\lambda')\cos(l''-\lambda')\\
&\qquad + \sin\beta'\sin(l''-\lambda')\{\sin b\cos\beta' - \cos b\sin\beta'\cos(l-\lambda')\}\\
&\qquad - \cos\beta'\sin(l''-\lambda')\{\sin b\sin\beta' + \cos b\cos\beta'\cos(l-\lambda')\}\}\\
&= r\cos f\cos b\sin(l-l'')
\end{aligned}$$

Eben so ergiebt sich durch Zuziehung der drei letzten der obigen Relationen

$$\begin{aligned}
&A\{-\cos\theta_1\sin\theta_1'' + \sin\theta_1\cos\theta_1''\cos f\} + B\{\sin\theta_1\sin\theta_1'' + \cos\theta_1\cos\theta_1''\cos f\}\\
&= r\cos f\{-\cos b\sin b''\sin(l-\lambda')\sin(l''-\lambda')\\
&\qquad + \{\cos b''\cos\beta' + \sin b''\sin\beta'\cos(l''-\lambda')\}\{\sin b\cos\beta' - \cos b\sin\beta'\cos(l-\lambda')\}\}\\
&\quad - r\sin f\cos f\cos\theta_1''\{\sin b\sin\beta' + \cos b\cos\beta'\cos(l-\lambda')\}\\
&= r\cos f\{-\cos b\sin b''\sin(l-\lambda')\sin(l''-\lambda')\\
&\qquad + \{\cos b''\cos\beta' + \sin b''\sin\beta'\cos(l''-\lambda')\}\{\sin b\cos\beta' - \cos b\sin\beta'\cos(l-\lambda')\}\\
&\qquad + \{\cos b''\sin\beta' - \sin b''\cos\beta'\cos(l''-\lambda')\}\{\sin b\sin\beta' + \cos b\cos\beta'\cos(l-\lambda')\}\}\\
&= r\cos f\{\sin b\cos b'' - \cos b\sin b''\cos(l-l'')\}
\end{aligned}$$

Substituirt man diese nebst der oben erwähnten Verwandelung derselben in die im vor. Art. erhaltenen Gleichungen, so ergiebt sich

$$s \sin \theta_1'' = r \cos b \sin (l - l'') - \varrho \cos B \sin (L - l'')$$
$$s \cos \theta_1'' = r \{\sin b \cos b'' - \cos b \sin b'' \cos (l - l'')\}$$
$$- \varrho \{\sin B \cos b'' - \cos B \sin b'' \cos (L - l'')\}$$

welches die im Art. 7 angekündigten Grundgleichungen sind.

## 10.

Dieselben Gleichungen lassen sich auch direct auf ähnliche Weise ableiten, wie die des Art. 5; man braucht nur die Lage der Achsen der $Z$, $P$, $Q$ genannten Coordinaten ein wenig anders anzunehmen. Ziehen wir von irgend einem Punkt der Erdoberfläche, in welchem eine Ränderberührung gesehen wird, eine grade Linie bis an die Punkte des Mond- und Sonnenkörpers, die mit einander in Berührung gesehen werden, und dazu eine Parallele, die durch den Mittelpunkt der Erde geht, und jetzt die Achse der $Z''$ sein soll. Die Ebene der $P''$ und $Q''$ legen wir jetzt senkrecht auf diese Achse der $Z''$, und übrigens die positiven $P''$ und $Q''$ eben so wie oben. Legen wir nun wieder eine Kugeloberfläche um den Mittelpunkt der Erde, so entspricht auf derselben der

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Punkt $Z''$ | der Länge | $l''$ | und der Breite | $b''$ |
| Punkt $P''$ | - - | $90^\circ + l''$ | - - - | $0$ |
| Punkt $Q''$ | - - | $l''$ | - - - | $90^\circ + b''$ |

hiemit bekommen wir durch dieselben Betrachtungen wie oben

$$P'' = r \cos b \sin (l - l'')$$
$$Q'' = r \{\sin b \cos b'' - \cos b \sin b'' \cos (l - l'')\}$$
$$p'' = \varrho \cos B \sin (L - l'')$$
$$q'' = \varrho \{\sin B \cos b'' - \cos B \sin b'' \cos (L - l'')\}$$

woraus durch die Gleichungen (3) die Ausdrücke für $P'$ und $Q'$ hervorgehen, wenn wir darin $P''$, $Q''$, $p''$, $q''$ für $P$, $Q$, $p$, $q$ setzen. Nun ist aber leicht zu erkennen, dass die auf die Ebene der $P'$ und $Q'$ projicirte Entfernung des Mondmittelpunkts von der Achse der $Z''$ den Mondhalbmesser $s$ zum Ausdruck hat, und dass daher auch

$$P' = s \sin \theta_1''$$
$$Q' = s \cos \theta_1''$$

ist. Hieraus gehen sogleich die im vor. Art. analytisch abgeleiteten Gleichungen wieder hervor.

11.

Wir haben oben gesehen wie die Länge und Breite des Berührungspunkts der Ränder von der selenocentrischen Länge und Breite der Sonne abhängen, man kann sie aber auch von der vom Beobachtungsorte aus gesehenen Länge und Breite des Mittelpunkts der Sonne abhängig machen. Nennen wir diese $\lambda''$ und $\beta''$, und den scheinbaren Halbmesser der Sonne $\Delta''$, so giebt das sphärische Dreieck zwischen dem Mittelpunkt der Sonne, dem bez. Punkt des Sonnenrandes und dem Nordpole der Ecliptik folgende Relationen,

$$\sin(l''-\lambda'') = \frac{\sin\theta''}{\cos\beta''} \sin\Delta''$$

$$\sin(b''-\chi) = \frac{\cos X}{\cos\Delta''} \sin\beta''$$

wo der Hülfswinkel $\chi$ durch den folgenden Ausdruck erlangt wird,

$$tg\,\chi = tg\,\Delta'' \cos\theta_1''$$

Die Grundformeln des Art. 9 können mit Nutzen in den Aufgaben, in welchen $\theta_1''$ gegeben ist, so wie in der Untersuchung der verschiedenen Formen der Grenzcurven, und in den Differentialformeln angewandt werden. In den übrigen, im Laufe dieser Abhandlung vorkommenden Aufgaben werde ich mich aber der Grundformeln des Art. 5 bedienen.

## §. 2. Elimination der Länge und Breite des Zeniths des Beobachtungsortes aus den Grundformeln.

12.

Sowohl die im Art. 5 wie die im Art. 9 erhaltenen Grundformeln enthalten unter anderen Grössen auch die Länge und Breite des Zeniths des Beobachtungsortes, deren Berechnung und weitere Berücksichtigung umständlich ist, und deren Elimination und Ersetzung durch einfacher zu erhaltende Grössen daher von wesentlichem Nutzen sind. Man könnte sie sogleich durch die grade Aufsteigung und Abweichung des Zeniths ersetzen, wenn man auch alle übrigen Grössen, die in den genannten Formeln vorkommen, auf den Aequator beziehen wollte, diese Formeln würden in ihrer Zusammensetzung hienach ganz dieselben bleiben, denn es ist an sich klar, dass man in der Ableitung derselben ohne Weiteres den Aequator und dessen Nordpol statt der Ecliptik und dessen Nord-

pol hätte annehmen können. Aber nach dieser Verwandelung würde man in der Anwendung unter andern genöthigt die graden Aufsteigungen und Abweichungen des Mondes und der Sonne aus den Längen und Breiten derselben für mehrere Zeiten möglichst genau zu berechnen, eine Arbeit, die für nicht ganz unbedeutend zu halten, und in diesem Falle mit der Unbequemlichkeit verbunden ist, dass man wegen der hier immer kleinen Mondbreiten in den Theil der logarithmisch-trigonometrischen Tafeln eingehen muss, in welchem sehr grosse Differenzen vorkommen.

Ich werde aber hier zeigen, dass die Länge und Breite des Zeniths des Beobachtungsortes durch die grade Aufsteigung und Abweichung desselben mit Zuziehung des Winkels am Punkt $(\lambda', \beta')$ oder bez. $(l'', b'')$ zwischen dem Breiten- und Abweichungskreise strenge eliminirt werden können, ohne dass erforderlich wird die graden Aufsteigungen und Abweichungen des Mondes in die Formeln einzuführen. Die graden Aufsteigungen und Abweichungen der Sonne oder bez. der Punkte $(\lambda', \beta')$ oder $(l'', b'')$, die hierauf vorkommen, brauchen auch nicht mit der Schärfe berechnet zu werden, wie in jenem Falle.

## 13.

Betrachten wir zuerst das sphärische Dreieck zwischen dem Nordpol des Aequators, dem der Ecliptik und dem Punkt $(\lambda', \beta')$, in welchem

die Seiten . . . . . . $\varepsilon$ , $90^0 - \beta'$ , $90^0 - \delta'$

und die gegenüber liegenden Winkel $h$ , $90^0 + \alpha'$ , $90^0 - \lambda'$

sind, wenn die grade Aufsteigung und Abweichung des Punkts $(\lambda', \beta')$ mit $\alpha'$ und $\delta'$, der Winkel an diesem Punkt zwischen dem Abweichungs- und dem Breitenkreise mit $h$, und die Schiefe der Ecliptik mit $\varepsilon$ bezeichnet werden. Die Anwendung der allgemeinen trigonometrischen Relationen*) auf dieses Dreieck giebt sogleich

*) Unter den allgemeinen trigonometrischen Relationen verstehe ich hier die folgenden

$$\begin{aligned}
\sin c \sin A &= \sin a \sin C \\
\sin c \cos A &= \cos a \sin b - \sin a \cos b \cos C \\
\cos c &= \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C \\
\sin C \sin a &= \sin A \sin c \\
\sin C \cos a &= \cos A \sin B + \sin A \cos B \cos c \\
\cos C &= -\cos A \cos B + \sin A \sin B \cos c \\
\sin a \sin b + \cos a \cos b \cos C &= \sin A \sin B - \cos A \cos B \cos c
\end{aligned}$$

$$\sin\beta' = \sin\delta'\cos\varepsilon - \cos\delta'\sin\varepsilon\sin\alpha'$$
$$\cos\beta'\cos\lambda' = \cos\delta'\cos\alpha'$$
$$\cos\beta'\sin\lambda' = \sin\delta'\sin\varepsilon + \cos\delta'\cos\varepsilon\sin\alpha'$$

---

$$\sin h\cos\beta' = \cos\alpha'\sin\varepsilon$$
$$\cos h\cos\lambda' + \sin h\sin\lambda'\sin\beta' = \cos\alpha'\cos\varepsilon$$
$$\cos h\sin\lambda' - \sin h\cos\lambda'\sin\beta' = \sin\alpha'$$

---

$$\cos h\cos\beta' = \cos\delta'\cos\varepsilon + \sin\delta'\sin\varepsilon\sin\alpha'$$
$$\sin h\cos\lambda' - \cos h\sin\lambda'\sin\beta' = \cos\delta'\sin\varepsilon - \sin\delta'\cos\varepsilon\sin\alpha'$$
$$\sin h\sin\lambda' + \cos h\cos\lambda'\sin\beta' = \cos\alpha'\sin\delta'$$

Betrachten wir ferner das Dreieck zwischen dem Nordpol des Aequators, dem der Ecliptik und dem geocentrischen Zenith des Beobachtungsortes. Nennen wir $\mu$ und $\varphi'$ die grade Aufsteigung und geocentrische Abweichung dieses Zeniths, so sind in diesem Dreieck

die Seiten . . . . . . $\varepsilon$ , $90^0 - B$ , $90^0 - \varphi'$

und die gegenüber liegenden Winkel — , $90^0 + \mu$ , $90^0 - L$

und die allgemeinen trigonometrischen Relationen geben daher

$$\sin B = \sin\varphi'\cos\varepsilon - \cos\varphi'\sin\varepsilon\sin\mu$$
$$\cos B\sin L = \sin\varphi'\sin\varepsilon + \cos\varphi'\cos\varepsilon\sin\mu$$
$$\cos B\cos L = \cos\varphi'\cos\mu$$

Stellen wir hierauf die Grundgleichungen des Art. 5 wie folgt,

$$u = u' - \varrho\sin B\,.\sin\beta'\,tg f - \varrho\cos B\sin L\,.\cos\beta'\sin\lambda'\,tg f$$
$$- \varrho\cos B\cos L\,.\cos\beta'\cos\lambda'\,tg f$$

$$u\sin\theta = P\cos h - Q\sin h + \varrho\sin B\,.\sin h\cos\beta'$$
$$- \varrho\cos B\sin L\,\{\cos h\cos\lambda' + \sin h\sin\lambda'\sin\beta'\}$$
$$+ \varrho\cos B\cos L\,\{\cos h\sin\lambda' - \sin h\cos\lambda'\sin\beta'\}$$

$$u\cos\theta = P\sin h + Q\cos h - \varrho\sin B\,.\cos h\cos\beta'$$
$$- \varrho\cos B\sin L\,\{\sin h\cos\lambda' - \cos h\sin\lambda'\sin\beta'\}$$
$$+ \varrho\cos B\cos L\,\{\sin h\sin\lambda' + \cos h\cos\lambda'\sin\beta'\}$$

wo

$$\theta = \theta_1 - h$$

gesetzt worden ist, und den Positionswinkel des Mondmittelpunkts, gleich wie $\theta_1$, bedeutet, aber von dem durch den Punkt ($\lambda'$, $\beta'$), oder,

---

wo $a$, $b$, $c$ die Seiten und $A$, $B$, $C$ die bez. gegenüber liegenden Winkel irgend eines sphärischen Dreiecks bezeichnen. Ich habe hier diese Relationen schon im Art. 9 angewandt, auch habe ich in der 2. Note zu meiner Abhandlung „Sur la figure de la Lune" die Ableitung der letzten derselben aus den vorhergehenden gegeben.

welches einerlei ist, durch den Punkt ($\alpha'$, $\delta'$) gehenden Abweichungskreise gezählt ist. Substituirt man nun in die vorstehenden Ausdrücke für die darin vorkommenden Functionen von $h$, $\lambda'$, $\beta'$, $L$, $B$ ihre vorher gegebenen Ausdrücke durch $\varepsilon$, $\alpha'$ und $\delta'$, so verschwindet $\varepsilon$ von selbst, und die Grundgleichungen ziehen sich in die folgenden zusammen,

$$(6)\quad\begin{cases} u = u' - \rho\,\{\sin\varphi'\sin\delta' + \cos\varphi'\cos\delta'\cos(\mu-\alpha')\}\,tg\,f \\ u\sin\theta = P\cos h - Q\sin h - \rho\cos\varphi'\sin(\mu-\alpha') \\ u\cos\theta = P\sin h + Q\cos h - \rho\,\{\sin\varphi'\cos\delta' - \cos\varphi'\sin\delta'\cos(\mu-\alpha')\} \end{cases}$$

welche dieselbe Form haben, wie die Gleichungen, von welchen wir ausgegangen sind, in welchen aber die vom Beobachtungsorte abhängigen Grössen sich auf den Aequator beziehen, und also die Berechnung des sogenannten Nonagesimus vermieden ist, ohne dass es nöthig geworden ist die Mondörter auch auf den Aequator zu beziehen.

## 14.

Die Berechnung der graden Aufsteigung $\alpha'$ und der Abweichung $\delta'$ wird aus dem Grunde sehr einfach, weil die Breite $\beta'$ immer sehr klein ist, wie oben gezeigt wurde. Das erste der im vor. Art. angewandten Dreiecke giebt strenge

$$\cos\delta'\cos\alpha' = \cos\beta'\cos\lambda'$$
$$\cos\delta'\sin\alpha' = -\sin\beta'\sin\varepsilon + \cos\beta'\cos\varepsilon\sin\lambda'$$
$$\sin\delta' = \sin\beta'\cos\varepsilon + \cos\beta'\sin\varepsilon\sin\lambda'$$
$$\cos\beta'\sin h = \sin\varepsilon\cos\alpha'$$

die aber selbst für die genaueste Berechnung in einer weiter unten zu entwickelnden Abkürzung hinreichende Genauigkeit gewähren.

## 15.

Gehen wir zu den Grundgleichungen des Art. 9 über, so können wir offenbar dieselbe Transformation auch auf diese anwenden, und müssen ein ganz ähnliches Resultat bekommen wie oben. Wir können daher sogleich die folgende Transformation derselben hersetzen.

$$s\sin\theta'' = P''\cos h'' - Q''\sin h'' - \rho\cos\varphi'\sin(\mu-\alpha'')$$
$$s\cos\theta'' = P''\sin h'' + Q''\cos h'' - \rho\,\{\sin\varphi'\cos\delta'' - \cos\varphi'\sin\delta''\cos(\mu-\alpha'')\}$$

wo $P''$ und $Q''$ dieselbe Zusammensetzung haben wie im Art. 10, $\alpha''$, $\delta''$, $h''$ scheinbare grade Aufsteigung, Abweichung und Winkel zwischen dem

Breiten- und Abweichungskreise des Punkts der Ränderberührung, und $\theta''$ der vom Abweichungskreise desselben Punkts an gezählte Positionswinkel des Mittelpunkts des Mondes bedeuten, also

$$\theta'' = \theta_1'' - h''$$

ist.

## §. 3. Berücksichtigung der Strahlenbrechung.

16.

Bisher ist noch nicht auf die Strahlenbrechung in der Erdatmosphäre Rücksicht genommen worden, von welcher ich zuerst gezeigt habe*), dass sie nicht ohne Einfluss auf die Erscheinung einer Sonnenfinsterniss, Sternbedeckung u. s. w. ist.

Die astronomische Strahlenbrechung ist bekanntlich der Winkel, den die Tangenten an dem Anfangs- und Endpunkt der Curve mit einander machen, die der Lichtstrahl bei seinem Durchgange durch die Erdatmosphäre beschreibt. Dieser Winkel wird bei der Entwickelung des analytischen Ausdrucks der Strahlenbrechung in Function des Winkels, welchen die an der Oberfläche der Erde befindliche Tangente der Curve des Lichtstrahls mit der durch diesen Punkt gehenden Verticale macht, also in Function der scheinbaren Zenithdistanz ausgedrückt. Da aber die Verlängerung der Tangente dieser Curve an dem Punkt, wo der Lichtstrahl in die Atmosphäre eintritt, diese Verticale nicht an der Oberfläche der Erde, sondern in einer gewissen Höhe über derselben trifft, so ist nur in dem Falle, wo die Entfernung des Himmelskörpers, von welchem der Lichtstrahl kommt, unendlich gross ist, die durch die Strahlenbrechung der Tafeln verbesserte scheinbare Zenithdistanz die wahre. In allen Fällen, wo die Entfernung des Himmelskörpers endlich ist, ist die wahre Zenithdistanz kleiner wie die durch unsere Strahlenbrechungstafeln angegebene. Der Mond ist indess der einzige Himmelskörper, für welchen dieser Unterschied nicht unmerklich ist, und namentlich kann die Wirkung desselben auf Sonnenfinsternisse und verwandte Erscheinungen manchmal bedeutend werden, wenn gleich sie auch in vielen hiebei vorkommenden Fällen unmerklich ist. Es versteht sich von selbst, dass die grösste Wirkung der Strahlenbrechung eintritt,

*) S. Astr. Nachr. Bd. XV. Nr. 347.

wenn die Sonnenfinsterniss oder verwandte Erscheinung im Horizont oder nahe am Horizont statt findet, aber schon bei wenigen Höhengraden über dem Horizont wird sie unbedeutend.

## 17.

Man wird leicht einsehen, dass die Wirkung der Strahlenbrechung auf eine Sonnenfinsterniss oder verwandte Erscheinung dadurch berücksichtigt wird, dass man das Auge des Beobachters in den Punkt versetzt, in welchem sich die oben genannten Tangenten an der Curve des Lichtstrahls schneiden. Suchen wir daher diesen Punkt. Nennt man die Dichtigkeit der Atmosphäre in irgend einer ihrer Schichten $d$, und die brechende Kraft, die diese Schicht besitzt $\mu d$, ferner den Winkel, den die Tangente an diesem Punkt der Curve des Lichtstrahls mit dem verlängerten Halbmesser der Erde macht $\theta$, und die Entfernung dieses Punkts von dem Mittelpunkt der Erde $\varrho(1+a)$, so ist die Gleichung der Curve des Lichtstrahls

$$\text{const.} = \varrho(1+a)\sin\theta\sqrt{1+\mu d}$$

Für irgend einen zweiten Punkt derselben Curve, dem $a'$, $\theta'$, $d'$ entsprechen, ergiebt sich eine ähnliche Gleichung, und es wird also

$$(1+a')\sin\theta'\sqrt{1+\mu d'} = (1+a)\sin\theta\sqrt{1+\mu d}$$

Bezieht man nun die linke Seite dieser Gleichung auf den Eintritt des Strahls in die Atmosphäre, und die rechte Seite auf die Oberfläche der Erde, so wird $a'$ die in Theilen des Halbmessers der Erde ausgedrückte Höhe über der Erdoberfläche, in welcher sich die Tangenten des Anfangs- und Endpunkts der Curve des Lichtstrahls schneiden, $\theta'$ wird die wahre Zenithdistanz, die unsere Strahlenbrechungstafeln geben, $d'$ und $a$ werden Null, $\theta$ die scheinbare Zenithdistanz, und $\mu d$ die brechende Kraft der Atmosphäre an der Oberfläche der Erde, wir bekommen daher

$$x = \frac{\sin\theta}{\sin\theta'}\sqrt{1+\mu d} - 1$$

wenn $x$ die gesuchte Höhe bedeutet. Nennen wir die tabularische Strahlenbrechung $r$, so wird

$$\theta' = \theta + r$$

und wenn wir nur die erste Potenz der kleinen Grösse $\mu d$ berücksichtigen,

$$x = \tfrac{1}{2}\mu d - r\,cotg\,\theta + r^2\frac{1+\cos^2\theta}{2\sin^2\theta}$$

oder wenn wir $r = K\,tg\,\theta$ setzen, wie in mehreren Strahlenbrechungstafeln der Fall ist,

$$x = \tfrac{1}{2}\mu d - K + \tfrac{1}{2}K^2(1 + \sec^2\theta)$$

Da weiter unten auch der Differentialquotient von $x$ in Bezug auf $\theta$ oder auf die Höhe gebraucht werden wird, so will ich ihn hier sogleich angeben. Man findet aus den vorstehenden Ausdrücken

$$\frac{dx}{d\theta} = \frac{r}{\sin^2\theta} - \frac{dr}{d\theta}\left(cotg\,\theta - r\,\frac{1+\cos^2\theta}{\sin^2\theta}\right) - 2r^2\frac{\cos\theta}{\sin^3\theta}$$

oder beziehungsweise

$$\frac{dx}{d\theta} = -\frac{dK}{d\theta}(1 - K(1 + \sec^2\theta)) + K^2\frac{\cos\theta}{\sin^3\theta}$$

Man kann aus diesen Ausdrücken Tafeln für die Werthe von $x$ und $\frac{dx}{d\theta}$ für die verschiedenen Zenithdistanzen berechnen. Man kann auch aus der Formel

$$\log(1 + x) = \log\sin\theta - \log\sin\theta' + \tfrac{1}{2}\log(1 + \mu d)$$

eine Tafel für $\log(1 + x)$ rechnen. Die hier folgende, in welcher das Argument $H$ die wahre Höhe bedeutet, ist von Bessel durch die vorstehende Formel berechnet.

| $H$ | $\log(1+x)$ | $H$ | $\log(1+x)$ | $H$ | $\log(1+x)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0° 0' | 0.0001054 | 4° 0' | 0.0000198 | 18° | 0.0000015 |
| 10 | 0.0000967 | 30 | 0.0000169 | 20 | 0.0000012 |
| 20 | 0.0000888 | 5 0 | 0.0000147 | 22 | 0.0000009 |
| 30 | 0.0000817 | 6 0 | 0.0000111 | 24 | 0.0000008 |
| 40 | 0.0000753 | 7 0 | 0.0000086 | 26 | 0.0000007 |
| 50 | 0.0000695 | 8 0 | 0.0000069 | 28 | 0.0000006 |
| 1 0 | 0.0000643 | 9 0 | 0.0000056 | 30 | 0.0000005 |
| 10 | 0.0000594 | 10 0 | 0.0000046 | 40 | 0.0000002 |
| 30 | 0.0000511 | 12 0 | 0.0000033 | 50 | 0.0000001 |
| 2 0 | 0.0000412 | 14 0 | 0.0000025 | 60 | 0.0000001 |
| 30 | 0.0000337 | 16 0 | 0.0000019 | 70 | 0.0000000 |
| 3 0 | 0.0000280 | 18 0 | 0.0000015 | 80 | 0.0000000 |
| 30 | 0.0000234 | | | 90 | 0.0000000 |
| 4 0 | 0.0000198 | | | | |

Diese Angaben gelten für den atmosphärischen Zustand für welchen in den Bessel'schen Strahlenbrechungstafeln die vom Barometer- und Thermometerstande abhängigen Factoren $\beta = 1$ und $\gamma = 1$ sind, und werden diesen Factoren sehr nahe proportional geändert.

18.

Um die Wirkung der Strahlenbrechung auf die Sonnenfinsternisse u. s. w. zu berücksichtigen ist nun weiter nichts nöthig, wie in den im vor. § abgeleiteten Grundgleichungen allenthalben

$$\varrho \cos\varphi' + \varrho x \cos\varphi \text{ für } \varrho\cos\varphi' \text{, und}$$
$$\varrho \sin\varphi' + \varrho x \sin\varphi \text{ für } \varrho\sin\varphi'$$

zu setzen, wo $\varphi$ die Polhöhe bedeutet. Da aber bei der Ableitung und Anwendung der astronomischen Strahlenbrechung bis jetzt nicht auf die Abplattung der Erde Rücksicht genommen worden ist, so kann man diese um so mehr in dem Factor von $x$ übergehen, und sich begnügen allenthalben

$$\varrho(1 + x) \text{ statt } \varrho$$

in die Grundformeln zu substituiren.

## §. 4. Vorbereitung der Grundformeln auf ihre Anwendung.

19.

Nehmen wir als Einheit der im Vorhergehenden vorkommenden linearischen Grössen den Halbmesser des Erdäquators an, so wird, wenn wieder $r$ und $r'$ die geocentrischen Entfernungen des Mondes und der Sonne bedeuten, und wir die bez. Aequatorealhorizontalparallaxen mit $\pi$ und $\pi'$ bezeichnen,

$$r = \frac{1}{\sin\pi}, \; r' = \frac{1}{\sin\pi'}.$$

Die Ausdrücke (1) der Coordinaten werden nun

$$P = \frac{\cos b \sin(l-\lambda')}{\sin\pi}$$
$$Q = \frac{\sin b \cos\beta' - \cos b \sin\beta' \cos(l-\lambda')}{\sin\pi}$$
$$Z = \frac{\sin b \sin\beta' + \cos b \cos\beta' \cos(l-\lambda')}{\sin\pi}$$

die aber in dieser strengen Form nie angewandt zu werden brauchen. Für $Q$ und $Z$ darf man in den genauesten Rechnungen die folgende abgekürzte Form anwenden, die leicht aus den vorstehenden Ausdrücken hervorgeht,

$$Q = \frac{\sin(b-\beta')}{\sin\pi}, \; Z = \frac{\cos b \cos(l-\lambda')}{\sin\pi}$$

ja man darf in den häufigsten Fällen

$$Z = \frac{1}{\sin\pi}$$

setzen. Zufolge der Ausdrücke (5) wird nun

$$\lambda' = l' - \frac{\sin \pi'}{\sin \pi}(l - l')$$

$$\beta' = b' - \frac{\sin \pi'}{\sin \pi}(b - b')$$

und man bekommt

$$\sin \pi' = \frac{\sin \Pi'}{R'}$$

wenn $\Pi'$ die mittlere Horizontalparallaxe der Sonne, und $R'$ den Radius Vector derselben bedeuten. Man kann die obigen Ausdrücke von $P$ und $Q$ so umformen, dass darin $l'$ und $b'$ statt $\lambda'$ und $\beta'$ erscheinen, und sie werden dadurch nicht im Geringsten zusammengesetzter. Da die Berücksichtigung der ersten Potenz der kleinen Grösse $\pi'$ jedenfalls in allen Anwendungen, die vorkommen können, gnügt, so wird zuerst

$$P = \frac{\cos b \sin (l - l')}{\sin \pi} + \frac{\cos b \cos (l - l')}{\sin \pi} \cdot \frac{\sin \pi'}{\sin \pi}(l - l')$$

$$Q = \frac{\sin (b - b')}{\sin \pi} + \frac{\cos (b - b')}{\sin \pi} \cdot \frac{\sin \pi'}{\sin \pi}(b - b')$$

und da man in den mit $\sin \pi'$ multiplicirten Gliedern $\cos(l - l')$ und $\cos(b - b')$ unbedenklich gleich Eins annehmen darf, so ziehen sich diese Ausdrücke in die folgenden zusammen,

$$P = \frac{\cos b \sin (l - l')}{\sin (\pi - \pi')}\;;\; Q = \frac{\sin (b - b')}{\sin (\pi - \pi')} \quad \ldots \ldots \quad (7)$$

die die Berechnung von $\lambda'$ und $\beta'$ nicht verlangen, und eben so einfach sind, wie die von welchen wir ausgegangen sind. Diese Ausdrücke dürfen in der genauesten Berechnung angewandt werden.

## 20.

Die dritte Gleichung (5) wird jetzt mit hinreichender Genauigkeit

$$\varrho' = \frac{\sin(\pi - \pi')}{\sin \pi . \sin \pi'}$$

und der Ausdruck des Art. 4 für $\sin f$ wird daher

$$\sin f = \frac{(s \pm s') \sin \pi \sin \pi'}{\sin (\pi - \pi')}$$

Da aber aus der Definition von $s$ und $s'$ hervorgeht, dass sie auch die constanten Verhältnisse der Halbmesser des Mondes und der Sonne zu den Horizontalparallaxen bedeuten, so wird

$$s' = \frac{\sin \Delta'}{\sin \Pi'}$$

wenn $\Delta'$ den mittleren Halbmesser der Sonne bedeutet, und hiemit bekommt man nach Art. 5

$$\sin f = \frac{K}{R} G \quad \ldots \ldots \ldots \quad (8)$$

wenn man

$$K = s \sin \Pi' + \left(1 - \frac{i}{6}\right) \sin \Delta'$$

$$G = \frac{\sin \pi}{\sin(\pi - \pi')} = 1 + \frac{\sin \pi'}{\sin(\pi - \pi')}$$

setzt. Da man ferner in dem obigen Ausdruck für $Z$ immer $l'$ statt $\lambda'$ schreiben darf, so bekommt man, wenn man $w$ für $Z \sin f$ setzt,

$$w = \frac{K}{H} G'$$

wo

$$G' = \frac{\cos b \cos(l - l')}{\sin(\pi - \pi')}\text{, oder bez. } G' = \frac{1}{\sin(\pi - \pi')} = \frac{206265''}{\pi - \pi'}$$

angenommen werden darf. Hiemit wird

(9) . . . . . . . . . $u' = (s + w) \sec f$

wo auch fast immer $\sec f = 1$ gesetzt werden darf, da $f$ höchstens $= 16'$ werden kann.

Aus den neuen Mondtafeln folgt

$$s = 0{,}272957$$

hiemit und mit $\Delta' = 15'59''{,}79$ und $\Pi' = 8''{,}6$ wird allgemein

$$K = 0{,}0000\,1138 + \left(1 - \frac{i}{6}\right) 0.00465318$$

und hieraus für die äusseren Ränderberührungen

$$\log K = 7.668810$$

und für die inneren

$$\log K = 7.666686\,n$$

21.

Um die Coordinaten $P$ und $Q$, so wie $\sin f$ und $u'$ nebst den stündlichen Veränderungen derselben zu erhalten muss man zuerst für einige in der Nähe der wahren Conjunction liegende, und gleichweit, etwa 0,05 Tag, von einander abstehende Zeiten aus den Mondtafeln die Längen, Breiten und Aequatorealhorizontalparallaxen des Mondes, und aus den Sonnentafeln die Längen der Sonne nebst der Breite und dem Logarithmus des Radius Vectors berechnen, oder diese Grösse aus einer Ephemeride durch Interpolation suchen. Hiemit ergeben sich durch die Ausdrücke (7) die diesen Zeiten zukommenden numerischen Werthe von $P$ und $Q$, und durch die Formeln des vor. Art. die von $\sin f$ und $u'$. Die beiden letztgenannten Grössen braucht man in der Regel nur für Eine Zeit zu berechnen, wofür man die der wahren Conjunction am Nächsten liegende wählen kann, berechnet man sie indess auch für die

anderen Zeiten, so lernt man die kleinen Aenderungen, denen sie im Verlaufe der Finsterniss unterworfen sind, kennen und kann sie, wenn man es für nöthig erachtet, berücksichtigen. Bei der Anwendung einer beobachteten Sonnenfinsterniss zu Längenbestimmungen ist diese Berücksichtigung erforderlich, für alle übrigen Anwendungen wird man sie übergehen können.

Nennen wir die numerischen Werthe von $P$ und $Q$, die für die der wahren Conjunction am Nächsten liegende Zeit gelten, $P_0$ und $Q_0$, die für die vorhergehenden Zeiten $P_{-1}$, $Q_{-1}$, $P_{-2}$, $Q_{-2}$, etc., und die für die folgenden Zeiten $P_1$, $Q_1$, $P_2$, $Q_2$ etc.; bezeichnen wir diese in Stunden und Decimaltheilen der Stunde ausgedrückten Zeiten selbst mit $T_0$, $T_{-1}$, $T_{-2}$, etc. $T_1$, $T_2$, etc., so wie die einander gleichen Intervalle.

$$\text{etc.} = T_{-1} - T_{-2} = T_0 - T_{-1} = T_1 - T_0 = T_2 - T_1 = \text{etc.}$$

hier mit $u$, und setzen

$$\begin{array}{llll}
\text{etc.} & & \text{etc.} & \\
p_{-2} = \frac{P_0 - P_{-2}}{2u} & ; & q_{-2} = \frac{Q_0 - Q_{-2}}{2u} & \\
p_{-1} = \frac{P_0 - P_{-1}}{u} & ; & q_{-1} = \frac{Q_0 - Q_{-1}}{u} & \\
p_1 = \frac{P_1 - P_0}{u} & ; & q_1 = \frac{Q_1 - Q_0}{u} & \\
p_2 = \frac{P_2 - P_0}{2u} & ; & q_2 = \frac{Q_2 - Q_0}{2u} & \\
\text{etc.} & & \text{etc.} &
\end{array}$$

und ausserdem

$$p_0 = \frac{P_1 - P_{-1}}{2u} + \frac{2(P_1 - P_{-1}) - (P_2 - P_{-2})}{12u}$$

$$q_0 = \frac{Q_1 - Q_{-1}}{2u} + \frac{2(Q_1 - Q_{-1}) - (Q_2 - Q_{-2})}{12u}$$

dann sind allgemein $p_n$ und $q_n$ die stündlichen Bewegungen von $P$ und $Q$, oder es sind mit anderen Worten diese Coordinaten auf die Form

$$P_n = P_0 + p_n (T_n - T_0)$$

$$Q_n = Q_0 + q_n (T_n - T_0)$$

gebracht worden, wenn wir unter $P_n$ und $Q_n$ die Werthe von $P$ und $Q$ verstehen, die der Zeit $T_n$ angehören. Man kann diese Ausdrücke auf gebrochene Werthe von $n$, das heisst auf beliebige Zeiten innerhalb, und auch ein wenig ausserhalb des ganzen Intervals, welches sie umfassen, dadurch ausdehnen, dass man die anzuwendenden Werthe von $p_n$ und $q_n$ aus den beiden zunächst liegenden, für ganze Werthe von $n$ Geltung

habenden durch Interpolation berechnet. Es wird daher unter dieser Voraussetzung allgemein

$$P = P_0 + p\,(T - T_0)$$
$$Q = Q_0 + q\,(T - T_0)$$

wenn unter $T$ irgend eine Zeit verstanden wird, die innerhalb des ganzen Intervals liegt, für welches die Rechnung geführt worden ist, oder wenigstens dieses Interval nur wenig übersteigt.

## 22.

Setzen wir für jede der im vor. Art. mit $T_n$ bezeichneten Zeiten

$$T'_n = \frac{P_0}{p_n}\ ;\ U_n = Q_0 - q_n T'_n$$

oder mit Weglassung der Indices allgemein

$$T' = \frac{P_0}{p}\ ;\ U = Q_0 - q\,T'$$

verstehen unter $T_0$ die in Stunden und Decimaltheilen der Stunde auszudrückende, auf den ersten Meridian, das heisst auf den Meridian für welchen die angewandten Mondtafeln oder Ephemeriden gelten, bezogene wahre Zeit, für welche die Werthe $P_0$ und $Q_0$ gelten, so kann $T_0 - T'$ als die auf den ersten Meridian bezogene wahre Zeit der wahren Conjunction des Mondes und der Sonne auf der Ecliptik, und $U$ als der Werth der Coordinate $Q$ in dieser Conjunction definirt werden. Die allgemeinen Ausdrücke der Coordinaten des vor. Art. nehmen durch die Einführung von $T'$ und $U$ die folgende Form an,

$$P = \qquad p\,(T - T_0 + T')$$
$$Q = U + q\,(T - T_0 + T')$$

Setzen wir ferner um die Grundformeln für die Anwendung geschmeidiger zu machen

$$(10) \quad \ldots\ldots\ldots \quad \begin{cases} p = n \sin N \\ q = n \cos N \end{cases}$$

dann ist $n$ die stündliche Bewegung der gemeinschaftlichen Projection der Mittelpunkte der Sonne und des Mondes auf der im §. 1 eingeführten, durch den Mittelpunkt der Erde gehenden Ebene der $P$ und $Q$, und $N$ ist der Winkel, den diese Bewegung mit der Achse der $Q$, das ist mit dem Breitenkreise, macht. Führen wir ferner die durch die folgenden Ausdrücke zu bestimmenden Hülfsgrössen $\gamma$ und $\mu$ ein,

$$\gamma = U \sin N$$
$$\mu = 15\,(T_0 - T') - \frac{15}{n}\,U \cos N$$

aus welchen sich ergiebt, dass in der eben genannten Projectionsebene $\gamma$ der kleinste Abstand der gemeinschaftlichen Projection der Mittelpunkte der Sonne und des Mondes von dem Mittelpunkt der Erde, oder dem Anfangspunkt der Coordinaten $P$ und $Q$, und $\mu$ die in Graden ausgedrückte wahre Zeit des ersten Meridians ist, in welcher der kleinste Abstand statt findet. Nach der Substitution der Ausdrücke für $T'$ und $U$ wird

$$\left.\begin{aligned} \gamma &= Q_0 \sin N - P_0 \cos N \\ \mu &= 15\, T_0 - \tfrac{15}{n}\{Q_0 \cos N + P_0 \sin N\} \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

durch deren Anwendung die Berechnung von $T'$ und $U$ erspart wird. Führen wir endlich die Länge des Beobachtungsortes vom ersten Meridian an gezählt ein, nennen ihren Ausdruck in Graden $\lambda$, nehmen denselben positiv an, wenn der Beobachtungsort östlich vom ersten Meridian liegt, und setzen $15\, T = \tau$, so wird

$$\tau = t - \lambda$$

wenn $t$ die auch in Graden ausgedrückte wahre Zeit des Beobachtungsortes bedeutet. Durch Einführung dieser Grössen nehmen die allgemeinen Ausdrücke für die Coordinaten schliesslich die folgende Form an,

$$\begin{aligned} P &= -\gamma \cos N + \frac{t - \lambda - \mu}{15}\, n \sin N \\ Q &= \gamma \sin N + \frac{t - \lambda - \mu}{15}\, n \cos N \end{aligned}$$

in welcher sie in die Grundgleichungen substituirt werden sollen.

## 23.

In den Fällen, in welchen man die Mond- und Sonnenörter nicht aus Ephemeriden entnehmen kann, sondern sie aus den Mond- und Sonnentafeln berechnen muss, ist um die eben beschriebenen Rechnungen ausführen zu können nöthig, dass man sich im Voraus eine genäherte Kenntniss der Zeit der wahren Conjunction der Sonne und des Mondes auf der Ecliptik verschaffe, und die erhält man mit einer grösseren, wie hiefür nöthigen, Genauigkeit durch die ecliptischen Tafeln, die ich kürzlich publicirt habe *). Will man überhaupt in den Endresultaten der Berechnung einer Sonnenfinsterniss sich mit einer geringeren Genauigkeit begnügen, so geben diese ecliptischen Tafeln auch die übrigen,

*) Berichte über die Verhandlungen der Königl. Sächs. G. d. W. zu Leipzig. Mathematisch-Physische Classe. 1857.

im Vorstehenden erklärten Grössen. Die wahre Zeit der wahren Conjunction auf der Ecliptik, die oben mit $T_0 - T'$ bezeichnet worden ist, ist dort $T$ genannt, und auf den Meridian von Greenwich bezogen; die Grösse $U$ heisst dort $B$, und die Grössen $p$ und $q$ heissen dort $\varDelta L$ und $\varDelta B$. Diese ecliptischen Tafeln geben ferner $u'$ und $\sin f$, so wie die wahre Länge der Sonne und des Mondes in der wahren Conjunction, und enthalten auch die Hülfsmittel um bis auf den in denselben eingeführten Grad der Genauigkeit die Zeitgleichung zu finden, die zur Berechnung von $T$ gebraucht wird.

## 24.

In den strengen Grundformeln kommen noch die Grössen $\alpha'$, $\delta'$, $h$ vor, die sich auf den selenocentrischen Ort der Sonne beziehen, und die man in der Regel mit den analogen, sich auf den geocentrischen Sonnenort beziehenden Grössen verwechseln darf. Da aber bei den Längenbestimmungen durch Sonnenfinsternisse diese Verwechselung nicht statt finden darf, so werde ich zeigen, wie man diese Grössen mit aller wünschenswerthen Genauigkeit und mit wenig Mühe berechnen kann. Die Gleichungen des Art. 13 geben auf bekannte Art, wenn man bei den ersten Potenzen von $\lambda' - l'$ und $\beta'$ stehen bleibt, womit alles berücksichtigt ist, was merklich werden kann,

$$\alpha' = a' + \frac{\cos h}{\cos\delta'}(\lambda' - l') - \frac{\sin h}{\cos\delta'}\beta'$$
$$\delta' = d' + \sin h\,(\lambda' - l') + \cos h\,.\,\beta'$$
$$h = h_0 - \sin\delta'\,(\alpha' - a')$$

wenn $a'$, $d'$ und $h_0$ durch folgende Gleichungen bestimmt werden,

$$(12)\quad \ldots\ldots \begin{cases} tg\, a' = \cos\varepsilon\, tg\, l' \\ tg\, d' = tg\,\varepsilon \sin a' \\ \sin h_0 = \sin\varepsilon \cos a' \end{cases}$$

und sich also auf den geocentrischen Ort der Sonne beziehen. Substituirt man für $\lambda'$ und $\beta'$ ihre Ausdrücke (5), und nimmt auf die Ausdrücke (7) Rücksicht, so wird wenn man das Quadrat der Sonnenparallaxe übergeht,

$$(13)\quad \ldots \begin{cases} \Delta\alpha' = \pi' \frac{\cos h}{\cos d'} P - \pi' \frac{\sin h}{\cos d'} Q + b' \frac{\sin h}{\cos d'} \\ \Delta\delta' = \pi' \sin h\,.\,P + \pi' \cos h\,.\,Q - b' \cos h \\ \Delta h = \sin d'\,.\,\Delta\alpha' \end{cases}$$

worauf man

$$\left.\begin{aligned} \alpha' &= a' - \Delta\alpha' \\ \delta' &= d' - \Delta\delta' \\ h &= h_0 + \Delta h \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14)$$

erhält. In den Grundformeln kommt ferner der Bogen $\mu - \alpha'$ vor, wo $\mu$ die in Graden ausgedrückte Sternzeit des Beobachtungsortes bedeutet, nennen wir daher fortwährend die eben so ausgedrückte wahre Zeit des Beobachtungsortes $t$, so ist

$$\mu - a' = t$$

und folglich

$$\mu - \alpha' = t + \Delta\alpha' \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15)$$

Ich wiederhole, dass man mit Ausnahme der Längenbestimmungen immer $\Delta\alpha'$, $\Delta\delta'$ und $\Delta h$ gleich Null setzen darf.

## 25.

In den Aufgaben, in welchen die Polhöhe des Orts der Erscheinung der Sonnenfinsterniss eine der unbekannten, zu ermittelnden Grössen ist, verursacht die Abplattung der Erde, dass die oben abgeleiteten Grundformeln wegen der darin vorkommenden, von einander abhängigen Grössen $\varrho$ und $\varphi'$ auf eine indirecte Auflösung führen. Diese kann aber vermieden, und in eine directe dadurch verwandelt werden, dass man den Winkel einführt, welcher in der Ellipse, die die Meridiane der Erde bilden, dieselbe Bedeutung hat, wie die excentrische Anomalie in der Bewegung der Planeten. Nennt man die Abplattung der Erde $c$, und setzt

$$\begin{aligned} \varrho\cos\varphi' &= \cos\varphi_1 \\ \varrho\sin\varphi' &= (1-c)\sin\varphi_1 \end{aligned}$$

dann ist $\varphi_1$ diese excentrische Anomalie, und die zwei veränderlichen Grössen $\varrho$ und $\varphi'$ sind durch die Eine $\varphi_1$ ersetzt. Bezeichnet man mit $\varphi$ die Polhöhe, so wird

$$\begin{aligned} \varrho\cos\varphi' &= \frac{\cos\varphi}{\sqrt{\cos^2\varphi + (1-c)^2\sin^2\varphi}} \\ \varrho\sin\varphi' &= \frac{(1-c)^2\sin\varphi}{\sqrt{\cos^2\varphi + (1-c)^2\sin^2\varphi}} \end{aligned}$$

aus den vorhergehenden Gleichungen geht nun hervor, dass

$$\begin{aligned} \cos\varphi_1 &= \frac{\cos\varphi}{\sqrt{\cos^2\varphi + (1-c)^2\sin^2\varphi}} \\ \sin\varphi_1 &= \frac{(1-c)\sin\varphi}{\sqrt{\cos^2\varphi + (1-c)^2\sin^2\varphi}} \end{aligned}$$

wird, und diese Gleichungen zeigen die Realität der obigen, indem die Summe der Quadrate der rechten Seite derselben, gleich wie die der linken gleich Eins wird. Zugleich folgt aus diesen Gleichungen die einfache Relation

$$tg\,\varphi = \frac{tg\,\varphi_1}{1-c}$$

wodurch man nachdem $\varphi_1$ gefunden worden ist, zu $\varphi$ übergehen kann. Für jeden bestimmten Werth von $c$ kann man sich eine Tafel berechnen, die den Unterschied $\varphi - \varphi_1$ giebt, und in der Annahme $c = \frac{1}{300}$ habe ich die hier folgende Tafel berechnet.

| $\varphi_1$ | $\varphi-\varphi_1$ | $\varphi_1$ | $\varphi_1$ | $\varphi-\varphi_1$ | $\varphi_1$ | $\varphi_1$ | $\varphi-\varphi_1$ | $\varphi_1$ | $\varphi_1$ | $\varphi-\varphi_1$ | $\varphi_1$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0° | 0'0 | 90° | 12° | +2'3 | 78° | 24° | +4'3 | 66° | 36° | +5'5 | 54° |
| 1 | +0.2 | 89 | 13 | 2.5 | 77 | 25 | 4.4 | 65 | 37 | 5.6 | 53 |
| 2 | 0.4 | 88 | 14 | 2.7 | 76 | 26 | 4.5 | 64 | 38 | 5.6 | 52 |
| 3 | 0.6 | 87 | 15 | 2.9 | 75 | 27 | 4.6 | 63 | 39 | 5.6 | 51 |
| 4 | 0.8 | 86 | 16 | 3.1 | 74 | 28 | 4.7 | 62 | 40 | 5.6 | 50 |
| 5 | 1.0 | 85 | 17 | 3.2 | 73 | 29 | 4.9 | 61 | 41 | 5.7 | 49 |
| 6 | 1.2 | 84 | 18 | 3.4 | 72 | 30 | 5.0 | 60 | 42 | 5.7 | 48 |
| 7 | 1.4 | 83 | 19 | 3.5 | 71 | 31 | 5.1 | 59 | 43 | 5.7 | 47 |
| 8 | 1.6 | 82 | 20 | 3.7 | 70 | 32 | 5.2 | 58 | 44 | 5.7 | 46 |
| 9 | 1.8 | 81 | 21 | 3.8 | 69 | 33 | 5.3 | 57 | 45 | 5.7 | 45 |
| 10 | 2.0 | 80 | 22 | 4.0 | 68 | 34 | 5.3 | 56 | | | |
| 11 | 2.2 | 79 | 23 | 4.1 | 67 | 35 | 5.4 | 55 | | | |
| 12 | 2.3 | 78 | 24 | 4.3 | 66 | 36 | 5.5 | 54 | | | |

Wenn $\varphi$ negativ ist, so ist auch $\varphi - \varphi_1$ negativ.

Setzen wir nun

$$N' = N - h$$

und berücksichtigen die Auseinandersetzungen dieses und des vor. §. so gehen die Grundgleichungen (6) in die folgenden über,

$$(16)\begin{cases} u = u' - (1+x)\{(1-c)\sin\varphi_1 \sin\delta' + \cos\varphi_1 \cos\delta' \cos(t+\Delta\alpha')\}tg\,f \\ u\sin\theta = -\gamma\cos N' + \frac{t-\lambda-\mu}{15} n \sin N' - (1+x)\cos\varphi_1 \sin(t+\Delta\alpha') \\ u\cos\theta = \gamma\sin N' + \frac{t-\lambda-\mu}{15} n\cos N' \\ \qquad - (1+x)\{(1-c)\sin\varphi_1\cos\delta' - \cos\varphi_1 \sin\delta' \cos(t+\Delta\alpha')\} \end{cases}$$

die aber in ihrer Anwendung auf die Lösung der aufzustellenden Aufgaben meistens in mehreren ihrer Bestandtheile abgekürzt werden dürfen.

## 26.

Wenden wir uns jetzt zu den Grundgleichungen des Art. 15. Nehmen wir wieder die im Art. 8 eingeführten Bezeichnungen $A$ und $B$ auf, nemlich

$$A = P\cos f - Z\sin f\sin\theta_1$$
$$B = Q\cos f - Z\sin f\cos\theta_1$$

dann ergeben sich aus den Artt. 9 und 10 die folgenden Gleichungen

$$A\{\cos\theta_1\cos\theta_1'' + \sin\theta_1\sin\theta_1''\cos f\}$$
$$-B\{\sin\theta_1\cos\theta_1'' - \cos\theta_1\sin\theta_1''\cos f\} = P''\cos f,$$
$$-A\{\cos\theta_1\sin\theta_1'' - \sin\theta_1\cos\theta_1''\cos f\}$$
$$+B\{\sin\theta_1\sin\theta_1'' + \cos\theta_1\cos\theta_1''\cos f\} = Q''\cos f$$

Eliminirt man hieraus $A$ und $B$, so folgt

$$P'' = P\{\cos\theta_1\cos\theta_1'' + \sin\theta_1\sin\theta_1''\cos f\}$$
$$-\{Q\sin\theta_1\cos\theta_1'' - \cos\theta_1\sin\theta_1''\cos f\} - Z\sin f\sin\theta_1''$$
$$Q'' = -P\{\cos\theta_1\sin\theta_1'' - \sin\theta_1\cos\theta_1''\cos f\}$$
$$+Q\{\sin\theta_1\sin\theta_1'' + \cos\theta_1\cos\theta_1''\cos f\} - Z\sin f\cos\theta_1''$$

und hieraus, da $\theta_1'' = \theta'' + h''$ ist,

$$P''\cos h'' - Q''\sin h'' = P\{\cos\theta_1\cos\theta'' + \sin\theta_1\sin\theta''\cos f\}$$
$$- Q\{\sin\theta_1\cos\theta'' - \cos\theta_1\sin\theta''\cos f\} - Z\sin f\sin\theta''$$
$$P''\sin h'' + Q''\cos h'' = -P\{\cos\theta_1\sin\theta'' - \sin\theta_1\cos\theta''\cos f\}$$
$$+Q\{\sin\theta_1\sin\theta'' + \cos\theta_1\cos\theta''\cos f\} - Z\sin f\cos\theta''$$

Setzen wir um diese Ausdrücke abzukürzen

$$\nu\sin V = \sin\theta''\cos f\,;\quad \nu'\sin V' = \sin\theta''$$
$$\nu\cos V = \cos\theta''\quad;\quad \nu'\cos V' = \cos\theta''\cos f$$

und substituiren sie in die Grundgleichungen des Art. 15, so bekommen wir, da

$$\theta_1 = \theta + h$$

ist,

$$u''\sin\theta'' = P\nu\cos(h+\theta-V) - Q\nu\sin(h+\theta-V) - \varrho\cos\varphi'\sin t''$$
$$u''\cos\theta'' = P\nu'\sin(h+\theta-V') + Q\nu'\cos(h+\theta-V')$$
$$-\varrho\{\sin\varphi'\cos\delta'' - \cos\varphi'\sin\delta''\cos t''\}$$

wo

$$u'' = s + Z\sin f\,;\quad t'' = \mu - \alpha''$$

gesetzt worden ist. Man erkennt leicht dass

$$u'' = u'\cos f$$

Der in Graden ausgedrückte Stundenwinkel des Punkts, in welchem die Ränderberührung statt findet, ist $t''$, und nennt man wie vorher $a'$ die grade Aufsteigung des Sonnenmittelpunkts, so erhält man

$$t = t'' + \alpha'' - a' = t'' + \alpha'' - \alpha' - \Delta\alpha'$$

wo wieder $t$ die in Graden ausgedrückte wahre Zeit ist.

## § 27.

Wir können nun die Strahlenbrechung und die Abplattung der Erde in den eben erhaltenen Gleichungen auf dieselbe Weise berücksichtigen wie oben, und auch die Ausdrücke des Art. 22 für $P$ und $Q$ substituiren. Hiemit entsteht

$$(17)\quad \begin{cases} u'' \sin\theta'' = -\gamma\nu\cos N'' + \frac{\tau-\mu}{15} n\nu \sin N'' - (1+x)\cos\varphi_1 \sin t'' \\ u''\cos\theta'' = \quad \gamma\nu'\sin N_1'' + \frac{\tau-\mu}{15} n\nu' \cos N_1'' \\ \qquad\qquad - (1+x)\{(1-c)\sin\varphi_1\cos\delta'' - \cos\varphi_1 \sin\delta'' \cos t''\} \end{cases}$$

wo zur Abkürzung

$$N'' = N' - \theta + V \;;\; N_1'' = N' - \theta + V'$$

gesetzt ist *). Betrachten wir nun das sphärische Dreieck zwischen den beiden Punkten $(\alpha'', \delta'')$, $(\alpha', \delta')$ und dem Nordpol des Aequators, so findet man nach Anleitung des Art. 9 die folgenden Relationen.

$$\begin{aligned} \cos\delta''\sin\theta'' &= \cos\delta'\sin\theta \\ \cos\delta''\cos\theta'' &= -\sin\delta'\sin f + \cos\delta'\cos f\cos\theta \\ \sin\delta' &= \quad \cos f\sin\delta'' - \sin f\cos\delta''\cos\theta'' \end{aligned}$$

woraus

$$\sin(A-\theta) = tg\, f\, tg\,\delta' \sin A$$

$$\sin(\delta'' - B) = \frac{\cos B}{\cos f}\sin\delta'$$

folgt, nachdem die Hülfswinkel $A$ und $B$ aus folgenden Gleichungen berechnet worden sind,

$$tg\, A = \cos f\, tg\, \theta''$$

$$tg\, B = tg\, f \cos\theta''$$

Hieraus ergeben sich $\theta$ und $\delta''$, wenn $\theta''$ bekannt ist. Eine Abkürzung dieser Gleichungen giebt

$$\sin(\theta'' - \theta) = tg\, f\, tg\,\delta' \sin\theta''$$

$$\delta'' = \delta' + B$$

---

*) Setzt man $\cos f = 1$, so wird $\nu = \nu' = 1$,
$N'' = N_1'' = N' - \theta + \theta''$ und $u'' = u'$.

Endlich bekommen wir noch

$$\sin(\alpha'' - \alpha') = \sin f \frac{\sin \theta''}{\cos \delta'},$$

welcher Ausdruck aus demselben Dreieck hervorgeht.

## §. 5. Ermittelung der Grenzcurven einer Sonnenfinsterniss auf der Oberfläche der Erde.

28.

Die Gegend der Erdoberfläche, auf welcher eine Sonnenfinsterniss sichtbar ist, wird im Allgemeinen von vier verschiedenen Curven begrenzt, die einander berühren, und nach den Weltgegenden, in welchen sie die Sonnenfinsterniss begrenzen, am Angemessensten die nördliche, die südliche, die westliche, und die östliche Grenzcurve benannt werden. Alle diese Curven finden in der That statt, wenn der Schattenkegel nicht nördlich oder südlich über die Erde hinausragt. Da in der mehrmals angewandten, durch den Erdmittelpunkt gelegten, Projectionsebene der Halbmesser der Erde $= 1$ ist, hiegegen der Halbmesser des Schattenkegels für die äusseren Berührungen der Ränder $u'$ höchstens $= 0{,}576$ werden kann, so ist eine vollständige Einhüllung des Erdkörpers in den Schattenkegel unmöglich, und es muss vielmehr entweder im Norden und Süden der Erde zugleich, oder in Einer dieser beiden Gegenden die Sonnenfinsterniss ihr Ende finden. Wenn der letztere Fall eintritt, so berührt entweder der Schattenkegel in seinem Vorüberziehen auf der Erdoberfläche den nördlichsten oder südlichsten Punkt, den er überhaupt treffen kann, oder er ragt darüber, und somit über den Erdkörper selbst hinaus. In jenem Falle wird bez. die nördliche oder die südliche Grenzcurve sich in einen Punkt verwandeln und in diesem imaginär werden, es vereinigt sich daher die westliche Grenzcurve mit der östlichen zu Einer Curve, die ich in diesem Falle die westlich-östliche Grenzcurve nennen werde.

Innerhalb der eben bezeichneten Curven, die die ganze Sonnenfinsterniss begrenzen, kann man andere ähnliche ziehen, die die Grenzen bestimmen, bis zu welchen eine gewisse Grösse oder Phase der Sonnenfinsterniss als grösste Phase gesehen wird, z. B. die Verfinsterung sich nur bis auf $\frac{1}{12}$, $\frac{2}{12}$, etc. des Sonnendurchmessers erstreckt. Ferner kann man ähnliche Curven angeben, die den Gürtel der Erd-

oberfläche abgrenzen, innerhalb welches die Sonnenfinsterniss total oder bez. ringförmig gesehen wird, und endlich innerhalb dieser Curven diejenige, auf welcher sie central wird.

Es ist aus dem Vorhergehenden schon erkennbar, dass die Gleichungen dieser Curven für diese verschiedenen Fälle dieselben sein müssen, und sich nur durch die verschiedenen darin zu substituirenden numerischen Werthe von $u'$ und $\sin f$ von einander unterscheiden können. Wir brauchen daher im Folgenden nur ausdrücklich auf die Grenzcurven der Sonnenfinsterniss an sich Rücksicht zu nehmen.

### a) Ermittelung der Gleichungen für die nördliche und die südliche Grenzcurve.

#### 29.

Wenn man bestimmte Werthe von $\varphi_1$ und $\lambda$ in die Gleichungen (16) substituirt, so geben sie im Allgemeinen, das heisst wenn nicht etwa für den Ort, welcher den substituirten Werthen von $\varphi_1$ und $\lambda$ zugehört, die Sonnenfinsterniss gar nicht statt findet, zwei Werthe von $t$, die die Zeiten des Anfangs und des Endes der Finsterniss an dem Orte sind, dessen geographische Lage durch $\varphi_1$ und $\lambda$ bestimmt wird. Dadurch dass wir den Werth von $u'$ bei unveränderten Werthen von $\varphi_1$ und $\lambda$ kleiner und kleiner annehmen, können wir bewirken, dass die beiden Werthe von $t$ die aus diesen Gleichungen hervorgehen, einander näher und näher rücken, und zuletzt in Einen Werth übergehen. Dieser Werth von $t$ ist gewiss die Zeit, in welcher am Orte ($\varphi_1$, $\lambda$) die grösste Phase der Sonnenfinsterniss gesehen wird, und der Werth von $u'$ welcher, um diesen Werth von $t$ zu erhalten, hat substituirt werden müssen, bedingt die Grösse der grössten Phase. Es ist zugleich dieser Werth von $u'$ der kleinste, welcher reelle Werthe von $t$ geben kann, und wir müssen daher um die Bedingung der grössten Phase an einem gegebenen Orte zu erlangen das Minimum von $u'$ in Bezug auf $t$ suchen. Wenn wir die Bedingungsgleichung für dieses Minimum erhalten haben, und darauf für irgend einen unveränderten Werth von $u'$ die zusammen gehörigen Werthe von $\varphi_1$ und $\lambda$ suchen, die derselben, und zugleich den Gleichungen (16) Gnüge leisten, so erhalten wir die Curve auf der Oberfläche der Erde, auf welcher die dem substituirten Werthe von $u'$ entsprechende Phase als grösste Phase gesehen wird, und substituiren wir den Werth

von $u'$, welcher den äusseren Berührungen der Ränder entspricht, so werden wir die nördliche und südliche Grenzcurve der Sonnenfinsterniss überhaupt bekommen.

30.

Da das Minimum von $u'$ vermöge der Zusammensetzung dieser Grösse durch das Minimum von $f$ bedingt wird, so dürfen wir statt des eben verlangten Minimums das Minimum von $f$ in Bezug auf $t$ suchen. Differentiiren wir zu dem Ende die Gleichungen (16), und setzen nach den Differentiationen $df = 0$, so bekommen wir zuerst, wenn wir das unbedeutende Product von $dx$ in $tg\,f$ übergehen,

$$du = (1 + x)\,tg\,f \cos\varphi_1 \cos\delta' \sin(t + \Delta\alpha')\,dt$$

$$du \sin\theta + d\theta\, u \cos\theta = \left\{\frac{n}{\varkappa}\sin N' - (1 + x)\cos\varphi_1 \cos(t + \Delta\alpha) - \frac{dx}{dt}\cos\varphi_1 \sin(t + \Delta\alpha')\right\} dt$$

$$du \cos\theta - d\theta\, u \sin\theta = \left\{\frac{n}{\varkappa}\cos N' - (1 + x)\cos\varphi_1 \sin\delta' \sin(t + \Delta\alpha') - \frac{dx}{dt}[(1 - c)\sin\varphi_1 \cos\delta' - \cos\varphi_1 \sin\delta' \cos(t + \Delta\alpha)\right\} dt$$

wo

$$\varkappa = \frac{15\,(3600'')}{206265''}$$

ist, weil $t$ in Graden ausgedrückt angenommen worden ist. Eliminiren wir die Differentiale aus diesen Gleichungen, so bekommen wir

$$\left\{\begin{array}{l}\frac{n}{\varkappa}\sin N' - (1 + x)\cos\varphi_1 \cos(t + \Delta\alpha') \\ \qquad - \frac{dx}{dt}\cos\varphi_1 \sin(t + \Delta\alpha')\end{array}\right\}\sin\theta$$

$$+ \left\{\begin{array}{l}\frac{n}{x}\cos N' - (1 + x)\cos\varphi_1 \sin\delta' \sin(t + \Delta\alpha') \\ \qquad - \frac{dx}{dt}[(1 - c)\sin\varphi_1 \cos\delta' - \cos\varphi_1 \sin\delta' \cos(t + \Delta\alpha')]\end{array}\right\}\cos\theta$$

$$= (1 + x)\,tg\,f \cos\varphi_1 \cos\delta' \sin(t + \Delta\alpha') \quad \ldots \ldots \quad (18)$$

welches die gesuchte Bedingungsgleichung ist.

31.

In der Anwendung dieser Bedingungsgleichung auf die Ermittelung der Grenzcurven kann mehreres unbedenklich übergangen werden, da man die Punkte dieser Curven doch nur auf Minuten oder höchstens auf Zehntelminuten berechnen wird, indem die unregelmässige Gestalt der Erdoberfläche und der Erdschichten eine genauere Berechnung illusorisch macht. Da das Maximum von $x$ nur 0.00035 ist, so kann man den Factor $1 + x$ übergehen; da $\Delta\alpha'$ höchstens $14''$ werden kann, so kann man diese

Grösse auch übergehen, und aus demselben Grunde statt $\delta'$ und $h$, die durch die Gleichungen (12) zu bestimmenden Bögen $d'$ und $h_0$ anwenden, die sich auf den geocentrischen Ort der Sonne beziehen. Endlich kann man auch bis auf die Fälle, wo der zu bestimmende Curvenpunkt im Horizont liegt, den Differentialquotienten von $x$ nach $t$ übergehen, da er schnell abnimmt, so wie der Curvenpunkt über dem Horizonte liegt.

Um die Bedingungsgleichung möglichst zusammen zu ziehen führe ich zuerst statt $\theta$ den durch die folgende Gleichung davon abhängigen Bogen $\psi$ ein,

$$\theta = \psi + N'$$

wodurch sie

$$\left\{\begin{array}{l}\frac{n}{x} - \cos\varphi_1[\sin N'\cos t + \cos N'\sin\delta'\sin t] \\ - \frac{dx}{dt}[\sin\varphi_1\cos N'\cos\delta' + \cos\varphi_1(\sin N'\sin t - \cos N'\sin\delta'\cos t)]\end{array}\right\}\cos\psi$$

$$-\left\{\begin{array}{l}\cos\varphi_1[\cos N'\cos t - \sin N'\sin\delta'\sin t] \\ - \frac{dx}{dt}[\sin\varphi_1\sin N'\cos\delta' - \cos\varphi_1(\cos N'\sin t + \sin N'\sin\delta'\cos t)]\end{array}\right\}\sin\psi$$

$$= tg f\cos\varphi_1\cos\delta'\sin t$$

wird, wenn wir auch das Product der Strahlenbrechung mit der Abplattung übergehen.

Da in den Sonnenfinsternissen $\frac{n}{x}$ viel grösser ist, wie die übrigen in dieser Gleichung enthaltenen Glieder, so kann $\psi$ sich während der grössten Phase nie sehr weit von $90^0$ und $270^0$ entfernen, und es ist also immer $\sin\psi$ nahe $= \pm 1$. Aus dieser Ursache dürfen wir das kleine Glied rechter Hand mit $\pm\sin\psi$ multipliciren, wenn wir das obere Zeichen anwenden, wenn $\psi$ im ersten, und das untere wenn $\psi$ im zweiten Halbkreise liegt. Die obige Gleichung steht nach dieser Abänderung wie folgt,

$$\left\{\begin{array}{l}\frac{n}{x} - \cos\varphi_1[\sin N'\cos t + \cos N'\sin\delta'\sin t] \\ - \frac{dx}{dt}[\sin\varphi_1\cos N'\cos\delta' + \cos\varphi_1(\sin N'\sin t - \cos N'\sin\delta'\cos t)]\end{array}\right\}\cos\psi$$

$$-\left\{\begin{array}{l}\cos\varphi_1[\cos N'\cos t - (\sin N'\sin\delta' \mp tg f\cos\delta')\sin t] \\ - \frac{dx}{dt}[\sin\varphi_1\sin N'\cos\delta' - \cos\varphi_1(\cos N'\sin t + \sin N'\sin\delta'\cos t)]\end{array}\right\}\sin\psi = 0$$

Da der obigen Bemerkung zufolge die Strahlenbrechung in dieser Gleichung nur in den Fällen berücksichtigt zu werden braucht, wo es sich um Curvenpunkte handelt, die im Horizont liegen, und in den zunächst folgenden Untersuchungen diese ausgeschlossen werden sollen, so kön-

nen wir vorläufig die von der Strahlenbrechung abhängigen Glieder weglassen. Bestimmen wir nun um die Gleichung zusammen zu ziehen die Hülfswinkel $g$, $G$, $k$, $K$ durch folgende Gleichungen

$$\left.\begin{aligned}\sin g \sin G &= \cos f \sin N' \sin \delta' \mp \sin f \cos \delta' \\ \sin g \cos G &= \cos f \cos N' \\ \cos g \quad &= \cos f \sin N' \cos \delta' \pm \sin f \sin \delta' \\ \sin k \sin K &= \sin N' \\ \sin k \cos K &= \cos N' \sin \delta' \\ \cos k \quad &= \cos N' \cos \delta'\end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (19)$$

und lassen die Strahlenbrechung weg, so wird die Bedingungsgleichung für die grösste Phase

$$tg\psi = \frac{\frac{n}{x} - \cos\varphi_1 \sin k \sin(K+t)}{\cos\varphi_1 \sin g \cos(G+t)} \cos f$$

wo auch in den Anwendungen der Factor $\cos f = 1$ gesetzt werden darf. Dass $\psi$ sich nicht weit von $90^0$ oder $270^0$ entfernen kann, ist auch leicht aus seiner geometrischen Bedeutung zu erkennen. Da $\theta$ der vom Abweichungskreise an gezählte Positionswinkel des Berührungspunkts der Ränder, und $N'$ der Winkel ist, den die Mondbahn mit dem Abweichungskreise macht, so ist $\psi$ der von der Mondbahn an gezählte Positionswinkel, und dieser kann nothwendiger Weise in der grössten Phase sich nicht viel von $90^0$ oder $270^0$ entfernen; die grösste Abweichung von diesen Mittelwerthen die vorkommen kann beträgt ohngefähr $20^0$, ist aber in vielen Fällen kleiner, und kann in einzelnen Punkten Null werden.

## 32.

Durch die Substitutionen (19) kann man auch die Gleichungen (16) zur Anwendung geeigneter machen. Nachdem man darin aus denselben Gründen wie oben den Factor $1 + x$ und $\Delta\alpha'$ weggelassen hat, geben sie durch Multiplication mit $\sin N'$ und $\cos N'$, und durch Additionen zuerst

$$\begin{aligned} u \sin\psi &= -\gamma - \cos\varphi_1 \{\cos N' \sin t + \sin N' \sin \delta' \cos t\} \\ &\quad + (1 - c) \sin\varphi_1 \sin N' \cos \delta' \\ u \cos\psi &= \frac{t - \lambda - \mu}{15} n + \cos\varphi_1 \{\cos N' \sin \delta' \cos t - \sin N' \sin t\} \\ &\quad - (1 - c) \sin\varphi_1 \cos N' \cos \delta' \end{aligned}$$

Eliminirt man aus der ersteren dieser $u$ durch die erste (16), so wird sie, nachdem man auch hier wie oben in den kleinen mit $tg f$ multiplicirten Gliedern $\pm 1$ für $\sin\psi$ gesetzt hat,

$$u'\sin\psi = -\gamma + (1-c)\sin\varphi_1(\sin N'\cos\delta' \pm tg f \sin\delta')$$
$$-\cos\varphi_1\{\cos N'\sin t + (\sin N'\sin\delta' \mp tg f\cos\delta')\cos t\}$$

Führt man nun hier $g$, $G$, $k$, $K$ durch die Gleichungen (19) ein, so werden unsere Gleichungen

$$(20)\begin{cases} u'\sin\psi = -\gamma + (1-c)\sin\varphi_1\cos g\sec f - \cos\varphi_1\sin g\sin(G+t)\sec f \\ u\cos\psi = \frac{t-\lambda-\mu}{15}n - (1-c)\sin\varphi_1\cos k + \cos\varphi_1\sin k\cos(K+t) \end{cases}$$

die in Verbindung mit der Gleichung der grössten Phase die nördliche und die südliche Grenzcurve geben.

## 33.

Um irgend einen Punkt dieser Curven zu erhalten müss man eine der in den vorstehenden Gleichungen implicite oder explicite vorkommenden Grössen beliebig annehmen, und es scheint als wäre dazu die Zeit des ersten Meridians, oder $t-\lambda$ die geeigneteste, weil man dann die Werthe der Hülfsgrössen sogleich genau berechnen kann. Aber ich kann damit nicht einstimmen, weil man durch diese Annahme genöthigt wird zwei Bögen durch ihren Sinus oder Cosinus bestimmen zu müssen, während die Beschaffenheit der Aufgabe eine solche Bestimmung von nur Einem Bogen verlangt. Durch die Zugrundelegung der Zeit des ersten Meridians wird daher eine Unsicherheit in die Auflösung hineingelegt, die nicht darin vorhanden ist. Wenn man irgend eine andere Grösse der Auflösung zu Grunde legt, so kann man zwar die Hülfsgrössen gleich Anfangs nicht mit der grössten Genauigkeit erhalten, allein man kann dieses durch eine zweite Annäherung immer bewirken, wenn man will. Uebrigens ist die Veränderung der Hülfsgrössen während der Dauer einer Finsterniss so klein, dass man sie bei der Berechnung der Grenzcurven auf Minuten übergehen kann. Eine andere Grösse, die man der Berechnung der Curvenpunkte zu Grunde legen kann ist $\varphi_1$, aber sie ist wenigstens nicht für alle Punkte geeignet, und es müssen jedenfalls die Maxima und Minima von $\varphi_1$ und die Curvenpunkte die denselben nahe liegen ausgeschlossen werden, weil in diesen Punkten eine kleine Aenderung von $\varphi_1$ eine grosse von $\lambda$ nach sich zieht, und hiedurch auch eine Unsicherheit des Resultats erzeugt wird, die nicht nothwendiger Weise vorhanden ist. Als die geeigneteste Grösse, die man dieser Berechnung zu Grunde legen kann bezeichne ich daher den Stun-

denwinkel $t$, weil dieser im Allgemeinen kein Maximum oder Minimum hat, sondern sich auf der Curve durch den ganzen Umkreis bewegt. Wenn die zu berechnende Curve in der Nähe eines der beiden Pole des Aequators liegt, dann kann diese Eigenschaft eine Ausnahme erleiden, und $t$ kann sich nicht mehr durch den ganzen Umkreis bewegen, sondern ein Maximum und ein Minimum annehmen. In diesen Ausnahmefällen kann man bei den betreffenden Punkten der Curve $\varphi_1$ zu Grunde legen, da das Maximum oder Minimum von $\varphi_1$ nicht mit dem von $t$ zusammenfällt.

Ich werde daher der Rechnung zuerst $t$ zu Grunde legen und dem gemäss die im Vorhergehenden entwickelten Formeln einrichten. Ich setze zuerst zur Abkürzung

$$\alpha = (1 - c)\cos g \quad ; \quad \beta = \frac{15}{n}(1 - c)\cos k$$

und dann für eine Reihe von Werthen von $t$

$$\eta = \sin g \sin(G + t) \quad , \quad \theta = \quad \sin k \sin(K + t)$$

$$\eta_1 = \sin g \cos(G + t) \quad , \quad \theta_1 = \frac{15}{n} \sin k \cos(K + t)$$

Berechnet man hierauf $a$ und $A$ durch die Gleichungen

$$a \sin A = \eta$$

$$a \cos A = \alpha$$

so giebt die erste Gleichung (20)

$$\sin(\varphi_1 - A) = \frac{\gamma + u' \sin\psi}{a} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (21)$$

und die Gleichung für die grösste Phase wird zufolge des Art 31.

$$tg\,\psi = \frac{\frac{n}{\varkappa} - \theta\cos\varphi_1}{\eta_1 \cos\varphi_1} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (22)$$

Ich führe an dass

$$\log\varkappa = 9.41797$$

und für $c = \frac{1}{800}$

$$\log(1 - c) = 9.99855$$

ist. Die Rechnung ist indirect, weil man schon $\sin\psi$ für die Gleichung für $\varphi_1$ braucht, während $\psi$ selbst erst nachher durch $\varphi_1$ erlangt wird. Man kann die Rechnung damit anfangen, dass man in der Gleichung für $\varphi_1$ entweder $+1$ oder $-1$ für $\sin\psi$ setzt, und hieraus einen genäherten Werth von $\varphi_1$ bekommt, mit welchem man durch (22) einen in der Regel schon sehr nahe richtigen Werth von $\psi$ bekommt, mit welchem man die Berechnung von $\varphi_1$ durch (21) wiederholen muss. Wenn man

eine Reihe von Curvenpunkten berechnet, so kann man für jeden folgenden Punkt aus den vorhergehenden durch einfache Berücksichtigung der Differenzen der diesen zukommenden, bereits erhaltenen, Werthe von $\psi$ den in (21) für den folgenden Punkt zu substituirenden Werth sehr nahe richtig erhalten.

Setzt man ferner

$$\alpha_1 = (1-c)\, tg f \sin\delta', \quad \beta_1 = tg f \cos\delta' \cos t$$

so wird

$$u = u' - \alpha_1 \sin\varphi_1 - \beta_1 \cos\varphi_1$$

statt dessen man auch in vielen Fällen $u = u'$ annehmen darf. Die zweite Gleichung (20) giebt hierauf

(23) . . . $\tau = \mu + \beta \sin\varphi_1 - \theta_1 \cos\varphi_1 + \frac{15}{n} u \cos\psi$

wenn wieder $\tau$ die auf den ersten Meridian sich beziehende und in Graden ausgedrückte Zeit bezeichnet, und hiemit erhält man

$$\lambda = t - \tau$$

Nimmt man in den vorstehenden Formeln $\psi$ im ersten Halbkreise, und wendet demzufolge die oberen Zeichen in (19) an, so bekommt man, vorausgesetzt dass $u$ positiv ist, die nördliche Grenzcurve, nimmt man dagegen $\psi$ im zweiten Halbkreise, und wendet in (19) die unteren Zeichen an, so ergiebt sich die südliche Grenzcurve. Wenn $u$ negativ ist findet das Entgegengesetzte statt.

## 34.

Das letzte Glied der Gleichung (23) ist für die Grenzcurven der inneren Ränderberührungen zuweilen so klein, dass man es übergehen kann, in welchem Falle gemeiniglich die Berechnung von $\psi$ ganz übergangen werden kann. Für die Grenzcurven der äusseren Ränderberührungen kann dieses Glied aber den Werth von $6^0$ erreichen, und also sehr merklich werden. Die Abplattung der Erde kann auf die Curven die in der Nähe der Pole des Aequators liegen sehr grosse Wirkung äussern, sie um ganze Grade verändern, und sie sogar unmöglich machen, während sie ohne Berücksichtigung der Abplattung sich als möglich herausstellen.

Die eben entwickelten Formeln geben, den Fall ausgenommen wo $t$ eines Maximums und eines Minimums fähig ist, die in Rede stehenden Grenzcurven immer mit grösstmöglicher Genauigkeit. Zwar wird die

Breite $\varphi_1$ durch einen Sinus bestimmt, und also minder sicher erhalten wenn dieser Sinus nahe gleich Eins ist, allein dieses liegt in der Natur der Sache und kann in dieser Aufgabe nicht vermieden werden. Um dieses zu zeigen, suchen wir die geometrische Bedeutung von $g$ und $G$, wobei wir jedoch von dem kleinen Bogen $f$ absehen, welcher auf das hier zu ermittelnde Resultat ohne Einfluss ist. Die Gleichungen (19) geben unter dieser Bedingung

$$\begin{aligned} \sin g \sin G &= \sin N' \sin \delta' \\ \sin g \cos G &= \cos N' \\ \cos g \quad &= \sin N' \cos \delta' \end{aligned}$$

und zeigen, dass in dem rechtwinklichen sphärischen Dreieck, welches vom Aequator, dem durch den Punkt $(\alpha', \delta')$ — oder dem Mittelpunkt der Sonne — gehenden Abweichungskreise und der geocentrischen Mondbahn gebildet wird, $G$ die dem Aequator angehörende Seite, und $g$ den an dieser Seite anliegenden Winkel bedeutet. Verlängern wir nun diese Cathete und die Hypotenuse dieses Dreiecks bis sie den Meridian des Orts schneiden, der dem Curvenpunkt $(\varphi_1, \lambda)$ angehört, so ist in dem nun entstandenen Dreieck, wenn wir hier auch von der Abplattung der Erde absehen, $A$ die Cathete, die ein Theil dieses Meridians ist, $\sin(\varphi_1 - A)$ kann daher nur in den Fällen nach $\pm 1$ werden, wo die Breite $\varphi_1$ des Curvenpunkts entweder sehr nördlich oder sehr südlich ist. In diesen Fällen trifft aber die auf der Oberfläche des Schattenkegels von der Spitze desselben bis an den Punkt $(\varphi_1, \lambda)$ gezogene grade Linie die Erdoberfläche unter einem sehr spitzen Winkel, und dieser Durchschnittspunkt, welcher die Auflösung der Aufgabe bildet, kann an sich nur mit geringerer Sicherheit gefunden werden, wie in den anderen Fällen. Durch die Substitution aller Werthe von $t$, welche reelle Auflösungen geben, in die Ausdrücke des vor. Art. bekommt man für die bez. Grenzcurve eine Curve, die in sich selbst zurückkehrt, denn diese Ausdrücke geben alle Durchschnittspunkte der Oberfläche des Schattenkegels mit der Erdoberfläche. Für beiläufig die Hälfte der Ausdehnung dieser Curve befindet sich aber die Sonne unter dem Horizonte, und diese Hälfte der Curve ist daher keine eigentliche Grenzcurve. Es ist aber klar, dass man um den Theil der Curve zu erhalten, welcher die eigentliche Grenzcurve ist, nur für $t$ die Werthe substituiren muss, die den Tagebögen der betreffenden Oerter angehören, und hiemit lässt sich also schon die eigentliche Grenzcurve von dem übrigen Theil absondern,

ich werde indess weiter unten die Grenzpunkte dieser Curven bestimmter entwickeln.

35.

Die Gleichungen

$$a \sin A = \sin g \sin (G + t)$$
$$a \cos A = \alpha$$

geben für das Minimum von $a$ den Ausdruck

$$a = \alpha$$

und wenn also ohne Rücksicht auf das Zeichen

$$\alpha > \gamma + u' \sin \psi$$

so kann zufolge der Gleichung (21) $\sin(\varphi_1 - A)$ nicht $= \pm 1$ werden. Der Stundenwinkel $t$ kann in diesem Falle den ganzen Umkreis durchlaufen, wobei immer reelle Werthe von $\varphi_1$ entstehen. Wenn dagegen

$$\alpha < \gamma + u' \sin \psi$$

ist, so kann $\sin(\varphi_1 - A) = \pm 1$ werden, und ausserdem diese Grenzen überschreiten. In diesem Falle kann $t$ nicht mehr den ganzen Umkreis durchlaufen, sondern sich nur von einem Minimum bis zu einem Maximum erstrecken, welche durch die Gleichung $\sin(\varphi_1 - A) = \pm 1$ bedingt werden. Setzt man $\sin(\varphi_1 - A) = 1$ in der Gleichung (21), so wird

$$a = \gamma + u' \sin \psi$$

und die vorstehenden Gleichungen geben hiemit

$$\cos A = \frac{\alpha}{\gamma + u' \sin \psi} \;\; ; \;\; \sin(G + t) = \frac{(\gamma + u' \sin \psi) \sin A}{\sin g}$$

von den beiden Werthen von $t$, die aus dieser Gleichung folgen, ist der eine das Maximum und der andere das Minimum.

In den Fällen, wo $t$ den ganzen Umkreis durchlaufen kann, giebt die Gleichung (21) für jeden Werth von $t$ nur Einen Werth von $\varphi_1$, denn der eine Werth des Bogens $\varphi_1 - A$, welcher dem gefundenen Werthe von $\sin(\varphi_1 - A)$ entspricht, giebt für $\varphi_1$ einen Werth, welcher die Grenzen $\pm 90^0$ übersteigt, und daher keine Geltung haben kann. In den Fällen hingegen, wo $t$ begrenzt ist, entsprechen jedem zwischen dem Maximum und Minimum von $t$ liegenden Werthe zwei Werthe von $\varphi_1$, denn beide zum erhaltenen Werthe von $\sin(\varphi_1 - A)$ gehörigen Bögen geben Werthe von $\varphi_1$, die innerhalb $\pm 90^0$ liegen.

36.

Wenn der Fall eintritt, dass $\sin(\varphi_1 - A) = \pm 1$ werden kann, so können die Curvenpunkte die in der Nähe dieses Werthes liegen, durch die vorhergehenden Formeln nicht mehr mit der Sicherheit bestimmt werden, die überhaupt möglich ist, und man darf um diese zu erreichen nicht mehr der Berechnung derselben $t$ zu Grunde legen, sondern muss von $\varphi_1$ ausgehen, und daher die erste Gleichung (20) demgemäss umstellen. Man bekommt sogleich

$$\sin(G+t) = \frac{\alpha}{\sin g} tg\,\varphi_1 - \left(\frac{\gamma}{\sin g} + \frac{u'}{\sin g}\sin\psi\right)\sec\varphi_1$$

woraus in Verbindung mit

$$tg\,\psi = \frac{\frac{n}{x} - \theta\cos\varphi_1}{\eta\cos\varphi_1}$$

auf die oben beschriebene Art $t$ und $\psi$ hervorgehen, nachdem man einen passenden Werth von $\varphi_1$ anfänglich substituirt hat. Man bekommt hierauf $\tau$ und $\lambda$ wieder durch die Ausdrücke des Art. 33. Bei der Anwendung der vorstehenden Ausdrücke auf die genannten Curvenpunkte muss man sich hüten $\varphi_1$ allzuweit auszudehnen, damit man nicht in die Nähe des Maximums von $\varphi_1$ komme, wo diese Ausdrücke unsicher werden, und das Verfahren des Art. 33 wieder angewandt werden muss.

Ich bemerke schliesslich, dass die kleine Grösse $\Delta\alpha'$, die ich in den vorstehenden Entwickelungen weggelassen habe, dadurch berücksichtigt werden kann, dass man mit Ausnahme der Ausdrücke (19) allenthalben $G + \Delta\alpha'$ für $G$, und $K + \Delta\alpha'$ für $K$ schreibt.

### *b*) Ableitung der Gleichungen für die östliche und die westliche Grenzcurve.

37.

Um die Gleichungen dieser Curven zu finden bemerke ich dass, da dem Vorhergehenden zufolge an der nördlichen und der südlichen Grenze der Finsterniss $\psi$ sich nicht weit von $90^0$ und bez. $270^0$ entfernt, auf dem zwischen diesen beiden Grenzen liegenden Gürtel der Erdoberfläche $\psi$ alle Werthe durch den ganzen Umkreis annehmen muss. Ferner bemerke ich, dass der Zeitraum, in welchem der Schattenkegel die Erde trifft, begrenzt ist, und dass folglich die auf den ersten Meridian bezogene

Zeit eines Minimums und eines Maximums fähig ist, ausserhalb welcher den Grundformeln gar nicht durch reelle Werthe der darin vorkommenden Grössen Gnüge geleistet werden kann. Es folgt hieraus leicht, dass die Gleichungen der östlichen und der westlichen Grenzcurve aus der Bedingung des Minimums und Maximums der $\tau$ genannten Zeit bei willkührlich gelassenem $\psi$ oder $\theta$ entspringen. Da der Bedingung $d\tau = 0$ die Gleichung $dt = d\lambda$ entspricht, so müssen wir jetzt die Grundgleichungen nach $\lambda$, $\varphi_1$, und $t$ differentiiren, und nach den Differentiationen $dt = d\lambda$ machen.

## 38.

Die im Vorhergehenden für die Berechnung der nördlichen und der südlichen Grenzcurve eingeführten Hülfsgrössen eignen sich nicht wohl für die östliche und die westliche Grenzcurve, weil die Bedingungsgleichung, wenn sie durch diese Hülfsgrössen ausgedrückt wird, sehr zusammengesetzt ausfällt; ich werde daher für den jetzigen Zweck andere Hülfsgrössen in die Grundgleichungen (16) einführen. Sei zuerst

$$(24) \quad \ldots\ldots \quad \begin{cases} d\sin D = \sin\delta' \\ d\cos D = (1-c)\cos\delta' \end{cases}$$

und dann

$$(25) \quad \begin{cases} \cos\varphi_1 \sin(t + \Delta\alpha') = \cos H \sin K \\ \cos\varphi_1 \cos(t + \Delta\alpha') = \cos D \sin H - \sin D \cos H \cos K \\ \sin\varphi_1 = \sin D \sin H + \cos D \cos H \cos K \end{cases}$$

dann bedeutet bis auf Grössen von der Ordnung der Abplattung $H$ die Höhe des Punkts $(\alpha', \delta')$ — oder des Sonnenmittelpunkts — über dem wahren Horizont, und $K$ ist der parallactische Winkel an diesem Punkt. Die Substitution dieser Ausdrücke in die Grundgleichungen (16) verwandelt diese in die folgenden,

$$(26) \begin{cases} u = u' - (1+x)\frac{1-c}{d}\, tgf \sin H + (1+x)\frac{d}{1-c}(2c - c^2)\, tgf \sin D \cos D \cos H \cos K \\ u\sin\theta = -\gamma\cos N' + \frac{t-\lambda-\mu}{15} n \sin N' - (1+x)\cos H \sin K \\ u\cos\theta = \gamma \sin N' + \frac{t-\lambda-\mu}{15} n \cos N' - (1+x)\, d \cos H \cos K \end{cases}$$

Führt man hier wieder $\psi$ durch die Gleichung

$$\theta = \psi + N'$$

ein, setzt

$$\left.\begin{array}{l} e\sin(N'+\nu) = d\sin N' \,,\quad e'\sin(N'+\nu') = \sin N' \\ e\cos(N'+\nu) = \cos N' \,,\quad e'\cos(N'+\nu) = d\cos N' \end{array}\right\} \quad \ldots \quad (27)$$

und übergeht das unbedeutende Product der Abplattung in $tg\,f$, so bekommt man aus den vorstehenden Gleichungen

$$\left.\begin{array}{l} u = u' - (1+x)\,tg\,f\sin H \\ u\sin\psi = -\gamma + (1+x)\,e\cos H\sin(W+\nu) \\ u\cos\psi = \frac{t-\lambda-\mu}{15}\,n - (1+x)\,e'\cos H\cos(W+\nu') \end{array}\right\} \quad \ldots \quad (28)$$

nachdem

$$N' - K = W$$

gesetzt worden ist. Diese Gleichungen sollen weiter unten angewandt werden. Vorher bemerke ich, dass aus den Gleichungen (24) und (27)

$$\begin{array}{l} d^2 = (1-c)^2\cos^2\delta' + \sin^2\delta' \\ e^2 = d^2\sin^2 N' + \cos^2 N' \\ e'^2 = \sin^2 N' + d^2\cos^2 N' \end{array}$$

folgt. Da nun $\delta'$ nie $90^0$ werden kann, so ist immer $d < 1$, und da $N'$ nie 0 werden kann, so ist auch immer $e < 1$, $e'$ hingegen wird $= 1$, wenn $N' = 90^0$ ist, ausserdem ist auch $e' < 1$. Aus den vorstehenden Gleichungen folgt

$$e^2 + e'^2 = 1 + d^2$$

welche Gleichung zur Controlle der Berechnung dieser Grössen angewandt werden kann. Die (27) zeigen ferner dass die Bögen $\nu$ und $\nu'$ immer entgegengesetzte Zeichen haben, so dass stets der eine derselben positiv, und der andere negativ ist.

## 39.

Indem wir jetzt die Gleichungen (26) zur Erlangung der Bedingungsgleichung der östlichen und der westlichen Grenzcurve anwenden, sind in den, wie oben beschrieben, vorzunehmenden Differentiationen $u$, $H$, $K$ und $x$ die veränderlichen Grössen, von welchen die letzte als blose Function von $H$ betrachtet werden darf. Setzt man nach den Differentiationen auch $x = 0$, und führt zur Abkürzung die beiden folgenden Grössen $F$ und $G$ ein,

$$F = \sin H - \frac{dx}{dH}\cos H$$

$$G = \cos H + \frac{dx}{dH}\sin H$$

so wird zuerst

$$du = -\left\{G\frac{1-c}{d} + F\frac{d(2c-c^2)}{1-c}\sin D\cos D\cos K\right\} tg\,f\,dH$$
$$- \frac{d(2c-c^2)}{1-c}\,tg\,f\sin D\cos D\cos H\sin K\,dK$$
$$du\sin\theta = F\sin K\,dH - \cos H\cos K\,dK$$
$$du\cos\theta = F\,d\cos K\,dH + d\cos H\sin K\,dK$$

und eliminirt man hieraus $dK$, einestheils zwischen der ersten und zweiten, und anderntheils zwischen der ersten und dritten, so ergiebt sich

$$\left\{\cos K - d\frac{2c-c^2}{1-c}\,tg\,f\sin D\cos D\sin K\sin\theta\right\} du =$$
$$-\left\{G\frac{1-c}{d}\cos K + F d\frac{2c-c^2}{1-c}\sin D\cos D\right\} tg\,f\,dH$$
$$\left\{1 + \frac{2c-c^2}{1-c}\,tg\,f\sin D\cos D\cos\theta\right\} du = -\,G\frac{1-c}{d}\,tg\,f\,dH.$$

Dividirt man die eine dieser Gleichungen durch die andere und reducirt, so bekommt man

$$F = -G\,\frac{(1-c)^2\left\{\cos\theta\cos K + d\sin\theta\sin K\right\}}{d^2\left\{1-c+(2c-c^2)\,tg\,f\sin D\cos D\cos\theta\right\}}\,tg\,f$$

welches die gesuchte Bedingungsgleichung ist. Es lässt sich leicht zeigen, dass durch diese Gleichung die Bedingung ausgedrückt wird, dass der Punkt des Sonnenrandes, welcher mit dem Mondrande in Berührung ist, im scheinbaren Horizont liegt. Schreiben wir statt der vorstehenden Gleichung zur Abkürzung

$$F = -G\alpha$$

und substituiren die oben gegebenen Ausdrücke von $F$ und $G$, so entsteht

$$tg\,H = -\frac{\alpha - \frac{dx}{dH}}{1 + \alpha\frac{dx}{dH}}$$

und hieraus ist der grosse Einfluss der Strahlenbrechung auf die Lage der westlichen und der östlichen Grenzcurve auf der Oberfläche der Erde leicht zu erkennen. Da $\frac{dx}{dH}$ sehr nahe der Strahlenbrechung im Horizont gleich ist, so zeigt sich dass die Wirkung dieser in vollem Maasse sich auf $H$, und dadurch auf die genannten Curven selbst überträgt. Da die Strahlenbrechung im Horizont einen halben Grad übersteigt, so wird durch dieselbe auch die Lage der genannten Curven auf der Erdoberfläche um mehr wie einen halben Grad geändert. Bei der Anwendung dieses Ausdrucks für $tg\,H$ ist man genöthigt die mittlere Strahlenbrechung im Horizont anzuwenden, die von der wahren, im Augenblick der Erscheinung statt findenden, um mehrere Minuten abweichen kann, es kann daher zu nichts führen in dem übrigen Theil

dieses Ausdrucks Secunden berücksichtigen zu wollen, und dieses giebt einen vollgültigen Grund den Ausdruck des mit $\alpha$ bezeichneten Coefficienten zu vereinfachen. Da im Maximum

$$f = 16' \text{ und } c = \frac{1}{300}$$

ist, so wird $c \sin f = 3{,}''2$, die Uebergehung des Products der Abplattung in $\sin f$ oder $tg\, f$ ist daher hier jedenfalls legitimirt. Es wird aber dadurch

$$\alpha = tg\, f \cos(\theta - K) = tg\, f \cos(\psi + W)$$

und hiemit

$$tg\, H = -\frac{tg\, f \cos(\psi + W) - \frac{dx}{dH}}{1 + \frac{dx}{dH} tg\, f \cos(\psi + W)}$$

wofür man auch ohne Bedenken

$$tg\, H = -tg\, f \cos(\varphi + W) + \frac{dx}{dH}$$

annehmen kann. Hiemit werden die Ausdrücke für die möglichst genaue Berechnung der östlichen und der westlichen Grenzcurve sehr einfach.

## 40.

Da in der eben abgeleiteten Gleichung $\frac{dx}{dH}$ für den scheinbaren Horizont gelten muss, so erhalten wir durch den Art. 17

$$\frac{dx}{dH} = -r + r\frac{dr}{dH}$$

wofür wir auch $\frac{dx}{dH} = -r$ setzen dürfen, und unter $r$ bei der Berechnung der Curven jedenfalls die in Theilen des Radius ausgedrückte mittlere Strahlenbrechung im scheinbaren Horizont verstehen müssen. Unsere Bedingungsgleichung wird also schliesslich

$$tg\, H = -tg\, f \cos(\psi + W) - r \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (29)$$

Da demnach auf der ganzen Ausdehnung unserer Curven $H$ ein kleiner Bogen ist, so dürfen wir $\cos H = 1$ setzen, das Product $tg\, f \sin H$, und die übrigen Glieder derselben Ordnung übergehen. Hiedurch gelangen wir zu einer directen Auflösung der vorliegenden Aufgabe.

Es wird nun $u = u'$, und hiemit giebt die zweite Gleichung (28) entweder

$$\left.\begin{array}{l} \sin(W + \nu) = \frac{\gamma}{e} + \frac{u'}{e}\sin\psi \\ \text{oder} \\ \sin\psi = \frac{e}{u'}\sin(W + \nu) - \frac{\gamma}{u'} \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (30)$$

Substituirt man in die erste dieser eine Reihe beliebig angenommener Werthe von $\psi$, so bekommt man die dazu gehörigen Werthe von $W$; oder substituirt man in die zweite eine Reihe beliebiger Werthe von $W$, so bekommt man die dazu gehörigen Werthe von $\psi$. Hierauf ergeben sich in jedem Falle die correspondirenden Werthe von $H$ durch (29), und aus der dritten (28) zieht man

$$(31) \quad . \quad . \quad . \quad \tau = \mu + \tfrac{15}{n} e' \cos(W + \nu') + \tfrac{15}{n} u' \cos\psi$$

Die Wahl zwischen der ersten und zweiten Gleichung (30) muss durch die numerischen Werthe von $\sin(W + \nu)$ und $\sin\psi$ geleitet werden. Wenn ohne Rücksicht auf die Zeichen

$$\sin\psi > \sin(W + \nu)$$

so ist es am Zweckmässigsten die erste (30) anzuwenden, und wenn

$$\sin\psi < \sin(W + \nu)$$

ausfällt, so wird die zweite (30) am Zweckmässigsten angewandt.

Da die Gleichungen (30) nur $\sin(W + \nu)$ oder bez. $\sin\psi$ bestimmen, so folgt, dass jedem substituirten Werthe von $\psi$, wenn überhaupt ein reelles Resultat daraus hervorgeht, zwei Werthe von $W$, und jedem substituirten Werthe von $W$ unter derselben Bedingung zwei Werthe von $\psi$ entsprechen. Von den zwei Werthen von $W$, die solcher Gestalt Einem Werthe von $\psi$ entsprechen gehört der eine der westlichen, und der andere der östlichen Grenzcurve an, und in gewissen Fällen vereinigen sich diese beiden Curven zu Einer Curve. Diese Umstände werden weiter unten näher untersucht werden.

## 11.

Nachdem man auf die eben beschriebene Art $W$, $H$ und $\tau$ erhalten hat, geben die Gleichungen (25) $t$ und $\varphi_1$, und somit auch $\lambda$. Wendet man zu ihrer Vereinfachung die gewöhnlichen Substitutionen an, so erhält man

$$tg\,H' = \frac{tg\,H}{\cos(N' - W)}$$
$$tg\,(t + \Delta\alpha') = \frac{\cos H'\, tg\,(N' - W)}{\sin(H' - D)}$$
$$tg\,\varphi_1 = cotg\,(H' - D)\cos(t + \Delta\alpha')$$
$$\lambda = t - \tau$$

in welchen man auch in der Regel $\Delta\alpha' = 0$ setzen darf.

## 42.

Da ein Theil der Ausdehnung der beiden eben ermittelten Curven den Anfangspunkten, und ein Theil den Endpunkten der Finsterniss angehört, so ist noch zu ermitteln, wann das Eine, und wann das Andere statt findet. Betrachten wir an irgend einem Punkt dieser Curven die Finsterniss ein Zeittheilchen später, und leisten ohne den Punkt der Curve zu ändern den Gleichungen derselben wieder Gnüge, so kann dieses nur dadurch geschehen, dass wir $u'$ einer Aenderung unterwerfen. Nun ist aber leicht einzusehen, dass der Curvenpunkt einem Anfang der Finsterniss angehört, wenn wir für den nächstfolgenden Zeitpunkt $u'$ kleiner, und einem Ende, wenn wir für diesen Zeitpunkt $u'$ grösser finden, wie auf der Curve selbst. Es folgt hieraus, dass wenn der in der Voraussetzung der Unveränderlichkeit von $\varphi_1$ und $\lambda$ entwickelte Differentialquotient $\frac{du'}{d\tau}$ negativ ist, der Curvenpunkt einem Anfang, und wenn derselbe positiv ist, dieser Curvenpunkt einem Ende der Finsterniss angehört.

Da $H$ auf allen Punkten dieser Curven eine kleine Grösse von derselben Ordnung wie $f$ ist, so dürfen wir nach den Differentiationen $H = 0$ setzen, und in dieser Annahme geben die Gleichungen (25)

$$\cos\varphi_1 \cos t dt = \cos K dK$$

$$-\cos\varphi_1 \sin t dt = \sin D \sin K dK + \cos D dH$$

$$0 = -\cos D \sin K dK + \sin D dH$$

woraus

$$\sin D dt = -dK$$

folgt. Uebergehen wir hier die Strahlenbrechung und die Abplattung, die auf das jetzt abzuleitende Resultat nur unwesentlichen Einfluss haben können, so ergeben sich aus den Gleichungen des Art. 40 die folgenden,

$$\cos W dW = u' \cos\psi d\psi + \sin\psi du'$$

$$d\tau = -\frac{\varkappa}{n} \sin W dW - \frac{\varkappa}{n} u' \sin\psi d\psi + \frac{\varkappa}{n} \cos\psi du'$$

$$dt = d\tau \;,\; dK = -dW$$

und hieraus bekommt man durch eine leichte Elimination

$$\frac{du'}{d\tau} = \frac{n}{\varkappa} \cos\psi + \sin(\psi + W) \sin D$$

wo $\varkappa$ die im Art. 30 eingeführte Constante ist. Da man für jeden berechneten Curvenpunkt die numerischen Werthe der Grössen der rechten

Seite dieser Gleichung kennt, so kann man immer leicht untersuchen, ob $\frac{du'}{d\tau}$ positiv oder negativ wird. Allein man kann aus der vorstehenden Gleichung einen allgemeineren Schluss ziehen. Da in den Sonnenfinsternissen $\frac{n}{\varkappa} > 1$ (beinahe $= 2$) ist, und immer $\sin(\psi + W) \sin D < \frac{1}{2}$, so hängt im Allgemeinen das Zeichen von $\frac{du'}{d\tau}$ von dem von $\cos\psi$ ab, und der Curvenpunkt gehört daher einem Anfang an, wenn

$$\psi > 90^0 \text{ und } < 270^0$$

und der Punkt gehört einem Ende an, wenn

$$\psi > 270^0 \text{ oder } < 90^0$$

ist. Wenn $\psi$ in der Nähe von $90^0$ oder $270^0$ liegt, so kann diese Regel eine Ausnahme erleiden, und es müssen in diesen Fällen die numerischen Werthe der Grössen der rechten Seite der vorstehenden Gleichung näher untersucht werden.

### c) Bestimmung der Punkte, in welchen die nördliche und die südliche Grenzcurve von der westlichen und der östlichen berührt werden.

### 43.

Es ist ohne Weiteres klar, dass wir die genannten vier Berührungspunkte erhalten, wenn wir die eben abgeleiteten Gleichungen für die westliche und die östliche Grenzcurve mit der Bedingungsgleichung für die grösste Phase, die auf der nördlichen und der südlichen Grenzcurve immer Gültigkeit hat, verbinden. Nehmen wir daher aus dem Art. 31 die Gleichung

$$\left\{\begin{matrix} \frac{n}{\varkappa} - \cos\varphi_1 \cos t \sin N' - \cos\varphi_1 \sin t \sin\delta' \cos N' \\ - \frac{dx}{dt}[\sin\varphi_1 \cos\delta' \cos N' + \cos\varphi_1 \sin t \sin N' - \cos\varphi_1 \cos t \sin\delta' \cos N'] \end{matrix}\right\} \cos\psi$$

$$- \left\{\begin{matrix} \cos\varphi_1 \cos t \cos N' - \cos\varphi_1 \sin t \sin\delta' \sin N' \pm tg f \cos\varphi_1 \sin t \cos\delta' \\ - \frac{dx}{dt}[\sin\varphi_1 \cos\delta' \sin N' - \cos\varphi_1 \sin t \cos N' - \cos\varphi_1 \cos t \sin\delta' \sin N'] \end{matrix}\right\} \sin\psi = 0$$

wieder vor, und führen darin dieselben Hülfsgrössen ein, die uns in der vorhergehenden Aufgabe gedient haben. Erwägen wir dass

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx}{dH}\frac{dH}{dt}$$

ist, dass bei constant angenommenem $\varphi_1$ die Gleichungen (25)

$$\frac{dH}{dt} = -\cos D \sin K$$

geben, und dass hier wieder $\frac{dx}{dH} = -r$ ist. Substituiren wir diese Ausdrücke sowohl wie die (24), (25) und (27), und übergehen das Product der Strahlenbrechung in die Abplattung, so wird die Gleichung der grössten Phase

$$\begin{aligned}\Big\{\frac{n}{x} + e'\sin D \cos H \sin(W+\nu') - e'\cos D \sin H \sin(N'+\nu') \\ - r\cos D \cos H \sin K \cos W\Big\}\cos\psi \\ +\Big\{e \sin D \cos H \cos(W+\nu) - e\cos D \sin H \cos(N'+\nu) \\ \mp tg\, f \cos D \cos H \sin K + r\cos D \cos H \sin K \sin W\Big\}\sin\psi = 0\end{aligned}$$

Aber in dem Ausdruck (29) für $H$, welcher hier anzuwenden ist, dürfen wir jetzt für $\psi$ die Mittelwerthe $90^0$ und $270^0$ anwenden, und überhaupt $\cos H = 1$ setzen. Die Gleichung für $H$, die hier anzuwenden ist, wird daher

$$\sin H = \pm\, tg\, f \sin W - r$$

Wenn man hiemit $\sin H$ aus der vorstehenden Gleichung eliminirt und gehörig reducirt, so erhält man

$$tg\,\psi = -\frac{\frac{n}{x} + e' F \sin(W+\nu')}{e F \cos(W+\nu)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (32)$$

wo zur Abkürzung

$$E = \sin D \mp tg\, f \cos D \sin N'$$
$$F = E + r\cos D \cos(N' - W)$$

gesetzt worden ist, und die oberen Zeichen für die beiden Berührungspunkte mit der nördlichen, und die unteren Zeichen für die beiden Berührungspunkte mit der südlichen Grenzcurve anzuwenden sind. Aus dieser Gleichung und der Gleichung

$$\sin(W+\nu) = \frac{\gamma}{e} + \frac{u'}{e}\sin\psi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (33)$$

müssen die correspondirenden Werthe von $W$ und $\psi$ ermittelt werden, welches am Einfachsten durch Näherungen geschieht.

Um die beiden Berührungspunkte mit der nördlichen Grenzcurve zu erhalten muss man zuerst $W$ durch

$$\sin(W+\nu) = \frac{\gamma + u'}{e}$$

bestimmen, und mit den hieraus erhaltenen zwei Werthen von $W$ durch (32) die beiden entsprechenden Werthe von $\psi$ berechnen, die in der

Regel schon hinreichend genau ausfallen, um durch ihre Substitution in (33) hinreichend genaue Werthe von $W$ zu geben. Sollte dieses nicht der Fall sein, so muss man mit diesen Werthen die Substitution in (32) und (33) wiederholen. Um die beiden Berührungspunkte mit der südlichen Grenzcurve zu erhalten muss man von der Gleichung

$$\sin(W+\nu) = \frac{\gamma - \psi'}{e}$$

ausgehen, und im Uebrigen eben so verfahren.

Nachdem man die correspondirenden Werthe von $W$ und $\psi$ durch dieses Verfahren mit hinreichender Genauigkeit erhalten hat, bekommt man $H$ und $\tau$ durch (29) und (31), und hierauf $\lambda$ und $\varphi_1$ durch die Ausdrücke des Art. 41.

Diese vier Punkte sondern von den vier im Vorhergehenden ermittelten Grenzcurven die Theile, die die eigentlichen Grenzcurven bilden, von den übrigen Theilen derselben ab.

### *d*) Bestimmung der Berührungspunkte des Schattenkegels mit dem Erdkörper.

44.

Die Zahl dieser Punkte ist im Allgemeinen auch vier, da zwei äussere und zwei innere Berührungen möglich sind, von welchen die eine äussere und innere dem Eintritt, und die andere innere und äussere dem Austritt des Schattenkegels zukommt. Wenn der Schattenkegel eine solche Lage hat, dass er im Norden oder im Süden der Erde weder über diese hinstreifen noch dieselbe überragen kann, so fallen die beiden inneren Berührungspunkte in Einen Berührungspunkt zusammen, und wenn der Schattenkegel im Norden oder im Süden über die Erde hinaus ragt, so werden die beiden inneren Berührungspunkte imaginär. Es ist leicht einzusehen, dass die zwei den Eintritten angehörigen Punkte auf der westlichen, und die zwei den Austritten angehörigen auf der östlichen Grenzcurve liegen müssen. Der erste äussere Berührungspunkt giebt den Ort der Erde, an welchem die Finsterniss überhaupt anfängt, und der zweite den, an welchem sie auf der Erde überhaupt aufhört. Der erste innere Berührungspunkt hingegen giebt den Ort, an welchem sie zuerst anfängt, und der zweite den, an welchem sie zuerst aufhört vollständig gesehen zu werden. Es ist ferner leicht einzusehen, dass

man die Gleichungen für diese vier Punkte erhält, wenn man die Maxima und Minima der Gleichungen für die westliche und die östliche Grenzcurve in Bezug auf die Zeit des ersten Meridians oder $\tau$ sucht.

45.

Wenn wir nun wieder von den Gleichungen (26) ausgehen, so müssen wir bei den Differentiationen nicht nur $x$, $H$, $K$ und $u$, sondern auch $\theta$ veränderlich annehmen. Uebergehen wir hier sogleich aus den im Art. 39 auseinander gesetzten Gründen das Product von $c$ in $f$, und setzen wieder

$$F = \sin H - \frac{dx}{dH}\cos H$$
$$G = \cos H + \frac{dx}{dH}\sin H$$

so bekommen wir

$$du = -G\, tg f\, dH$$
$$du \sin\theta + d\theta u \cos\theta = F \sin K dH - \cos H \cos K dK$$
$$du \cos\theta - d\theta u \sin\theta = F d \cos K dH + d \cos H \sin K dK$$

Um dieses System von Gleichungen zu vervollständigen müssen wir noch den Ausdruck für $dH$ suchen, und diesen erhalten wir durch die Differentiation der Bedingungsgleichung (29) für die westliche und die östliche Grenzcurve, allein es wird sich zeigen, dass wir diesen Ausdruck entbehren können. Die Elimination von $du$ aus den vorstehenden Gleichungen giebt zuerst

$$d\theta u \cos\theta = \{F \sin K + G\, tg f \sin\theta\}\, dH - \cos H \cos K dK$$
$$-d\theta u \sin\theta = \{F d \cos K + G\, tg f \cos\theta\}\, dH + d \cos H \sin K dK$$

und wenn man $F$ durch die Gleichung

$$F = -G\, tg f \cos(\theta - K)$$

des Art. 39 eliminirt,

$$d\theta u \cos\theta = -G\, tg f\{\cos(\theta - K)\sin K - \sin\theta\}\, dH - \cos H \cos K dK$$
$$d\theta u \sin\theta = \quad G\, tg f\{d \cos(\theta - K)\cos K - \cos\theta\}\, dH - d \cos H \sin K dK$$

Da wir hier das Product von $c$ in $tg f$ übergangen haben, so dürfen wir in der zweiten dieser Gleichungen $d\cos\theta$ statt $\cos\theta$ im Coefficienten von $dH$ setzen, und hiemit ziehen sich diese beiden Gleichungen in die folgenden zusammen

$$d\theta u \cos\theta = \left\{G\, tg f \sin(\theta - K)\frac{dH}{dK} - \cos H\right\}\cos K dK$$
$$d\theta u \sin\theta = \left\{G\, tg f \sin(\theta - K)\frac{dH}{dK} - \cos H\right\} d \sin K dK$$

Der Quotient aus diesen beiden Gleichungen giebt für die gesuchte Bedingungsgleichung

(34) . . . . . . . . $tg\,\theta = d\,tg\,K$

Man sieht, dass in der Ableitung dieser Bedingungsgleichung $dH$ von selbst verschwunden ist, und dass wir also dasselbe Resultat gefunden haben würden, wenn wir bei den Differentiationen $H$ constant gesetzt hätten. Die Ursache davon ist leicht zu finden. Uebergeben wir die Abplattung, so giebt die oben gefundene Gleichung

$$\theta = K \text{ und } \theta = 180 + K$$

und mit diesen Werthen werden die aus der Bedingungsgleichung (29) hervorgehenden Werthe von $H$ ein Maximum und ein Minimum; es ist daher in der That in den hier gesuchten vier Punkten $dH = 0$. Man kann der obigen Bedingungsgleichung eine etwas andere Form geben. Da $\theta = \psi + N'$ und $K = N' - W$ ist, so lässt sie sich durch eine einfache Transformation in die folgende verwandeln,

(35) . . . . . $tg\,\psi = -\frac{e'\sin(W+\nu')}{e\cos(W+\nu)}$

in welcher $e$, $e'$, $\nu$, $\nu'$ wieder den Gleichungen (27) entsprechen müssen. Nach Uebergehung der Abplattung folgt hieraus

$$\psi + W = 0 \text{ und } \psi + W = 180^0$$

die mit den oben angegebenen Näherungsformeln übereinstimmen.

Die Berechnung der vier Berührungspunkte durch diese Formeln ist indirect, aber sehr einfach. Die zweite zwischen $W$ und $\psi$ statt findende Gleichung ist wieder

(36) . . . . . $\sin(W+\nu) = \frac{\gamma}{e} + \frac{u'}{e}\sin\psi$

und da wir in den beiden Näherungsformeln auch $W+\nu$ für $W$ setzen dürfen, so giebt die vorstehende Gleichung zuerst folgende genäherte Werthe von $W+\nu$,

(36 *) . . . . . $\sin(W+\nu) = \frac{\gamma}{e \pm u'}$

die man in (34) oder in (35) substituiren muss, um genauere Werthe von $\psi$ zu erhalten. Hiemit giebt (36) wieder genauere Werthe von $W$ u. s. w. Hat man hinreichend genaue Werthe von $W$ und $\psi$ gefunden, so geben wieder die Ausdrücke (29) und (31) $H$ und $\tau$, und die Ausdrücke des Art. 41 $\lambda$ und $\varphi_1$.

Das eben beschriebene Verfahren um $\psi$ und $W$ zu finden kann auf

folgende Weise beträchtlich abgekürzt werden. Den zuerst aus (36 *) erhaltenen Werth von $W+\nu$ bezeichne ich mit $(W+\nu)_1$, nachdem man hiemit aus (35) oder (34) $\psi$, und darauf aus (36) einen zweiten Werth von $W+\nu$ berechnet hat, soll dieser mit $(W+\nu)_2$ bezeichnet werden. Man setze jetzt

$$\frac{(W+\nu)_2+(W+\nu)_1}{2}=(W+\nu)_3;\ \frac{(W+\nu)_3+(W+\nu)_2}{2}=(W+\nu)_4;$$

$$\frac{(W+\nu)_4+(W+\nu)_3}{2}=(W+\nu)_5;\ \text{u. s. w.}$$

bis man auf den Grenzwerth dieser arithmetischen Mittel kommt. Dieser Grenzwerth ist ein sehr genauer Werth von $W+\nu$, mit welchem man durch Substitution in (35) oder (34) einen sehr genauen Werth von $\psi$, und wieder durch (36) einen Werth von $W+\nu$ bekommt, mit welchem man, wenn er mit dem vorhergehenden nicht genau genug übereinstimmen sollte, das eben beschriebene Verfahren wiederholen kann. Wendet man dasselbe auch auf irgend zwei auf einander folgende Werthe von $\psi$ an, so giebt wieder die Grenze der arithmetischen Mittel einen sehr genauen Werth von $\psi$.

## 46.

Untersuchen wir die Bedingungsgleichung für den Fall, wo nur Eine innere Berührung statt findet. Es ist leicht zu erkennen dass in diesem Falle aus der Gleichung (36), nachdem der eine der beiden wahren Werthe von $\psi$ darin substituirt worden ist,

$$\sin(W+\nu)=\pm 1$$

hervorgehen muss, denn würde $\sin(W+\nu)<\pm 1$ gefunden, so würde $W$ zwei Werthe annehmen, und es würden zwei innere Berührungen statt finden; würde im Gegentheil $\sin(W+\nu)>\pm 1$ gefunden, so würden die beiden inneren Berührungspunkte gar nicht vorhanden sein. In dem Falle, welchen wir betrachten ist also

$$\cos(W+\nu)=0$$

und hiemit giebt (35)

$$\psi=90^0 \text{ oder } =270^0$$

je nachdem der einzige innere Berührungspunkt in der Nähe des Nordpols oder des Südpols liegt. Hiemit bekommen wir aus (36) als eigentliche Bedingungsgleichung für diesen Fall

$$e=\pm\gamma+u'$$

wo das obere Zeichen bei positiven, und das untere bei negativen Werthen von $\gamma$ angewandt werden muss.

Man findet auf dieselbe Art als Bedingungsgleichung für eine einzige äussere Berührung des Schattenkegels mit dem Erdkörper

$$e = \pm \gamma - u'$$

und diese ist also die Bedingungsgleichung der Möglichkeit der Sonnenfinsterniss überhaupt.

Es ist anzumerken, dass wir dieselben Bedingungsgleichungen aus der vorhergehenden Aufgabe hätten ableiten können, denn es ist klar dass in diesen Fällen die beiden Berührungspunkte entweder der nördlichen oder der südlichen Grenzcurve mit der westlichen und der östlichen zusammen fallen müssen. Der Werth von $\psi$ hätte dann aus (32) ermittelt werden müssen, und für $\cos(W + \nu) = 0$ giebt (32) in der That

$$\psi = 90^0 \text{ oder } = 270^0$$

mit dem hier gefundenen Resultat übereinstimmend.

Die Abplattung kann bei der Berechnung der Berührungspunkte der vorliegenden Aufgabe unter Umständen grosse Wirkung äussern, und kann sie imaginär machen, während sie ohne Berücksichtigung derselben reel gefunden worden wären.

### e) Gleichungen für die Curve der grössten Phase im Horizont.

### 47.

Um die Gleichungen dieser Curve zu erhalten brauchen wir nur die Bedingung der grössten Phase im Horizont mit der der Berührung der Ränder im Horizont zu verbinden. Um diese Verbindung möglich zu machen müssen $u'$ und somit auch $f$ als Veränderliche betrachtet werden, aus deren Werthen sich die Grösse der grössten Phasen ergiebt. Es findet daher zuerst die Gleichung (32) statt, nemlich es wird wieder

$$tg\,\psi = -\frac{\frac{n}{\varkappa} + e' F \sin(W + \nu')}{e F \cos(W + \nu)}$$

wo aber nun anfänglich

$$F = \sin D + r \cos D \cos(N' - W)$$

gesetzt werden muss, da man beim Beginn der Rechnung den Werth von $f$ noch nicht kennt. Man kann sich indess auch erlauben hier in

diesem Ausdruck das von $tg\,f$ abhängige Glied gänzlich zu übergehen. Für jeden reellen Werth von $W$, den man in diese Gleichung substituirt, bekommt man zwei reelle Werthe von $\psi$, worauf die Gleichung

$$u' = \frac{e \sin(W+\nu) - \gamma}{\sin\psi} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (37)$$

den correspondirenden Werth von $u'$ giebt. Es versteht sich aber von selbst, dass diejenigen Werthe von $\psi$, die einen Werth von $u'$ geben, welcher ausserhalb der Grenzen liegt, die $u'$ in der Sonnenfinsterniss, für welche die Rechnung geführt wird, annehmen kann, ausgeschlossen werden müssen. Da unter je zwei correspondirenden Werthen von $\psi$ der eine einen positiven, und der andere einen negativen Sinus hat, so bleibt immer der eine dieser beiden Werthe von $\psi$ ausgeschlossen. Aber auch $W$ selbst kann in Grenzen eingeschlossen sein, denn es kann sich ereignen, dass beide zu gewissen Werthen von $W$ gehörigen Werthe von $\psi$ Werthe von $u'$ geben, die die genannten Grenzen übersteigen.

## 48.

Wenn man $u'$ erhalten hat, so bekommt man die Grösse der grössten Phase durch die zu Ende des Art. 5 entwickelten Ausdrücke. Bezeichnet man nemlich wie dort den Werth von $u'$ für die äussere Ränderberührung mit $u_1'$, und denselben für die innere Ränderberührung mit $u_2'$, so wie die in 12theilen des Sonnendurchmessers ausgedrückte Grösse der Phase mit $i$, so wird

$$i = 12\,\frac{u_1' - u'}{u_1' - u_2'}$$

und wendet man dieselbe Bezeichnung auf $f$ an, so bekommt man den zum gefundenen Werthe von $u'$ correspondirenden Werth von $\sin f$ durch

$$\sin f = \sin f_1 - \frac{\sin f_1 - \sin f_2}{12}\, i$$

Den Werth von $f$ kann man auch unmittelbar aus $u'$ durch die Ausdrücke des Art. 20 erhalten. Setzt man $\sec f = 1$, so ergiebt sich

$$\sin f = (u' - s)\,\frac{G}{G'}$$

wofür man auch

$$\sin f = (u' - s)\sin\pi$$

setzen kann. Nachdem $\sin f$ gefunden ist sind wieder (29) und (31) so wie die Ausdrücke des Art. 41 anzuwenden um schliesslich $\lambda$ und $\varphi_1$ zu erhalten.

Es ist offenbar, dass die Durchschnittspunkte der jetzt in Rede stehenden Curve mit der nördlichen und der südlichen Grenzcurve dieselben sind, wie die Berührungspunkte dieser mit der westlichen und der östlichen Grenzcurve, und dass diese Punkte zugleich die Endpunkte unserer Curve sind, da in der weiteren Fortsetzung derselben $u'$ nothwendig Werthe annehmen muss, die die äussere Grenze derselben überschreiten. Ebenfalls ist ohne Weiteres zu erkennen, dass die Curve der grössten Phase im Horizont sich im Innern der westlichen und der östlichen Grenzcurve in zwei von einander abgesonderten Zweigen erstreckt, wenn diese beiden Curven ganz von einander abgesondert sind.

49.

Die Curve der grössten Phase im Horizont erleidet an zwei Stellen eine Unterbrechung ihrer Stetigkeit, nemlich an den beiden Punkten wo $u' = 0$, und also

$$e \sin(W + \nu) = \gamma$$

wird. Während die Gleichung der grössten Phase, wodurch $\psi$ bestimmt wird, den Halbkreis, in welchem $\psi$ angenommen werden muss, unbestimmt lässt, und dieser durch (37) dadurch bestimmt wird, dass $u'$ — wenn überhaupt möglich — die oben angegebenen Grenzen nicht übersteige, ist im jetzigen Falle der Halbkreis, in welchem $\psi$ zu nehmen ist, in der That willkührlich, und es ergeben sich daher zwei um $180^0$ verschiedene Werthe von $\psi$, die unseren Gleichungen gnügen, und hieraus folgen immer zwei verschiedene Werthe von $\lambda$ und $\varphi$. An das eine Paar dieser Werthe knüpft sich der nach Norden gehende Zug unserer Curve, und an das andere der nach Süden gerichtete an. Es ist jedoch zu bemerken, dass diese Stetigkeitsunterbrechung nicht mehr statt findet, wenn der Schattenkegel solche Lage hat, dass die Sonnenfinsterniss auf der Erde gar nicht total oder ringförmig werden kann.

### f) Gleichungen für die Curve der centralen Finsterniss. Dauer der Totalität oder Ringförmigkeit auf dieser Curve.

50.

Es ist an sich klar, dass man die Gleichungen für die Curve, auf welcher die Finsterniss central gesehen wird, aus denen für die nörd-

liche und die südliche Grenzcurve bekommt, wenn man darin $u' = 0$ und $f = 0$ macht. Sei daher jetzt

$$\begin{aligned} \sin g \sin G &= \sin N' \sin \delta' \\ \sin g \cos G &= \cos N' \\ \cos g &= \sin N' \cos \delta' \end{aligned}$$

und wie früher

$$\begin{aligned} \sin k \sin K &= \sin N' \\ \sin k \cos K &= \cos N' \sin \delta' \\ \cos k &= \cos N' \cos \delta' \end{aligned}$$

ferner

$$\alpha = (1 - c) \cos g \; ; \; \beta = \frac{15}{n} (1 - c) \cos k$$

und dann für eine Reihe von Werthen von $t$

$$\eta = \sin g \sin (G + t) \; ; \; \theta_1 = \frac{15}{n} \sin k \cos (K + t)$$

dann bekommt man die Curvenpunkte durch die folgenden Ausdrücke

$$\begin{aligned} a \sin A &= \eta \\ a \cos A &= \alpha \\ \sin (\varphi_1 - A) &= \frac{\gamma}{a} \\ \tau &= \mu + \beta \sin \varphi_1 - \theta_1 \cos \varphi_1 \\ \lambda &= t - \tau \end{aligned}$$

und diese Auflösung ist direct, weil $\psi$ hier nicht vorkommt.

## 51.

Im Allgemeinen kann hier wie auf der nördlichen und der südlichen Grenzcurve $t$ den ganzen Umkreis durchlaufen, aber wenn diese Curve in der Nähe eines der Pole des Aequators liegt, so kann es sich wie auf jenen Curven ereignen, dass $t$ nicht mehr den ganzen Umkreis durchlaufen, sondern sich nur von einem Minimum bis zu einem Maximum erstrecken kann. Für die Berechnung der Curvenpunkte, die in der Nähe dieses Minimums und Maximums liegen, bedient man sich wieder am Zweckmässigsten des im Art. 36 erklärten Verfahrens, nachdem es für den jetzigen Fall abgeändert worden ist. Nachdem man eine passende Reihe von Werthen von $\varphi_1$ angenommen hat, rechne man die dazu gehörigen Werthe von $t$ durch den folgenden Ausdruck

$$\sin (G + t) = \frac{\alpha}{\sin g} \, tg \, \varphi_1 - \frac{\gamma}{\sin g} \sec \varphi_1$$

worauf man wieder $\tau$ und $\lambda$ durch die bez. Ausdrücke des vor. Art. erhält.

Für die Berechnung des Maximums und Minimums von $t$ ergeben sich, den Ausdrücken des Art. 35 analog, hier die folgenden Ausdrücke,

$$\cos A = \frac{\alpha}{\gamma}\,;\ \sin(G+t) = \gamma\frac{\sin A}{\sin g}$$

die Gleichung $\alpha > \gamma$ ist also hier die Bedingungsgleichung für das Nichtvorhandensein dieses Maximums und Minimums.

52.

Um die Ausdrücke für den Anfangs- und Endpunkt der Curve der centralen Finsterniss zu erhalten, braucht man nur in den Gleichungen (33), (29) und (31) dieselben Substitutionen $u' = 0$, $f = 0$ einzuführen, und sie werden daher

$$\sin(W+v) = \frac{\gamma}{e}$$
$$tg\,H = -r$$
$$\tau = \mu + \frac{15}{n} e' \cos(W+v')$$

worauf man wieder durch die Ausdrücke des Art. 41 die entsprechenden Werthe von $\lambda$ und $\varphi_1$ erhält.

Diese beiden Punkte liegen, wie leicht zu erkennen, in der Mitte zwischen den Punkten, in welchen die Stetigkeit der unter $e$) behandelten Curve unterbrochen ist.

53.

Es ist von Interesse die Dauer der Totalität oder Ringförmigkeit der Finsterniss auf der Curve der centralen Finsterniss kennen zu lernen, da sie hier ihr Maximum erreicht. Da diese Dauer immer sehr kurz ist, so kann man einen sehr genäherten Ausdruck dafür leicht durch Differentialformeln entwickeln. Differentiiren wir die Gleichungen (20) nach $u$ und $t$, so können wir $dt$ für die halbe Dauer der Totalität oder Ringförmigkeit halten, wenn wir für $du$ den Werth von $u$ für innere Ränderberührungen substituiren. Bezeichnen wir die in Zeitminuten auszudrückende Dauer mit $\tau'$, so giebt diese Differentiation die beiden Gleichungen

$$\varkappa' u \sin\psi = -\cos\varphi_1 \sin g \cos(G+t)\,\tau'$$
$$\varkappa' u \cos\psi = \frac{n}{\varkappa}\tau' - \cos\varphi_1 \sin k \sin(K+t)\,\tau'$$

wo

$$\varkappa' = 2\,\frac{206265}{15.60}\,,\ \log\varkappa' = 2.6612$$

und $g$ und $G$ dieselben wie im Art. 50 sind. Wir erhalten hieraus

$$tg\,\psi = -\frac{\cos\varphi_1 \sin g \cos(G+t)}{\frac{\pi}{\varkappa} - \cos\varphi_1 \sin k \sin(K+t)}$$

$$\tau' = \frac{\varkappa' u \cos\psi}{\frac{\pi}{\varkappa} - \cos\varphi_1 \sin k \sin(K+t)}$$

wo $\cos\psi$ positiv wenn $u$ positiv, und negativ wenn $u$ negativ ist, angenommen werden muss. Da dieser Cosinus sich nie weit von Eins entfernen kann, so kann man ihn auch in der Formel übergehen, und braucht daher $\psi$ gar nicht zu berechnen.

## 54.

Die Curve der centralen Finsterniss ist keine Grenzcurve im eigentlichsten Verstande, sie sondert nur den Theil der Erdoberfläche, auf welchem der Mittelpunkt des Mondes südlich vor dem der Sonne vorbei geht, von dem Theil ab, wo derselbe nördlich vorbei geht. Die Curve der centralen Finsterniss ist ausserdem bei der Untersuchung alter Finsternisse von besonderer Wichtigkeit, und reicht oftmals allein aus um zu unterscheiden, ob die untersuchte Finsterniss mit der überlieferten identisch ist oder nicht. In ohngefähr senkrechter Richtung auf die Curve der centralen Finsterniss lässt sich eine Curve angeben, die zur westlichen und östlichen Grenzcurve eine ähnliche Beziehung hat, wie jene zur nördlichen und südlichen. Ich meine die Curve, auf welcher die grösste Phase im wahren Mittage oder in der wahren Mitternacht gesehen wird, und die daher den Theil der Erdoberfläche, auf welcher die Finsterniss, oder wenigstens der grössere Theil derselben am Vormittage (oder am Abend) gesehen wird, von dem Theil absondert, wo diese Erscheinung am Nachmittage (oder am Morgen) vorkommt. Da bei der Untersuchung von alten Finsternissen dieser Umstand auch zuweilen in Betracht kommt, so werde ich die Gleichungen dieser Curve auch angeben.

### $g$) Gleichungen der Curve, auf welcher die grösste Phase oder das Maximum der Finsterniss, im wahren Mittage oder der wahren Mitternacht gesehen wird.

55.

Wir brauchen für die Gleichungen dieser Curve keine neuen Entwickelungen vorzunehmen, da sie schon in den vorhergehenden enthalten sind. Wenn man in die Gleichungen des Art. 33 für die nördliche und die südliche Grenzcurve

$$t = 0 \text{ oder bez. } = 180^0$$

so wie eine Reihe correspondirender Werthe von $u'$ und $f$, die innerhalb der Grenzen, welche $u'$ überhaupt annehmen kann, liegen müssen, substituirt, so bekommt man die Punkte der verlangten Curve.

Wenn beides die nördliche und die südliche Grenzcurve reel sind, so hat unsere Curve selbstverständlich ihre Endpunkte auf diesen Grenzcurven, wenn aber die eine derselben imaginär wird, so liegt der eine Endpunkt unserer Curve auf der Curve der grössten Phase im Horizont. Um diesen Endpunkt zu finden bemerke ich, dass beides zu $t = 0$ und $t = 180^0$ der Werth $K = 0$ gehört, wodurch

$$W = N'$$

wird. Dieser Werth ist also in die Gleichungen der Curve der grössten Phase im Horizont zu substituiren, und die Rechnung fortzusetzen bis man die Werthe von $\tau$ und $H$ erhalten hat. Es wird hierauf beziehungsweise entweder

$$\lambda = -\tau \text{ und } \varphi_1 = 90^0 - (H - D)$$

oder

$$\lambda = 180^0 - \tau \text{ und } \varphi_1 = 90^0 - (D - H)$$

je nachdem $t = 0$, oder $= 180^0$ hat angenommen werden müssen.

Von dieser Curve ist noch zu bemerken, dass sie immer durch den einen Pol des Aequators geht, wenn dieser innerhalb des Bereichs der Finsterniss liegt, und hier ohne Rücksicht auf den Stundenwinkel der grössten Phase angehört, da unter dem Pole von keinem Stundenwinkel die Rede sein kann. Die mit der Bedingungsgleichung der grössten Phase zu verbindenden Gleichungen (20) zeigen dieses an.

Setzt man in ersterer $\varphi = \varphi_1 = 90^0$, so wird

$$\psi = 90^0 \text{ oder } = 270^0$$

und die Substitution dieser Werthe in die (20) giebt

$$\pm u' = -\gamma + (1 - c)\cos g \sec f$$
$$0 = \frac{\tau - \mu}{15} n - (1 - c)\cos k$$

Da man hier unbedenklich das kleine von $\sin f$ abhängige Glied des Ausdrucks von $\cos g$ übergehen kann, so wird

$$\tau = \mu + \frac{15}{n}(1 - c)\cos N' \cos \delta'$$
$$\pm u' = (1 - c)\sin N' \cos \delta' - \gamma$$

wo von den doppelten Zeichen dasjenige angewandt werden muss, welches für $u'$ einen innerhalb der Grenzen $u_1'$ und $u_2'$ liegenden Werth giebt. Aus $u'$ bekommt man auf die im Vorhergehenden erklärte Art die Grösse der grössten Phase.

### *h*) Bestimmung der in einem gegebenen Zeitpunkt statt findenden Grenzcurve einer Finsterniss.

55.

Von dieser Aufgabe werde ich zwei Auflösungen entwickeln.

Da hier $\tau$ eine gegebene Grösse ist, so sind $S$ und $\Sigma$, wenn man sie durch die folgenden Gleichungen bestimmt,

$$\left.\begin{aligned} S \sin \Sigma &= \gamma \\ S \cos \Sigma &= \frac{\tau - \mu}{15} n \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (38)$$

auch gegeben, und für die ganze Ausdehnung der Curve constante Grössen. Führen wir diese in die Gleichungen (26) ein, übergehen wie immer das Product $c \sin f$ und $x$, so bekommen wir

$$\left.\begin{aligned} (u' - tg f \sin H)\sin\theta &= S \sin \Sigma' - \cos H \sin K \\ (u' - tg f \sin H)\cos\theta &= S \cos \Sigma' - d \cos H \cos K \end{aligned}\right\} \ldots (39)$$

wo

$$\Sigma' = N' - \Sigma$$

gesetzt worden, und also auch $\Sigma'$ ein constanter Bogen ist. Setzen wir ferner

$$l \sin L = \ , \ \sin K$$
$$l \cos L = d \cos K$$

substituiren diese in (39), erheben dieselben ins Quadrat und addiren, so ergiebt sich

$$(40) \quad \ldots \quad \cos(L - \Sigma') = \frac{S^2 + l^2 \cos^2 H - (u' - tg f \sin H)^2}{2 S l \cos H}$$

die auf bekannte Art in die folgende verwandelt werden kann,

$$(41) \quad tg \tfrac{1}{2}(L - \Sigma') = \pm \sqrt{\frac{\{u' + S - l\cos(H - f)\}\{u' - S + l\cos(H + f)\}}{\{S + u' + l\cos(H + f)\}\{S - u' + l\cos(H - f)\}}}$$

und die Gleichung der gesuchten Curve ist, welche für jeden darin substituirten Werth von $H$ die beiden entsprechenden Werthe von $L$ giebt.

Die Rechnung ist indirect, weil $l$ veränderlich ist, und von $L$ abhängt. Man muss zuerst $l = 1$ annehmen, und mit dem Werthe von $L$, welcher hieraus hervorgeht, $l$ entweder durch

$$l = \frac{d}{\sqrt{\cos^2 L + d^2 \sin^2 L}}$$

oder nachdem

$$(42) \quad \ldots\ldots\ldots \quad tg K = d\, tg L$$

berechnet worden ist, durch

$$l = \frac{\sin K}{\sin L} \text{ oder } l = d\frac{\cos K}{\cos L}$$

berechnen, mit welchem Werthe die Gleichung (41) genauere Werthe von $L$ giebt, die man auf diese Weise beliebig verbessern kann. Hat man hinreichend genaue Werthe von $L$ und $l$ gefunden, so giebt wieder (42) die entsprechenden Werthe von $K$, und durch $K = N' - W$ und $H$ erhält man wieder durch die Ausdrücke des Art. 41 $\lambda$ und $\varphi_1$.

56.

Die Gleichung (41) giebt alle Durchschnittspunkte der Oberfläche des Schattenkegels mit der Erdoberfläche, und folglich auch die, welche auf der Nachtseite liegen. Wenn der ganze Schattenkegel die Erde schneidet, so entstehen hieraus zwei völlig von einander abgesonderte Curven, und unter diesen ist die, welche der Tagesseite angehört leicht dadurch zu erkennen, dass $H$ für die Höhe der Sonne über dem Horizont gehalten werden darf. In den Fällen, wo nicht der ganze Schattenkegel die Erde schneidet, sondern darüber hinausragt, müssen die Grenzpunkte der Curve besonders gesucht werden. Offenbar müssen diese Grenzpunkte auf der westlichen oder der östlichen Grenzcurve liegen, und die Bedingungsgleichung durch welche sie erhalten werden ist also dieselbe wie die für diese Curven, nemlich da $\psi + W = \theta - K$ ist,

$$tg H = - tg f \cos(\theta - K) - r$$

wofür wir hier auch

$$tg\,H = -\,tg\,f \cos(\theta - L) - r$$

schreiben dürfen. Eliminirt man hieraus $\theta$ durch die Gleichungen (39), so bekommt man, wenn man die Grössen derselben Ordnung wie bisher übergeht,

$$tg\,H = -\frac{S}{u'}\,tg\,f \cos(L - \Sigma') + \frac{tg\,f}{u'} - r$$

und substituirt man hierin den obigen Ausdruck (40) für $\cos(L - \Sigma')$, so bekommt man bis auf Grössen derselben Ordnung wie bisher,

$$tg\,H = \frac{tg\,f}{2u'}(1 - S^2 + u'^2) - r$$

57.

Von der andern Seite ist offenbar der Grenzwerth von $H$ derjenige, welcher $\cos(L - \Sigma') = \pm 1$ giebt, und für diesen giebt die Gleichung (40)

$$(S \pm l \cos H)^2 = (u' - tg\,f \sin H)^2$$

woraus

$$\cos(H \pm f) = \frac{-S \pm u'}{l}$$

und

$$\cos(H \mp f) = \frac{S \mp u'}{l}$$

folgt, in welchen stets entweder die oberen oder die unteren Zeichen zusammen gehören. Diese Ausdrücke geben vier Werthe von $\cos(H \pm f)$, von welchen aber zwei negativ sind, und deshalb ausgeschlossen werden müssen. Wenn die beiden positiven Werthe von $\cos(H \pm f)$ beide $< 1$ sind, so giebt der eine das Maximum und der andere das Minimum von $H$, und der im vor. Art. berechnete Grenzwerth findet nicht statt; der Schattenkegel ist gänzlich von der Erdoberfläche umgeben. Wenn hingegen nur der eine positive Werth von $\cos(H \pm f) < 1$ wird, so entspricht dieser dem Maximum, und der im vor. Art. entwickelte Werth dem Minimum von $H$. Dem letzteren gehören zwei Punkte der Curve an, weil im Allgemeinen jedem Werthe von $H$ zwei Werthe von $K$ entsprechen; der Schattenkegel ragt in diesem Falle über den Erdkörper hinaus.

Es kann unter Umständen $H$ auch den Maximalwerth $90^0$ erreichen, und da in diesem Falle der Nenner von (40) verschwindet, so muss der Zähler auch verschwinden, woraus die Bedingungsgleichung

$$S = \pm(u' - tg\,f)$$

sich ergiebt. $L$ und $K$ werden in diesem Falle durch die Gleichungen

(40) oder (41) in unbestimmter Form erhalten, brauchen aber gar nicht ermittelt zu werden, denn aus den Gleichungen (25) geht hervor, dass für $H = 90^0$

$$\varphi_1 = D \text{ und } \lambda = -\tau$$

werden.

58.

Die zweite, oben angekündigte, Auflösung der vorliegenden Aufgabe werde ich aus den Grundgleichungen (17) ableiten.

Da diese dieselbe Form haben wie die (16), und sich von diesen nur dadurch unterscheiden, dass die mit zwei Strichen versehenen, und sich auf den Punkt der Ränderberührung beziehenden Grössen statt der dem selenocentrischen Orte der Sonne angehörigen darin vorkommen, und $u''$ von den auf den Beobachtungsort sich beziehenden Grössen nicht abhängt, so gehen aus den (17) statt der (39) die folgenden hervor,

$$u'' \sin\theta'' = S\nu \sin\Sigma'' - \cos H'' \sin K''$$
$$u'' \cos\theta'' = S\nu' \cos\Sigma_1'' - d'' \cos H'' \cos K''$$

in welchen

$$\Sigma'' = N' - \theta + V - \Sigma\,;\ \Sigma_1'' = N' - \theta + V' - \Sigma$$

$$(43)\ \ldots\ \left\{\begin{array}{ll} \nu \sin V = \sin\theta'' \cos f\,; & \nu' \sin V' = \sin\theta'' \\ \nu \cos V = \cos\theta'' & ;\ \nu' \cos V' = \cos\theta'' \cos f \\ \quad d'' \sin D'' = & \sin\delta'' \\ \quad d'' \cos D'' = (1 - c)\cos\delta'' & \end{array}\right.$$

und $H''$ und $K''$ mit $D''$, $\varphi_1$ und $t''$ ebenso verbunden sind wie $H$ und $K$ mit $D$, $\varphi_1$ und $t + \Delta\alpha'$ durch die (25).

Nimmt man nun $\theta''$ beliebig an, so bestimmen die vorstehenden Gleichungen, wenn man sie wie folgt stellt,

$$(44)\ \ldots\ \left\{\begin{array}{l} \cos H'' \sin K'' = S\nu \sin\Sigma'' - u'' \sin\theta'' \\ \cos H'' \cos K'' = \dfrac{S\nu' \cos\Sigma_1'' - u'' \cos\theta''}{d''} \end{array}\right.$$

die Bögen $K''$ und $H''$, womit die Aufgabe gelöst ist, da hieraus $\varphi$ und $\lambda$ folgen.

59.

Diese Auflösung ist bei ihrer Einfachheit strenge und direct, nur darf man sie nicht anwenden, wenn $H''$ klein ist, in welchem Falle aber die vorhergehende Auflösung ein möglichst sicheres Resultat giebt. Man muss im Gegentheil diese Auflösung anwenden, wenn $H''$ oder $H$ seinem

Maximum oder Minimum nahe ist, denn in diesen Fällen kann die vorhergehende Auflösung nur ein unsicheres Resultat geben.

Da $\alpha'$, $\delta'$, $h$, $f$ und $u'$ gegeben sind, so wird nach Art. 26

$$u'' = u' \cos f$$

und durch die Ausdrücke des Art. 27, nemlich durch

$$\sin(\alpha'' - \alpha') = \sin f \frac{\sin\theta''}{\cos\delta'}$$
$$tg\,A = \cos f\, tg\,\theta'' \;;\; tg\,B = tg\,f \cos\theta''$$
$$\sin(\theta - A) = -\,tg\,f\, tg\,\delta' \sin A$$
$$\sin(\delta'' - B) = \frac{\cos B}{\cos f} \sin\delta'$$

oder, wenn man abkürzen will durch

$$\alpha'' - \alpha' = \sin f \frac{\sin\theta''}{\cos\delta'} \cdot 206265''$$
$$\delta'' = \delta' + tg\,f \cos\theta''. 206265''$$
$$\theta = \theta'' - tg\,f\, tg\,\delta' \sin\theta''. 206265''$$

bekommt man, nachdem $\theta''$ beliebig angenommen worden ist, die Werthe von $\alpha'' - \alpha'$, $\delta''$ und $\theta$, und kann nun durch die (43) nicht nur $\nu$, $V$, $\nu'$, $V'$ sondern auch $d''$ und $D''$ berechnen. Aus der Zusammensetzung von $\Sigma''$ und $\Sigma_1''$ ergiebt sich dass,

$$\Sigma'' = \Sigma' - \theta + V \;;\; \Sigma_1'' = \Sigma' - \theta + V'$$

wird *), und hiemit sind alle Grössen bekannt, die für die Berechnung von $K''$ und $H''$ durch (44) erforderlich sind. Setzt man nun

$$tg\,H_1 = \frac{tg\,H''}{\cos K''}$$

so wird den Gleichungen des Art. 41 analog

$$tg\,t'' = \frac{tg\,K'' \cos H_1}{\sin(H_1 - D'')}$$
$$tg\,\varphi_1 = cotg\,(H_1 - D'') \cos t''$$

und endlich

$$\lambda = t'' - \tau + \alpha'' - \alpha' - \Delta\alpha'$$

zufolge des Art. 26. Wenn man, nachdem der Werth von $\tau$ festgesetzt, und damit $S$ und $\Sigma$ durch die (38) berechnet worden sind, eine durch den Umkreis vertheilte Reihe von Werthen von $\theta''$ angenommen hat, so bekommt man auf diese Art für jeden derselben zwei Curvenpunkte, da dem $\cos H''$ zwei Werthe von $H''$ angehören. Da aber der eine dieser

*) Man fehlt hier sehr wenig, wenn man $V = V' = \theta''$ und $\nu = \nu' = 1$, so wie $u'' = u'$ setzt.

Werthe negativ ist, so gehört derselbe mit Ausnahme der Punkte, die in der Nähe des Horizonts liegen, der Nachtseite an, wogegen der andere, welcher positiv ist, der Tagseite angehört, und nur einen Punkt der eigentlichen Curve giebt. Wenn der Schattenkegel in dem zu $\tau$ gehörigen Zeitpunkt über die Erde hinaus ragt, so kann man $\theta''$ nicht durch den ganzen Umkreis annehmen, ohne auf imaginäre Werthe von $H''$ zu kommen. In diesem Falle ist also die Ausdehnung von $\theta''$ beschränkt, während dieses nicht der Fall ist, wenn der Schattenkegel die Erde an seinem ganzen Umfange schneidet.

„Es ist $\sin H''$ dem Sinus der Höhe des Punkts der Ränderberührung über dem wahren Horizont proportional.“

Um diesen Satz zu beweisen bemerke ich zuerst, dass die zweite und dritte der (25), wenn man die oben mit zwei Strichen bezeichneten Grössen darin substituirt,

$$\sin H'' = \sin D'' \sin \varphi_1 + \cos D'' \cos \varphi_1 \cos t''$$

geben. Eliminirt man hieraus zuerst $D''$ durch die Gleichungen (43), so wird

$$\sin H'' = \frac{1}{d''} \{\sin \delta'' \sin \varphi_1 + (1 - c) \cos \delta'' \cos \varphi_1 \cos t''\}$$

Im Art. 25 wurde aber

$$\cos \varphi_1 = \frac{\cos \varphi}{\sqrt{\cos^2 \varphi + (1 - c)^2 \sin^2 \varphi}}$$

$$\sin \varphi_1 = \frac{(1 - c) \sin \varphi}{\sqrt{\cos^2 \varphi + (1 - c)^2 \sin^2 \varphi}}$$

gefunden, wodurch

$$\sin H'' = \frac{1 - c}{d'' \sqrt{\cos^2 \varphi + (1 - c)^2 \sin^2 \varphi}} \{\sin \delta'' \sin \varphi + \cos \delta'' \cos \varphi \cos t''\}$$

wird. Da nun der in Klammern eingeschlossene Theil dieser Gleichung der Ausdruck des Sinus der Höhe des Punkts der Ränderberührung über dem wahren Horizont ist, so ist der obige Satz bewiesen. Wir können hiemit den Grenzwerth von $H''$ angeben welcher die Curve der Tagseite der Erde, — die eigentliche hier zu bestimmende Curve, — von der der Nachtseite absondert. Sie ist offenbar, dem Vorhergehenden zufolge,

$$H'' = -r$$

wenn wieder $r$ die Strahlenbrechung im scheinbaren Horizont bedeutet.

Man kann diese Auflösung mit der von Bessel im zweiten Bande seiner „Astronomischen Untersuchungen“ gegebenen Auflösung derselben Aufgabe identificiren, denn $\sin H''$ ist der bei Bessel vorkommenden,

und mit $P$ bezeichneten, Unbekannten proportional. Vergleicht man aber die hier entwickelte Auflösung mit der Besselschen, so wird man einen bedeutenden Unterschied an Einfachheit gewahr werden. Dass die Besselsche Auflösung überdies auch ein unsicheres Resultat giebt, wenn dieses $P$ klein ist, scheint von ihm nicht bemerkt worden zu sein; es tritt ein ähnliches Verhalten ein, wie wenn in der hier entwickelten Auflösung $\cos H''$ nahe $= 1$ wird. Durch Anwendung eines dem vorhergehenden analogen Verfahrens auf die Grundgleichungen (17) kann man auch für die nördliche und südliche, so wie für die westliche und östliche Grenzcurve weit einfachere Formeln erhalten wie die Besselschen, da aber demungeachtet diese Formeln weniger für die Anwendung geeignet sind, wie die im Vorhergehenden entwickelten, so lasse ich sie hier weg.

## §. 6. Nähere Untersuchung der Form einiger der im vor. § ermittelten Curven.

60.

Ueber die nördliche und die südliche Grenzcurve ist wenig zu sagen. Sie sind immer ovale Curven, worunter ich Curven verstehe, die aus Einem stetigen, in sich selbst zurückkehrenden Zweige bestehen, und keine mehrfache Punkte haben. Wenn beide diese Curven reel werden, so sind sie gänzlich von einander abgesondert; nicht die ganzen Curven, die durch die abgeleiteten Gleichungen gegeben werden, sind eigentliche Grenzcurven, da ein Theil des Ovals, welches sie bilden, immer in die Nachtseite der Erde fällt; die Anfangs- und Endpunkte der eigentlichen Grenzcurven sind die unter $c$) ermittelten, in welchen sie die westliche und die östliche Grenzcurve berühren. Die nördliche und die südliche Grenzcurve können beide zugleich reel werden, aber bei vielen Sonnenfinsternissen wird nur die eine derselben reel, und dieses findet selbstverständlich dann statt, wenn der Schattenkegel eine solche Lage hat, dass er während des ganzen Verlaufes der Sonnenfinsterniss über den Erdkörper hervorragt. Wenn der Schattenkegel eine solche Lage hat, dass er bei seinem Hinüberstreifen über den Erdkörper diesen in einem gewissen Zeitpunkt im Norden oder im Süden berührt, dann verwandelt sich die eine der beiden in Rede stehenden Grenz-

curven in einen Punkt. Die Bedingungsgleichung für diesen Umstand wurde im Art. 46 ermittelt und ist

$$e = \pm \gamma + u'$$

wo das obere Zeichen für ein positives und das untere für ein negatives $\gamma$ angewandt werden muss. Es folgt hieraus dass beide Grenzcurven reel sind wenn

$$e > \pm \gamma + u'$$

und dass die eine imaginär wird wenn

$$e < \pm \gamma + u'$$

und zwar wird die nördliche imaginär, wenn das obere, und die südliche, wenn das untere Zeichen angewandt werden muss.

61.

Die Formen, welche die westliche und die östliche Grenzcurve annehmen können, sind mannigfaltiger, und hängen von mehreren Bedingungen ab; diese sind es, welche vorzugsweise in diesem § untersucht werden sollen. Die Untersuchung dieser Curven wird durch die Anwendung der Grundgleichungen (17) sehr erleichtert, und wir dürfen noch dazu hier in diesen Gleichungen die Strahlenbrechung und die Abplattung übergehen, da die Bedingungsgleichungen der verschiedenen Formen, auf die wir kommen werden, von solcher Beschaffenheit sind, dass man leicht davon auf die Form schliessen kann, die sie angenommen haben würden, wenn nichts übergangen worden wäre.

Die Gleichungen (17) werden nach den genannten Uebergehungen, und wenn wir $\cos f = 1$ setzen

$$u' \sin \theta'' = -\gamma \cos N'' + \tfrac{\tau - \mu}{15} n \sin N'' - \cos \varphi \sin t''$$

$$u' \cos \theta'' = \gamma \sin N'' + \tfrac{\tau - \mu}{15} n \cos N'' - \sin \varphi \cos \delta'' + \cos \varphi \sin \delta'' \cos t''$$

wo

$$N'' = N' - \theta + \theta''$$

ist.

Die Bedingungsgleichung für die westliche und die östliche Grenzcurve wird jetzt

$$0 = \sin \varphi \sin \delta'' + \cos \varphi \cos \delta'' \cos t''$$

und in Folge dieser dürfen wir setzen

$$\sin K'' = \cos \varphi \sin t''$$
$$\cos K'' = \sin \varphi \cos \delta'' - \cos \varphi \sin \delta'' \cos t''$$

wodurch die vorhergehenden Gleichungen in folgende übergehen,

$$u' \sin \theta'' = -\gamma \cos N'' + \tfrac{\tau-\mu}{15}\, n \sin N'' - \sin K''$$
$$u' \cos \theta'' = \quad \gamma \sin N'' + \tfrac{\tau-\mu}{15}\, n \cos N'' - \cos K''$$

Führen wir hier die Bögen $\psi$ und $W$ durch die folgenden Gleichungen ein

$$\theta'' = \psi + N'' \,, \quad W = N'' - K''$$

von welchen $\psi$ mit dem oben eben so bezeichneten Winkel völlig identisch ist, so lassen sich die vorstehenden Gleichungen leicht in die folgenden umwandeln

$$\left.\begin{aligned} \sin W &= \gamma + u' \sin \psi \\ \tau &= \mu + \tfrac{15}{n} \cos W + \tfrac{15}{n} u' \cos \psi \\ \cos \varphi \sin t'' &= \sin (N'' - W) \\ \cos \varphi \cos t'' &= -\sin \delta'' \cos (N'' - W) \\ \sin \varphi &= \cos \delta'' \cos (N'' - W) \\ \lambda &= t'' + \alpha'' - \alpha' - \tau \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \quad (45)$$

die jetzt die Gleichungen der westlichen und der östlichen Grenzcurve sind. Sie sind den Gleichungen des Art. 38 mit dem Unterschied analog, dass die dort $H$ genannte Höhe des Sonnenmittelpunkts nicht darin vorkommt, und dieser Umstand macht sie zu den hier vorzunehmenden Untersuchungen sehr geschickt.

62.

Da das algebraische Zeichen von $\gamma$ keine andere Wirkung äussert, als dass es die Sonnenfinsterniss in ihrem allgemeinen Verlaufe von der nördlichen Halbkugel der Erde auf die südliche oder umgekehrt verlegt, so werde ich im ganzen Verlaufe der folgenden Untersuchungen $\gamma$ als eine positive Grösse betrachten, wodurch die Sonnenfinsterniss vorzugsweise auf die nördliche Halbkugel der Erde verlegt wird. Die Erscheinungen auf der südlichen Halbkugel sind bei negativem $\gamma$ ganz dieselben.

Das Zeichen von $\delta''$ kann in einigen Fällen mit in Betracht kommen, diese Fälle sollen besonders angemerkt werden.

Ich erinnere daran, dass $u'$ in der durch den Mittelpunkt der Erde gelegten Projectionsebene der Halbmesser des Schattenkegels ist; diesen werde ich mir in den folgenden Untersuchungen von der Grösse denken, wie er für die äusseren Ränderberührungen ist. Es wird dadurch nicht

verhindert, dass man sich auch unter $u'$ den Werth denken kann, welcher irgend einer Phase, oder der inneren Berührung der Ränder zukommt.

Die Grösse $\gamma$, welche in derselben Projectionsebene die kleinste Entfernung der relativen Mondbahn vom Mittelpunkt der Erde bedeutet, werde ich stufenweise von Null bis zu dem grössten Werthe, welcher in einer Sonnenfinsterniss statt finden kann, wachsen lassen; es ist klar, dass dadurch alle Modalitäten, die letztere bieten kann, umfasst werden.

## 63.

Nehmen wir zuerst $\gamma$ so klein an dass

$$\gamma + u' < 1$$

oder mit anderen Worten $\gamma$ von 0 bis dahin, wo diese Gleichung aufhört statt zu finden. Unter dieser Bedingung sind beides die nördliche und die südliche Grenzcurve reel, wie aus der oben dafür gefundenen Bedingung erkannt wird.

Die erste Gleichung (45) zeigt nun, dass $\psi$ sich auf der westlichen und der östlichen Grenzcurve durch den ganzen Umkreis bewegt, während in Bezug auf $W$ dieses nicht der Fall ist, denn die Grenzen von $\sin W$ sind

$$\gamma - u' \text{ und } \gamma + u'$$

die beide kleiner sind wie $\pm 1$.

Da nun zu jedem Werthe von $\sin W$ zwei Werthe von $W$ gehören, so durchläuft $W$ zwei Reihen von Werthen, die durch zwei Intervalle von einander abgesondert sind, während $\psi$ für jede dieser Reihen den ganzen Umkreis durchläuft. Die eine dieser Reihen von Werthen von $W$ liegt gänzlich im ersten Quadranten, wenn $\gamma > u'$ ist, — welches für Sonnenfinsternisse bei den Phasencurven, und denen für die inneren Ränderberührungen statt finden kann, — erstreckt sich aber in den vierten Quadranten hinein, wenn $\gamma < u'$ ist. Die andere Reihe liegt in dem ersten dieser beiden Fälle gänzlich im zweiten Quadranten, nimmt aber im zweiten Falle auch einen Theil des dritten Quadranten ein. In der einen Reihe ist also immer $\cos W$ positiv, und in der anderen negativ.

Jede dieser beiden Reihen giebt nun eine besondere, in sich zusammenhängende, aber von der anderen völlig abgesonderte Curve, und die eine dieser beiden Curven ist die westliche, die andere die öst-

liche Grenzcurve. Da die westliche Curve den Anfangsmomenten der Sonnenfinsterniss überhaupt, und die östliche den Endmomenten derselben angehört, jene daher in eine frühere Zeit fällt wie diese, so gehört zufolge der zweiten Gleichung (45) die Reihe, in welcher $\cos W$ negativ ist, der westlichen, und die in welcher $\cos W$ positiv ist, der östlichen Grenzcurve an.

64.

Verengern wir zuerst die durch $\gamma + u' < 1$ bestimmte Grenze von $\gamma$ noch dadurch dass wir die Bedingung

$$\gamma < \sin N'' - u'$$

einführen, und untersuchen wir die Grenzen der Bögen $N'' - W$ in diesem Falle. Sei

$$N'' = 90^0 \pm A,$$

seien ferner für die westliche Grenzcurve die Grenzwerthe von $W$

$$W = 90^0 + B \text{ und } W = 270^0 - C$$

und für die östliche Grenzcurve diese Grenzwerthe

$$W = 90^0 - B \text{ und } W = 270^0 + C$$

wo $A$ und $B$ stets $< 90^0$ sind, $C$ aber $90^0$ übersteigen kann. Hieraus ergeben sich für die westliche Grenzcurve die Grenzwerthe

$$N'' - W = \pm A - B \text{ und } N'' - W = 180^0 \pm A + C$$

und für die östliche dieselben

$$N'' - W = \pm A + B \text{ und } N'' - W = 180^0 \pm A - C$$

Da nun zufolge der obigen Bedingung die erste Gleichung (45)

$$A < B < C \text{ und } A + C < 180^0$$

giebt, so zeigen diese Gleichungen sogleich, dass auf der westlichen Grenzcurve stets

$$N'' - W \text{ im zweiten,}$$

und auf der östlichen Grenzcurve stets

$$N'' - W \text{ im ersten}$$

Halbkreise liegt, und die Grenzen dieser Halbkreise nicht erreichen kann.

Es entspricht nun in beiden Curven der Werth $\psi = 90^0$ dem Maximum von $\varphi$, und der Werth $\psi = 270^0$ dem Minimum; in jeder Curve hat $\varphi$ nur Ein Maximum und Ein Minimum; das Maximum ist kleiner

wie $90^0 - \delta''$, die beiden Curven können also den **äussersten** Parallelkreis — mit welchem Ausdruck ich den Parallelkreis bezeichne, über welchen hinaus, wenn $\delta''$ positiv ist, der Punkt der Ränderberührung nicht untergeht, oder wenn $\delta''$ negativ ist, nicht aufgeht, — nicht erreichen.

Die Gleichungen (45) geben ferner zu erkennen, dass der westlichen Grenzcurve nur Werthe von $t''$ entsprechen, die im zweiten Halbkreise, und der östlichen nur Werthe, die im ersten Halbkreise liegen. Der westlichen Grenzcurve entsprechen daher nur Sonnenaufgänge, und der östlichen nur Sonnenuntergänge. Sei

$$\lambda' = t'' + \alpha'' - \alpha' - \mu - \frac{15}{n} \cos W$$

dann geben die Gleichungen (45)

$$\lambda = \lambda' - \frac{15}{n} u' \cos \psi$$

Construiren wir nun für jede unserer beiden Curven die Curve, die den Längen $\lambda'$ und den Breiten $\varphi$ zukommt, so bekommen wir einestheils die westliche, und anderntheils die östliche Grenzcurve, wenn wir auf den, den bez. Werthen von $\varphi$ zukommenden, Parallelen einmal westlich und einmal östlich den Bogen $\frac{15}{n} u' \cos \psi$ auftragen. Denn für jeden dieser Parallelen ist $\cos \psi$ einmal positiv und einmal negativ. Von den beiden durch $\lambda'$ und $\varphi$ bestimmten Curven erstreckt sich also die eine im Innern der westlichen, und die andere im Innern der östlichen Grenzcurve von dem nördlichsten bis zum südlichsten Punkt derselben, ohne sie in dieser Ausdehnung zu schneiden. Es finden auch auf diesen Curven keine Stetigkeitsunterbrechungen statt.

Die westliche und die östliche Grenzcurve sind also in dem jetzt untersuchten Falle Ovale.

## 65.

Von diesen Ovalen liegt beiläufig die Hälfte ihres Umkreises an der Aussenseite des Bereichs der Sonnenfinsterniss auf der Erdoberfläche, und bildet also die eigentliche Grenzcurve. Die andere Hälfte des Umkreises fällt in den Bereich der Sonnenfinsterniss, denn in der Nähe des nördlichsten Punkts werden die beiden Curven von der nördlichen, und in der Nähe des südlichsten Punkts von der südlichen Grenzcurve berührt, und damit der Bereich der Sonnenfinsterniss auf der Erdober-

fläche vollständig abgegrenzt. Auf der äusseren Hälfte der westlichen Curve ist $\cos\psi$ bis auf die im Art. 42 bemerkte Ausnahme positiv, und auf dieser finden also in ihrer ganzen Ausdehnung Endpunkte der Sonnenfinsterniss bei Sonnenaufgängen statt; auf der äusseren Hälfte der östlichen Curve ist hingegen bis auf dieselbe Ausnahme $\cos\psi$ negativ, und es finden also dort in der ganzen Ausdehnung Anfangspunkte der Finsterniss bei Sonnenuntergängen statt. Auf der innern Hälfte der westlichen Curve ist $\cos\psi''$ negativ, und es finden daher dort Anfangspunkte der Finsterniss bei Sonnenaufgängen statt, während auf der inneren Hälfte der östlichen Grenzcurve, wo $\cos\psi''$ positiv ist, Endpunkte der Finsterniss bei Sonnenuntergängen statt finden. Die inneren Hälften dieser beiden Curven begrenzen also in Verbindung mit der nördlichen und der südlichen Grenzcurve den Theil der Erdoberfläche, auf welchem die Sonnenfinsterniss vollständig — oder, in Bezug auf einen weiter unten sich ergebenden Umstand, auf welchem von der Sonnenfinsterniss sowohl der Anfang wie das Ende — gesehen wird. Die sowohl von der westlichen Grenzcurve für sich, wie von der östlichen für sich eingeschlossene Fläche ist derjenige Theil der Erdoberfläche, auf welchem wegen des Hindernisses, welches der Horizont darbietet, der ganze Verlauf der Sonnenfinsterniss nicht gesehen werden kann, und die Sonne mehr oder weniger verfinstert auf- oder untergeht.

66.

Betrachten wir hierauf den Grenzfall

$$\gamma = \sin N'' - u'$$

so ist im Allgemeinen die Beschaffenheit unserer beiden Curven dieselbe wie vorher, nemlich sie sind Ovale, aber der eine Grenzwerth von $N'' - W$ wird jetzt

$$N'' - W = 0$$

und trifft mit dem Werthe $\psi = 90^0$ zusammen. In der Curve, welcher dieser Punkt angehört, ist jetzt das Maximum der Breite

$$\varphi = 90^0 - \delta'' \text{ und zugleich } t'' = 180^0$$

wenn $\delta''$ positiv ist, und

$$\varphi = 90^0 - \Delta \text{ und zugleich } t'' = 0$$

wenn $\delta''$ negativ ist, und $\Delta = -\delta''$ gesetzt wird.

Die betreffende Curve berührt also jetzt mit ihrem nördlichsten

Punkt den äussersten Parallelkreis, und diese Berührung findet statt, wenn der Punkt der Ränderberührung bez. im Mitternachts- oder im Mittagspunkt steht. Wenn

$$N'' < 90^0$$

ist, so tritt dieser Fall für die östliche, und wenn

$$N'' > 90^0$$

ist, so tritt er für die westliche Grenzcurve ein.

Dass im jetzigen Falle in der That noch beide Curven Ovale sind, wird aus einem der folgenden Artt. näher sich zu erkennen geben.

67.

Wir kommen jetzt zu dem Falle

$$\gamma > \sin N'' - u'$$

bei fortwährender Bedingung dass $\gamma + u' < 1$ sei, dem wir noch die Bedingung

$$N'' < 90^0$$

hinzufügen wollen, um den Ausdrücken der Erklärungen die grösste Bestimmtheit geben zu können. Unter diesen Bedingungen liegen immer noch die Reihe von Werthen von $N'' - W$, die der westlichen Grenzcurve angehören, im zweiten Halbkreise, und können nicht einmal die Grenzen desselben erreichen, viel weniger darüber hinausgehen. Denn seien wieder

$$N'' = 90^0 - A$$

und die bezüglichen Grenzwerthe von $W$

$$W = 90^0 + B \text{ und } W = 270^0 - C$$

wo wieder $A$ und $B < 90^0$ sind, hingegen $C > 90^0$ werden kann. Wir bekommen nun wieder die Grenzwerthe

$$N'' - W = 360^0 - A - B \text{ und } N'' - W = 180^0 + C - A$$

woraus sich zu erkennen giebt, dass diese Reihe von Bögen nur dann in den ersten Halbkreis übergehen kann, wenn $C - A$ negativ werden könnte. Aber es ist

$$\cos C = u' - \gamma$$

und in allen Sonnenfinsternissen ist

$$\cos A > u'$$

folglich immer $C > A$. W. z. b. w.

In unserem Falle ist also die westliche Grenzcurve immer noch ein Oval.

68.

Gehen wir nun mit Beibehaltung der zu Anfang des vor. Art. aufgestellten Bedingungen zu der Reihe von Werthen von $N'' - W$ über, die der östlichen Grenzcurve angehören, so erkennt man ohne weiteren Beweis, dass diese nicht mehr ausschliesslich im ersten Halbkreise liegt, sondern an dem Ende, welches dem nördlichen Theil dieser Grenzcurve entspricht, in den vierten Quadranten, das heisst in den zweiten Halbkreis übergeht. Unter den Werthen von $N'' - W$ befindet sich also wieder der Werth $N'' - W = 0$, wie im Art. 66, und diesem entsprechen wieder als Maximum der Breite

$$\varphi = 90^0 - \delta'' \text{ mit } t'' = 180^0$$

wenn $\delta''$ positiv, und

$$\varphi = 90^0 - \Delta \text{ mit } t'' = 0$$

wenn $\delta''$ negativ ist. Aber diese Werthe gehören jetzt nicht mehr wie a. a. O. dem Werthe $\psi = 90^0$ an, sondern den aus der Gleichung

$$u' \sin\psi = \sin N'' - \gamma$$

sich ergebenden beiden Werthen von $\psi$, von welchen der eine kleiner, und der andere grösser ist wie $90^0$. Es ist daher auf der östlichen Curve nicht Ein Maximum der Breite vorhanden, sondern es befinden sich deren zwei, die strenge genommen wegen der kleinen Aenderungen, welchen $\delta''$ und $N''$ unterworfen sind, ein wenig von einander verschieden sind.

Da von den beiden Werthen von $\cos\psi$ der eine positiv, und der andere negativ ist, so gehören die beiden Maxima der Breite verschiedenen Längen, und somit zwei verschiedenen Punkten der östlichen Grenzcurve an. In diesen beiden Punkten berührt diese Curve jetzt den äussersten Parallelkreis, und diese beiden Berührungen finden wieder statt, indem an den betreffenden Oertern der Erdoberfläche je nach dem Zeichen von $\delta''$ der Punkt der Ränderberührung im Mitternachts- oder Mittagspunkt steht *).

*) Den Punkt oder die beiden Punkte, in welchen diese Curve den äussersten Parallel berührt, bekommt man direct durch die im § 5 unter *b*) entwickelten Aus-

Zwischen diesen beiden Maximis hat $\varphi$ nothwendig ein Minimum, und dieses entspricht dem Grenzwerthe von $N'' - W$, welcher im zweiten Halbkreise liegt.

69.

Die östliche Grenzcurve fängt nun an andere Formen anzunehmen. Nehmen wir zuerst den Werth von $\gamma$ nicht grösser an als dass die Ungleichheit

$$\gamma > \sin N'' - u'$$

eben erfüllt ist, oder wenn $x$ ein beliebig kleines Increment bedeutet,

$$\gamma - x = \sin N'' - u'$$

wird, so ist sie wie vorher ein Oval, lässt man aber $\gamma$ wachsen, so verliert sie endlich zuerst dadurch die Form eines Ovals, dass sie in eine Spitze ausgeht, und folglich eine Unterbrechung der Stetigkeit erleidet. Um dieses zu zeigen, wollen wir die Differentiale derselben entwickeln. Uebergehen wir die Veränderungen der Grössen, die sich nur wenig und langsam ändern, da diese auf das Resultat keinen Einfluss äussern können, so geben die Gleichungen (45) zuerst

$$dW = u' \frac{\cos\psi}{\cos W} d\psi$$

$$d\lambda = dt'' + \frac{x}{n} \sin W dW + \frac{x}{n} u' \sin\psi\, d\psi$$

$$-\sin\varphi \sin t''\, d\varphi + \cos\varphi \cos t''\, dt'' = -\cos(N'' - W)\, dW$$

$$-\sin\varphi \cos t''\, d\varphi - \cos\varphi \sin t''\, dt'' = -\sin\delta'' \sin(N'' - W)\, dW$$

$$\cos\varphi\, d\varphi = \cos\delta'' \sin(N'' - W)\, dW$$

woraus durch eine leichte Elimination zuerst

$$dt'' = \frac{\sin\delta''}{\cos^2\varphi} dW \; ; \; d\varphi = \frac{\cos\delta''}{\cos\varphi} \sin(N'' - W)\, dW$$

und hierauf

$$d\lambda = \left\{ \frac{\sin\delta'' \cos\psi}{\cos^2\varphi \cos W} + \frac{x}{n} \frac{\sin(\psi + W)}{\cos W} \right\} u'\, d\psi$$

$$d\varphi = \frac{\cos\delta'' \cos\psi}{\cos\varphi \cos W} \sin(N'' - W)\, u'\, d\psi$$

hervorgeht. Gehen wir jetzt einen Augenblick auf die Bedingung des

---

drücke, wenn man die Rechnung mit $W = N'$ anfängt, und bis $\tau$ und $H$ fortsetzt. Es wird hierauf entweder

$$\lambda = -\tau, \; \varphi_1 = 90^0 - (H - D)$$

oder

$$\lambda = 180^0 - \tau, \; \varphi_1 = 90^0 - (D - H)$$

je nachdem man $t = 0$ oder $t = 180^0$ hat annehmen müssen.

Art. 66 zurück, und nehmen dem zufolge an dass

$$\gamma = \sin N'' - u'$$

sei, so zeigen die vorstehenden Gleichungen, dass in diesem Falle $d\lambda$ und $d\varphi$ nicht zugleich Null werden können. Denn $d\varphi = 0$ verlangt dass

$$\text{entweder } \cos\psi = 0 \text{ oder } N'' - W = 0$$

werde, diese beiden Bedingungen treffen jetzt in einem und demselben Curvenpunkt ein, und es wird ausserdem in diesem Punkt

$$d\lambda = \frac{x}{n} u' d\psi$$

ein Ausdruck, welcher nur in dem Falle Null werden kann, wo $u' = 0$ ist. Also abgesehen von diesem speciellen Falle, welcher sowohl die westliche wie die östliche Curve in einen Punkt verwandelt, ist die östliche Grenzcurve unter der Bedingung

$$\gamma = \sin N'' - u'$$

immer noch ein Oval, wie im Art. 66 behauptet wurde.

Nehmen wir aber die hier überhaupt geltende Bedingung

$$\gamma > \sin N'' - u'$$

wieder auf, so können wir unabhängig von dem Werthe von $u'$ zugleich $d\lambda = 0$ und $d\varphi = 0$ machen. Wir bekommen hiefür die Bedingungsgleichungen

$$0 = \cos\psi + \frac{x}{n} \sin\delta'' \sin(\psi + W)$$
$$0 = N'' - W$$

indem in diesem Falle $\cos\varphi = \sin\delta''$ wird. Man weiss aber aus der Theorie der Curven, dass die Bedingungen $d\lambda = 0$ und $d\varphi = 0$ diejenigen sind, unter welchen die betreffende Curve eine Spitze erhält. Sucht man den Ausdruck für $\psi$ aus den obigen Bedingungsgleichungen, so ergiebt sich

$$tg\,\psi = -\frac{\frac{n}{x} + \sin\delta'' \sin N''}{\sin\delta'' \cos N''} \quad \ldots\ldots \quad (46)$$

Aus dieser und aus

$$\gamma = \sin N'' - u' \sin\psi$$

geht der Werth von $\gamma$ hervor, welcher eine Spitze in der östlichen Grenzcurve bedingt.

Die Gleichung (46) ist keine andere wie die Bedingungsgleichung der grössten Phase. Denn bringen wir die Gleichung (32) für die grösste Phase auf die Form, die sie annehmen muss, wenn wir sie aus den

Grundgleichungen (17) statt aus den (16) entsprungen denken, und übergehen wir, so wie hier geschehen ist, die Abplattung und die Strahlenbrechung, so müssen wir darin $r=0$; $e=e'=1$, $\nu-\nu'=0$, $f=0$, $D=\delta''$ und, da ausserdem in unserem Falle $N''-W=0$ ist, $W=N''$ setzen. Nach diesen Substitutionen wird aber (32)

$$tg\,\psi=-\frac{\frac{\pi}{x}+\sin\delta''\sin N''}{\sin\delta''\cos N''}$$

mit (46) identisch. Es folgt hieraus dass die Spitze der östlichen Grenzcurve die nördliche Grenzcurve berührt, eine Eigenschaft von welcher leicht einzusehen ist, dass sie nothwendiger Weise statt finden muss. Es folgt ebenfalls aus dem Vorhergehenden, dass diese Spitze den äussersten Parallelkreis berührt. Dieses Resultat ist so bezeichnend, dass wir schliessen dürfen, dass es auch mit Rücksicht auf die Abplattung der Erde und die Strahlenbrechung statt findet, obgleich wir diese Grössen in der Ableitung desselben übergangen haben.

In jeder Sonnenfinsterniss ist $\gamma$ eine gegebene Grösse, und es wird daher selten der Fall eintreten, dass die obige Gleichung für den Grenzwerth von $u'$ erfüllt wäre, aber bei jeder Sonnenfinsterniss, bei welcher $\gamma$ grösser ist wie die obige Gleichung verlangt, lässt sich durch dieselbe, wenn man sie wie folgt stellt,

$$u'=\frac{\sin N''-\gamma}{\sin\psi}$$

wo $\psi$ der Gleichung (46) gnügen muss, ein Werth von $u'$ finden, der einer gewissen Phase angehört, und die bez. Grenzcurve dieser Phase hat die eben ermittelte Spitze. Man findet leicht, dass für $\delta''=0$ die Spitze im Pole des Aequators liegt.

## 70.

Nehmen wir nun an, dass $\gamma$ grösser sei, wie der den Bedingungen des vor. Art. entsprechende Werth, das heisst

$$\gamma>\sin N''-u'\sin\psi$$

wo wieder $\psi$ der Gleichung (46) entsprechen muss, dann können wieder $d\lambda$ und $d\varphi$ nicht zugleich Null werden, und die östliche Grenzcurve gewinnt ihre Stetigkeit wieder. Sie erlangt aber nicht wieder die Form eines Ovals, sondern erhält einen doppelten Punkt und nimmt die Figur einer 8 an.

Um das Vorhandensein dieses doppelten Punkts nachzuweisen, müssen wir das Zeichen von $\delta''$ besonders berücksichtigen; sei daher zuerst

$$\delta'' \text{ positiv.}$$

Es sollen nun $90^0 - A$ und $90^0 + A$, wo $A < 90^0$ ist, die beiden Werthe von $\psi$ bezeichnen, welchen der Werth $W = N''$ entspricht, oder es soll $A$ aus der folgenden Gleichung

$$\sin N'' = \gamma + u' \cos A$$

hervorgehen, und immer kleiner wie $90^0$ genommen werden. Da $N''$ jetzt kleiner ist wie das Maximum von $W$, so können wir eine Reihe positiver Bögen $a$ so bestimmen, dass aus den Werthen

$$\psi = 90^0 - A + a \text{ die Werthe } W = N'' + b$$

hervorgehen, und eine andere Reihe ebenfalls positiver Bögen $a'$ so, dass aus den Werthen

$$\psi = 90^0 + A + a' \text{ die Werthe } W = N'' - b$$

hervorgehen, und $b$ immer positiv ist. Die hiezu erforderlichen Gleichungen sind offenbar

$$\left.\begin{aligned} \sin(N'' + b) &= \gamma + u' \cos(A - a) \\ \sin(N'' - b) &= \gamma + u' \cos(A + a') \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (47)$$

Da nun für die erste Reihe von Werthen $N'' - W = -b$ und für die zweite Reihe $N'' - W = +b$ wird, so geben die Gleichungen (45), abgesehen von der hier zu übergehenden kleinen Aenderung des Werthes von $\delta''$, für die beiden hiemit durch $a$ und $a'$ bestimmten Curvenpunkte, gleiche Werthe von $\varphi$; für den Stundenwinkel $t''$ geben sie aber in der ersten Reihe $180^0 + c$, und in der zweiten Reihe $180^0 - c$, wo $c$ auch ein positiver Bogen ist. Für die Länge bekommen wir daher, wenn wir auch von den kleinen Aenderungen in $\alpha''$ und $\alpha'$ absehen,

$$\lambda = 180^0 + c + \alpha'' - \alpha' - \mu - \frac{15}{n} \cos(N'' + b) - \frac{15}{n} u' \sin(A - a)$$

und

$$\lambda = 180^0 - c + \alpha'' - \alpha' - \mu - \frac{15}{n} \cos(N'' - b) + \frac{15}{n} u' \sin(A + a') \quad .$$

Nennen wir nun den halben Unterschied dieser Längen $L$, so wird

$$L = c + \frac{15}{n} \sin N'' \sin b - \frac{15}{n} u' \sin(A + \tfrac{1}{2}(a' - a)) \cos \tfrac{1}{2}(a' + a) \quad (48)$$

und da dieser Unterschied im doppelten Punkt verschwinden muss, so ist die Bedingungsgleichung des letzteren

$$L = 0$$

Es ist nun von selbst klar, dass wenn bei einer stetigen Fortschreitung der in der Gleichung (48) vorkommenden veränderlichen Grössen nachgewiesen werden kann, dass die rechte Seite dieser Gleichung für einen gewissen Werth von $a$ positiv, und für einen gewissen anderen Werth von $a$ negativ wird, es gewiss zwischen diesen beiden Werthen einen dritten geben muss, für welchen sie Null wird, und welchem folglich der doppelte Punkt entspricht.

71.

Die Gleichungen (47) zeigen, dass wir $a$ wenigstens von Null bis $2A$ wachsen lassen können, ohne dass die Stetigkeit in den dazu gehörigen Werthen von $a'$ und $b$ unterbrochen wird, und aus den (45) geht hervor, dass ein stetiger Gang der Werthe von $c$ hieraus folgt. Man findet leicht, dass wenn $a$ das Interval von $a = 0$ bis $a = A$ durchläuft, die Grössen $a'$, $b$, $c$ von Null bis zur ihren Maximis wachsen, und von da wieder bis zum Werthe Null zurückkehren, wenn $a$ das Interval von $a = A$ bis $a = 2A$ durchläuft. Es correspondiren daher am Anfangspunkt dieser Periode die Werthe

$$a = 0,\ a' = 0,\ b = 0,\ c = 0$$

und am Endpunkt die Werthe

$$a = 2A,\ a' = 0,\ b = 0,\ c = 0$$

Substituiren wir nun die erste dieser beiden Gruppen von Werthen in (48), so wird $L$ negativ, und substituiren wir die zweite Gruppe, so wird $L$ identisch Null, woraus hervorgeht, dass durch diese Substitution die zwei verschiedenen Curvenpunkte, die sie darstellt, sich in Einen Punkt vereinigen. Entwickeln wir daher das Resultat der Substitution von $2A - da$ für $a$, und untersuchen wir das Zeichen derselben.

Differentiiren wir (48) und setzen nach der Differentiation

$$a = 2A,\ a' = 0,\ b = 0,\ c = 0$$

so bekommen wir

$$dL = dc + \frac{x}{n} \sin N'' \, db - \frac{x}{n} u' \cos A \, \frac{d(a' - a)}{2}$$

und die Gleichungen (47) geben nach derselben Substitution

$$\cos N'' \, db = - u' \sin A \, da$$
$$\cos N'' \, db = \quad u' \sin A \, da'$$

Die Gleichungen (45) werden nun zuerst

$$\cos\varphi \sin c = \sin b$$
$$\cos\varphi \cos c = \sin\delta'' \cos b$$
$$\sin\varphi = \cos\delta'' \cos b$$

und geben für $b = 0$

$$dc = \frac{db}{\sin\delta''}$$

womit der obige Ausdruck für $dL$ in den folgenden übergeht

$$\frac{dL}{da} = -u' \frac{\sin A}{\cos N''} \left\{ \frac{1}{\sin\delta''} - \frac{\varkappa}{n} \frac{\cos(N''+A)}{\sin A} \right\}$$

Ziehen wir um das Zeichen der rechten Seite dieser Gleichung zu erkennen, den Werth von $\psi$ zu Hülfe, welcher aus (46) hervor geht.

Da hier immer $\cos N''$ positiv angenommen wird, so zeigt die Gleichung (46), dass $\psi$ im zweiten Quadranten liegt, setzen wir daher

$$\psi = 90^0 + \chi$$

so ist gewiss $\chi < 90^0$, und aus der Gleichung (46) folgt

$$\frac{\varkappa}{n} = \frac{\sin\chi}{\sin\delta'' \cos(N''+\chi)}$$

woraus zuerst hervor geht, dass nothwendig $\cos(N''+\chi)$ positiv sein muss, da $\frac{\varkappa}{n}$ immer positiv ist. Die Elimination von $\frac{\varkappa}{n}$ aus $dL$ giebt nun

$$\frac{dL}{da} = -\frac{u' \sin(A-\chi)}{\sin\delta'' \cos(N''+\chi)}$$

aber es ist

$$\gamma > \sin N'' - u' \cos\chi$$
$$\gamma = \sin N'' - u' \cos A$$

folglich ist $A > \chi$, und $\frac{dL}{da}$ negativ. Die Substitution von $a = 2A - da$ in (48) macht also die rechte Seite derselben positiv, und das Vorhandensein des doppelten Punkts ist hiemit, wenn $\delta''$ positiv ist, bewiesen.

## 72.

Sei jetzt

$$\delta'' \text{ negativ}$$

und $\delta'' = -\Delta$. Wir müssen nun den entgegengesetzten Gang der Bögen $a$ und $a'$ betrachten, während $A$ dieselbe Grösse bleibt wie vorher. Es sollen daher jetzt den Werthen

$$\psi = 90^0 - A - a \text{ die Werthe } W = N'' - b$$

und den Werthen

$$\psi = 90^0 + A - a' \text{ die Werthe } W = N'' + b$$

entsprechen. Es folgen hieraus die Gleichungen

$$(49) \quad \ldots \quad \begin{cases} \sin(N'' - b) = \gamma + u' \cos(A + a) \\ \sin(N'' + b) = \gamma + u' \cos(A - a') \end{cases}$$

und es wird bez. $N'' - W = +b$ und $N'' - W = -b$. Hiemit geben die Gleichungen (45) wieder zwei gleiche Werthe für $\varphi$, und für $t''$ bez. die Werthe $c$ und $-c$, wo $c$ wieder positiv ist. Es wird daher jetzt

$$\lambda = c + \alpha'' - \alpha' - \mu - \frac{15}{n} \cos(N'' - b) - \frac{15}{n} u' \sin(A + a)$$

und

$$\lambda = -c + \alpha'' - \alpha' - \mu - \frac{15}{n} \cos(N'' + b) + \frac{15}{n} u' \sin(A - a')$$

und die Bedingungsgleichung des doppelten Punkts wird wieder $L = 0$, wenn

$$(50) \quad L = c - \frac{15}{n} \sin N'' \sin b - \frac{15}{n} u' \sin(A + \tfrac{1}{2}(a - a')) \cos \tfrac{1}{2}(a + a')$$

gesetzt wird. Lassen wir nun $a'$ das Interval von $a' = 0$ bis $a' = 2A$ durchlaufen, so fangen $a$, $b$, c mit Null an, wachsen bis zu ihren Maximis, und kehren wieder zum Werth Null zurück. Für den Werth $a' = 0$ wird wieder $L$ negativ, und für $a' = 2A$ identisch Null. Das Differential für den letztgenannten Punkt wird jetzt

$$dL = dc - \frac{\varkappa}{n} \sin N'' db - \frac{\varkappa}{n} u' \cos A \, \frac{d(a - a')}{2}$$

und die Gleichungen (49) geben

$$\begin{aligned} \cos N'' db &= \phantom{-} u' \sin A \, da \\ \cos N'' db &= - u' \sin A \, da' \end{aligned}$$

Die Gleichungen (45) sind jetzt

$$\begin{aligned} \cos\varphi \sin c &= \sin b \\ \cos\varphi \cos c &= \sin \Delta \cos b \\ \sin\varphi \quad &= \cos \Delta \cos b \end{aligned}$$

und hieraus folgt

$$dc = \frac{db}{\sin \Delta}$$

Der obige Ausdruck für $dL$ geht hiemit in den folgenden über

$$\frac{dL}{da'} = - u' \frac{\sin A}{\cos N''} \left\{ \frac{1}{\sin \Delta} - \frac{\varkappa}{n} \frac{\cos(N'' - A)}{\sin A} \right\}$$

Zufolge der Gleichung (46) liegt $\psi$ jetzt im ersten Quadranten, und wenn wir hier

$$\psi = 90^0 - \chi'$$

setzen, so erhalten wir

$$\frac{x}{n} = \frac{\sin\chi'}{\sin\Delta\cos(N''-\chi')}$$

wodurch sich zeigt, dass nothwendig $\cos(N''-\chi')$ positiv sein muss. Endlich folgt hieraus

$$\frac{dL}{da'} = -\frac{u'\sin(A-\chi')}{\sin\Delta\cos(N''-\chi')}$$

stets negativ, weil eben so wie oben bewiesen werden kann, dass $A > \chi'$ ist. Der Werth von $L$ aus der Gleichung (50) ist also für $a' = 2A - da'$ positiv, und der doppelte Punkt findet wieder statt.

73.

Es ist noch der Fall

$$\delta'' = 0$$

zu betrachten, welcher im Vorhergehenden ausgeschlossen ist. Die Gleichungen (48) und (50) können jetzt nichts anzeigen, aber aus den (45) lässt sich in diesem Falle leicht das Vorhandensein des doppelten Punkts nachweisen. Diese geben jetzt

$$t = 90^0 \text{ oder } = 270^0$$

und

$$\varphi = 90^0 - (N''-W) \text{ oder } = 90^0 + (N''-W)$$

jenachdem $N''-W$ positiv oder negativ ist. Wir haben aber gesehen, dass unter der jetzt geltenden Bedingung für $\gamma$ der Bogen $N''-W$ vom Positiven durch Null zum Negativen übergeht, bis zu einem negativen Maximum wächst, und dann wieder durch Null ins Positive übergeht. Hieraus und durch die beiden vorstehenden Gleichungen folgt leicht, dass von diesem negativen Maximum, dem ein Minimum von $\varphi$ entspricht, zu beiden Seiten ausgehend sich die Curvenzweige dem Pole des Aequators nähern, sich in diesem schneiden, und auf der anderen Seite desselben weiter erstrecken. Der doppelte Punkt liegt also jetzt im Pole des Aequators.

Das Vorhandensein der Spitze oder des doppelten Punkts unterliegt unter der hier statt findenden Bedingung $\gamma + u' < 1$ in Bezug auf die Werthe von $N''$ einer Beschränkung. Denn da für diese Formen bez.

$$\sin N'' \overline{\overline{<}}\, \gamma + u'\sin\psi$$

sein muss, so ist klar, dass für $N'' = 90^0$, und für eine Reihe, in der Nähe dieses Werthes liegender, Werthe von $N''$ diese Gleichung nicht erfüllt werden kann, und also weder eine Spitze noch ein doppelter Punkt statt findet.

## 74.

Die ganze westliche Grenzcurve entspricht jetzt noch wie vorher den Ränderberührungen bei Sonnenaufgängen, aber auch ein Theil der östlichen Grenzcurve entspricht jetzt derselben Erscheinung, und bietet noch andere Merkwürdigkeiten dar. Wir wollen um diese zu ermitteln den ganzen Zug dieser Curve verfolgen, und hiebei zuerst annehmen, dass

$$\delta'' \text{ positiv}$$

sei, da das Zeichen von $\delta''$ hier auch Einfluss ausübt, und die Beschaffenheit der Erscheinungen ändert.

Von dem Punkt an, wo die südliche Grenzcurve von der östlichen berührt wird, bis zum doppelten Punkt entspricht der äussere Zweig der letzteren Anfangspunkten der Sonnenfinsterniss bei Sonnenuntergängen, und von demselben Berührungspunkt bis zum ersten Berührungspunkt der östlichen Grenzcurve mit dem äussersten Parallel entspricht der innere Zweig Endpunkten der Finsterniss bei Sonnenuntergängen, während auf demselben inneren Zweige von dem zuletzt genannten Berührungspunkt bis zum doppelten Punkt Endpunkte der Finsterniss bei Sonnenaufgängen kommen. Vom doppelten Punkt bis zum Berührungspunkt mit der nördlichen Grenzcurve kommen auf dem äusseren Zweige nur Endpunkte bei Sonnenaufgängen vor, aber vom doppelten Punkt bis zur zweiten Berührung mit dem äussersten Parallel finden auf dem inneren Zweige Anfangspunkte bei Sonnenuntergängen statt, während von diesem Berührungspunkt bis zum Berührungspunkt mit der nördlichen Grenzcurve auf der Fortsetzung dieses inneren Zweiges Anfangspunkte bei Sonnenaufgängen liegen.

Der doppelte Punkt selbst gehört sowohl einem Anfang der Sonnenfinsterniss bei Sonnenuntergang wie einem Ende derselben bei Sonnenaufgang an, und da jene Erscheinung einem früheren Zeitpunkt angehört wie diese, so fängt auf dem doppelten Punkt die Sonnenfinsterniss am Abend bei Sonnenuntergang an, und hört am nächsten Morgen bei Sonnenaufgang auf. Sie ist also für diesen Punkt unsichtbar, wie überall auf den eigentlichen Grenzcurven. Der gesammte äussere Zweig der östlichen Curve ist daher eigentliche Grenzcurve der Sonnenfinsterniss.

Der Theil des äussersten Parallelkreises welcher zwischen den beiden Berührungspunkten mit der östlichen Grenzcurve liegt, und die beiden inneren Bögen der letzteren, die sich von diesen Berührungs-

punkten bis zum doppelten Punkt erstrecken, bilden eine dreieckige Figur, deren Fläche noch eine Merkwürdigkeit darbietet. Diese Fläche liegt gänzlich innerhalb der beiden inneren Zweige der östlichen Curve, und gehört zufolge des Art. 65 dem Theil der Erdoberfläche an, auf welchem die Finsterniss vollständig soll gesehen werden können. Allein hier findet die dort eingeschaltete Bemerkung Anwendung, dass unter der vollständigen Sichtbarkeit der Sonnenfinsterniss an einem Orte strenge genommen, vermöge der zu diesem Schluss führenden Analyse, nur die Sichtbarkeit des Anfanges und des Endes der Finsterniss verstanden werden kann. Ein auf irgend einem Punkt der Fläche dieser dreieckigen Figur befindlicher Beobachter sieht zwar den Anfang und das Ende der Finsterniss, aber die Sonne geht mehr oder weniger verfinstert unter, und am nächsten Morgen immer noch zum Theil verfinstert wieder auf.

## 75.

Sei jetzt

$$\delta'' \text{ negativ.}$$

Die beiden Berührungspunkte der östlichen Grenzcurve mit dem äussersten Parallel liegen jetzt auf dem äusseren Zweige derselben, während sie im vorher betrachteten Falle auf dem inneren Zweige derselben lagen. Vom Berührungspunkt mit der südlichen Grenzcurve bis zur ersten Berührung mit dem äussersten Parallel finden auf dem äusseren Zweige Anfangspunkte bei Sonnenuntergängen statt, und von diesem Berührungspunkt bis zum doppelten Punkt Anfangspunkte bei Sonnenaufgängen. Dieser zuletzt genannte Theil des äusseren Zweiges ist aus diesem Grunde keine eigentliche Grenzcurve, und eben so verhält es sich mit dem sich vom doppelten Punkte bis zur zweiten Berührung mit dem äussersten Parallelkreise, da auf diesem Theil des äusseren Zweiges Endpunkte der Finsterniss bei Sonnenuntergängen statt finden. Von diesem zweiten Berührungspunkt mit dem Parallelkreise an bis zum Berührungspunkt mit der nördlichen Grenzcurve wird der äussere Zweig der östlichen Grenzcurve wieder eigentliche Grenzcurve, da auf demselben Endpunkte der Finsterniss bei Sonnenaufgängen vorkommen.

Auf den inneren Zweigen finden jetzt vom Berührungspunkt mit der südlichen Grenzcurve bis zum doppelten Punkt Endpunkte der Finsterniss bei Sonnenuntergängen, und vom doppelten Punkt bis zur Be-

rührung mit der nördlichen Grenzcurve Anfangspunkte bei Sonnenaufgängen statt.

Im doppelten Punkt ist die Sonnenfinsterniss jetzt in ihrer ganzen Dauer sichtbar, sie fängt bei Sonnenaufgang an und hört mit Sonnenuntergang auf. Zwischen den beiden Berührungspunkten mit dem äussersten Parallel lässt in diesem Falle die östliche Grenzcurve eine Fläche offen, die ausserhalb des durch die Grenzcurve begrenzten Theils der Erdoberfläche liegt, und auf welcher demungeachtet die Finsterniss nicht unsichtbar ist. Es ist diese Fläche wieder die dreieckige Figur, die durch den erwähnten Bogen dieses Parallelkreises, und die sich von den zwei Berührungen damit bis zum doppelten Punkt erstreckenden Bögen der östlichen Grenzcurve gebildet wird. Auf der Fläche dieser dreieckigen Figur wird die Finsterniss jetzt wieder zum Theil gesehen, aber kein Anfangs- und kein Endpunkt; die Sonne geht zum Theil verfinstert auf, und zum Theil verfinstert unter.

76.

Werfen wir nach diesen Auseinandersetzungen einen Blick auf den Fall

$$\gamma > \sin N'' - u' \text{ und } N'' > 90^0$$

so zeigt sich sogleich dass wir denselben nicht besonders zu betrachten nöthig haben. Denn es ist an sich klar, dass alle eben für die östliche Grenzcurve entwickelten Eigenschaften sich nun auf die westliche Curve übertragen müssen, und umgekehrt.

77.

Lassen wir nun $\gamma$ so viel wachsen bis dass

$$\gamma + u' = 1$$

wird, und betrachten wir diesen Grenzfall. Die nördliche Grenzcurve verwandelt sich jetzt in einen Punkt, und in diesem müssen nothwendig die westliche und die östliche Grenzcurve zusammen stossen, und anfangen sich in die Curve zu vereinigen, die schon im Art. 28 mit dem Namen der westlich-östlichen Grenzcurve bezeichnet wurde.

Der Bogen $\psi$ durchläuft immer noch den ganzen Umkreis, aber der eine Grenzwerth von $W$ in jeder der beiden Reihen von Werthen dieses Bogens, die bis jetzt statt fanden, ist nun $W = 90^0$, und dieser Werth,

welchem nun $\psi = 90^0$ entspricht, gehört dem Punkt an, in welchem die Vereinigung statt findet.

Verbinden wir zuerst mit der obigen Bedingung den Fall

$$\sin N'' = 1.$$

so wird in dem Vereinigungspunkt auch

$$W = N''$$

und hiemit sind die Bedingungsgleichungen für die Spitze erfüllt, indem (46) $\psi = 90^0$ für $N'' = 90^0$ giebt. Da der eben betrachtete Punkt, in welchem diese Spitze statt findet, sowohl der westlichen wie der östlichen Grenzcurve angehört, so endigen beide sich in ihrem Vereinigungspunkt in Spitzen, die sich in Eine Spitze verwandeln, und den äussersten Parallelkreis berühren. In diesem Falle ist dieses die einzige Berührung dieser Curven mit dem äussersten Parallelkreis, und der durch die Vereinigung dieser beiden Spitzen gebildete doppelte Punkt ebenfalls der einzig vorhandene.

Es ist ferner jetzt überhaupt nur Eine innere Berührung des Schattenkegels mit dem Erdkörper möglich, und diese findet in demselben Punkt statt.

78.

Wenn fortwährend $\gamma + u' = 1$ angenommen wird, so ist ausser dem eben betrachteten Falle nur noch die Bedingung

$$\gamma > \sin N'' - u'$$

möglich, und wenn nicht etwa $N''$ so nahe an $90^0$ liegt, dass die Bedingung

$$\gamma > \sin N'' - u' \sin \psi$$

wo $\psi$ wieder der Gleichung (46) entsprechen muss, unmöglich wird, so findet ausser dem im Vereinigungspunkt befindlichen doppelten Punkt auch der im Vorhergehenden ermittelte doppelte Punkt statt, dessen Eigenschaften dieselben bleiben wie vorher. Die westlich-östliche Grenzcurve hat also jetzt zwei doppelte Punkte, von welchen wir den durch die Bedingung $\gamma + u' = 1$ entstandenen näher untersuchen müssen. Die Gleichung zwischen $W$ und $\psi$ ist jetzt

$$\sin W = \gamma + (1 - \gamma) \sin \psi$$

und das Differential hievon

$$\frac{d\psi}{dW} = \frac{1}{1-\gamma}\frac{\cos W}{\cos\psi}$$

Da aber in dem in Rede stehenden Punkt $W = \psi = 90^0$ ist, so wird in demselben der vorstehende Differentialquotient unbestimmt. Um den wahren Werth desselben zu ermitteln sei

$$W = 90^0 + x\ ,\ \psi = 90^0 + y$$

dann erhalten wir

$$\cos x = \gamma + (1 - \gamma)\cos y$$

und wenn man unter $x$ und $y$ unendlich kleine Grössen versteht, dann giebt die Substitution der beiden ersten Glieder der Reihenentwickelung von $\cos x$ und $\cos y$ in die vorstehende Gleichung

$$\frac{x}{y} = \pm\sqrt{1-\gamma}$$

und der obige Differentialquotient wird durch die ähnliche Substitution

$$\frac{d\psi}{dW} = \frac{x}{(1-\gamma)y}$$

woraus

$$\frac{d\psi}{dW} = \pm\frac{1}{\sqrt{1-\gamma}}$$

folgt. Substituirt man diesen Ausdruck sowohl wie $W = \psi = 90^0$ in die Differentialgleichungen

$$d\lambda = dt'' + \frac{x}{n}\sin W dW + \frac{x}{n}u'\sin\psi\, d\psi$$

$$dt'' = \frac{\sin\delta''}{\cos^2\varphi}dW\ ;\ d\varphi = \frac{\cos\delta''}{\cos\varphi}\sin(N'' - W)dW$$

des Art. 69, so bekommt man

$$d\lambda = \left\{\frac{\sin\delta''}{\cos^2\varphi} + \frac{x}{n} \pm \frac{x}{n}\sqrt{1-\gamma}\right\}dW$$

$$d\varphi = -\frac{\cos\delta''}{\cos\varphi}\cos N'' dW$$

Betrachten wir nun die Punkte unserer Curve, die den drei Elementen

$$W = 90^0 - dW;\ W = 90^0;\ W = 90^0 + dW$$

angehören, so geben die eben erhaltenen Ausdrücke für $d\lambda$ und $d\varphi$ offenbar zwei sich schneidende Linien oder Elemente dieser Curve, und die westlich-östliche Grenzcurve hat in dem Punkt, wo die westliche und die östliche Curve einander berühren, einen zweiten doppelten Punkt, in welchem die Stetigkeit nicht unterbrochen ist. Der im Vorhergehenden ermittelte doppelte Punkt findet ausserdem noch statt. Jener doppelte Punkt ist immer noch derjenige, in welchem die jetzt nur mögliche Eine innere Berührung des Schattenkegels mit dem Erdkörper statt findet.

79.

Es kommt nun die Betrachtung des Falles

$$\gamma + u' > 1$$

an die Reihe, die mit der Untersuchung des Ueberganges von $\gamma + u' < 1$ zu $\gamma + u' > 1$ eröffnet werden muss. Differentiiren wir die Gleichung

$$\sin W = \gamma + u' \sin \psi$$

einmal indem wir $W$ und $\gamma$, und einmal indem wir $\psi$ und $\gamma$ veränderlich setzen, so bekommen wir

$$\frac{dW}{d\gamma} = \frac{1}{\cos W}, \quad \frac{d\psi}{d\gamma} = -\frac{1}{u' \cos \psi}$$

und da im Uebergangspunkt $W = \psi = 90^0$ ist, so wird in diesem

$$\frac{dW}{d\gamma} = \infty, \quad \frac{d\psi}{d\gamma} = \infty$$

Es findet also hier eine Unterbrechung der Stetigkeit statt, und sowohl in dem Falle, wo $\gamma + u'$ um eine unendlich kleine Grösse kleiner wie 1 war, wie in dem Falle, wo $\gamma + u'$ um eine unendlich kleine Grösse grösser wie 1 wird, trennen sich die Curvenpunkte, die sich in dem Falle $\gamma + u' = 1$ zu einem doppelten Punkt vereinigten, um eine endliche Grösse von einander. In jenem Falle trennen sich die beiden Curven völlig von einander, und gehen abgesondert in die westliche und die östliche Grenzcurve über, in diesem Falle bleiben sie zwar zur westlich-östlichen Grenzcurve vereinigt, aber der doppelte Punkt, welcher im Grenzfalle $\gamma + u' = 1$ statt fand, hört plötzlich auf. Die Stetigkeit findet wieder allenthalben auf dieser Curve statt, denn es können jetzt $d\lambda$ und $d\varphi$ nicht mehr zu gleicher Zeit Null oder unendlich werden.

80.

Der Gang der Einen, jetzt nur noch statt findenden, Reihe von Werthen von $W$ ist vom Minimum bis zum Maximum stetig, wenn man $\psi$ stetig fortschreiten lässt. Die beiden Grenzwerthe von $W$ entsprechen jetzt der Gleichung

$$\sin W = \gamma - u'$$

und stehen also zu beiden Seiten gleich weit von $W = 90^0$ ab, welcher Werth die Mitte der ganzen Reihe von Werthen dieses Bogens bildet. Der Bogen $\psi$ kann jetzt auch nicht mehr den ganzen Umkreis durch-

laufen, sondern ist in zwei Grenzen eingeschlossen, die durch die folgende Gleichung gegeben sind

$$\sin\psi = \frac{1-\gamma}{u'}$$

Da dieser Werth das Maximum von $\sin\psi$ ist, so müssen alle anderen kleiner sein, und endlich negativ werden, wenn nicht etwa schon dieses Maximum negativ ist, welches sehr wohl eintreffen kann, da hier $\gamma > 1$ werden kann. Das Minimum von $\sin\psi$ ist nun jedenfalls $= -1$, und es folgt hieraus dass die beiden durch die vorstehende Gleichung gegebenen Grenzwerthe von $\psi$ zu beiden Seiten gleich weit von dem Werthe $\psi = 270^0$ abstehen, welcher also den Mittelwerth der ganzen Reihe bildet.

Die Grenzwerthe von $\psi$ treffen mit dem Mittelwerth von $W$, und die Grenzwerthe von $W$ mit dem Mittelwerthe von $\psi$ zusammen. In der Nähe des letzteren finden die zwei Berührungspunkte der westlich-östlichen Grenzcurve mit der südlichen statt.

81.

Aus den Differentialgleichungen

$$d\lambda = \left\{\frac{\sin\delta''\cos\psi}{\cos^2\varphi\cos W} + \frac{\varkappa}{n}\frac{\sin(\psi+W)}{\cos W}\right\} u'd\psi$$

$$d\varphi = \frac{\cos\delta''\cos\psi}{\cos\varphi\cos W}\sin(N''-W)\, u'\,d\psi$$

des Art. 69 scheint hervor zu gehen, dass $d\lambda$ und $d\varphi$ beide unendlich gross werden, wenn $W = 90^0$ ist, aber dieses ist nur scheinbar, denn für diesen Werth von $W$ wird $d\psi = 0$, weil demselben die Grenzwerthe von $\psi$ entsprechen. Die vorstehenden Gleichungen geben also in der That $d\lambda$ und $d\varphi$ in dem genannten Punkt unbestimmt, und diese Unbestimmtheit kann entfernt werden. Durch die Gleichung

$$d\psi = \frac{\cos W}{u'\cos\psi}\, dW$$

kann man die vorstehenden Gleichungen leicht in die folgenden umwandeln,

$$d\lambda = \left\{\frac{\sin\delta''}{\cos^2\varphi} + \frac{\varkappa}{n}\frac{\sin(\psi+W)}{\cos\psi}\right\} dW$$

$$d\varphi = \frac{\cos\delta''}{\cos\varphi}\sin(N''-W)\, dW$$

die nicht mehr zugleich unendlich werden können, es wäre denn, dass $\varphi = 90^0$ würde. Dieser Werth kann aber nur statt finden, wenn $\delta'' = 0$

ist, und bietet einen speciellen Fall dar, über welchen im Vorhergehenden schon das Bemerkenswerthe enthalten ist. Für $\psi = 270^0$ wird durch den obigen Ausdruck zwar wieder $d\lambda$ unbestimmt, weil alsdann $dW = 0$ wird, aber es wird zugleich $d\varphi = 0$, und dieser Werth bedeutet hier nichts weiter, als dass in den beiden demselben entsprechenden Curvenpunkten die ersten Elemente der Tangente an der Curve mit dem bez. Parallelkreis zusammen fallen. Dieses findet in der Nähe der beiden Berührungspunkte mit der südlichen Grenzcurve statt.

82.

Die westlich-östliche Grenzcurve hat vorläufig immer noch die Figur einer 8, und zwar auch wenn $N'' = 90^0$, oder in der Nähe dieses Werthes liegt. Die in den Artt. 74 und 75 entwickelten Eigenschaften der östlichen Grenzcurven erstrecken sich jetzt unverändert auf die westlich-östliche. Den Beweis des doppelten Punktes müssen wir von Neuem durchführen, da einige der Schlussfolgerungen, die oben in dem Falle $\gamma + u' < 1$ statt fanden, hier wo $\gamma + u' > 1$ ist ihre Geltung verlieren. Ich darf aus den oben schon aus einander gesetzten Gründen wieder

$$N'' < 90^0$$

annehmen, und werde auch der Kürze wegen den Beweis nur in der Voraussetzung dass

$$\delta'' \text{ positiv}$$

sei durchführen, da die Abänderungen, die er für ein negatives $\delta''$ verlangt, den für jenen Fall oben aus einander gesetzten völlig analog sind.

Es sei nun wieder $A$ durch die Gleichung

$$\sin N'' = \gamma + u' \cos A$$

gegeben, wobei zu bemerken ist, dass nun nicht unbedingt $A < 90^0$ wird, sondern auch $A > 90^0$ werden kann. Dieser letztere Fall tritt ein wenn $\gamma > \sin N''$ wird, welches jetzt möglich ist, da $\gamma > 1$ werden kann. Wir können jetzt die Grössen $a$, $a'$, $b$, $c$ wieder eben so einführen, wie im Art. 70, wodurch wir wieder die Gleichungen (47) und (48) erhalten, aber wir dürfen nicht mehr $a$ das Interval von 0 bis $2A$ durchlaufen lassen, weil wir dadurch auf imaginäre Werthe der übrigen Veränderlichen hingeführt werden würden. Dahingegen kann man $a'$ von $a' = 0$ bis $a' = 360^0 - 2A$ wachsen lassen, ohne dass die anderen Veränder-

lichen imaginär werden, und am Anfang und Ende dieses Intervals sind wieder $a = b = c = 0$.

Substituiren wir nun $a' = 0$ in die rechte Seite der Gleichung (48), so wird wieder $L$ negativ, substituiren wir dagegen $a' = 360^0 - 2A$, so wird wieder identisch $L = 0$.

Das Differential von $L$ für $a' = 360^0 - 2A$ wird wieder

$$dL = dc + \frac{\varkappa}{n} \sin N'' db - \frac{\varkappa}{n} u' \cos A \frac{d(a'-a)}{2}$$

und es ist auch wieder

$$dc = \frac{db}{\sin \delta''}$$

aber die (47) geben jetzt

$$\cos N'' db = \quad u' \sin A\, da$$
$$\cos N'' db = - u' \sin A\, da'$$

und hiemit wird

$$(51) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \frac{dL}{da'} = - u' \frac{\sin A}{\cos N''} \left\{ \frac{1}{\sin \delta''} + \frac{\varkappa}{n} \frac{\cos (N'' - A)}{\sin A} \right\}$$

Setzen wir $\psi = 270^0 + \chi''$ in (46), so wird da jetzt $\psi$ im vierten Quadranten liegt, $\chi'' < 90^0$ sein, und wir bekommen

$$\frac{\varkappa}{n} = \frac{\sin \chi''}{\sin \delta'' \cos (N'' + \chi'')}$$

und $\cos(N'' + \chi'')$ muss wieder positiv sein. Hiemit ergiebt sich jetzt

$$\frac{dL}{da'} = - \frac{u' \sin (\chi'' + A)}{\sin \delta'' \cos (N'' + \chi'')}$$

und $\frac{dL}{da'}$ ist wieder gewiss negativ wenn $A < 90^0$.

Um den Fall zu erörtern wo $A > 90^0$ ist, sei

$$A = 180^0 - A'$$

dann ist $A' < 90^0$, und es wird

$$\frac{dL}{da'} = - \frac{u' \sin (A - \chi'')}{\sin \delta'' \cos (N'' + \chi'')}$$

Die Gleichung zwischen $N''$ und $A'$ wird nun

$$\gamma = \sin N'' + u' \cos A'$$

und stellen wir hiezu die Bedingung auf, dass

$$(52) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \gamma < \sin N'' + u' \cos \chi''$$

sein soll, so ist wieder $\frac{dL}{da'}$ negativ. Wenn daher $\gamma + u' > 1$ ist, so findet der doppelte Punkt statt, so lange $\gamma$ nicht grösser ist, als dass die Ungleichheit (52) erfüllt wird.

83.

Den Fall $\delta'' = 0$ brauchen wir hier nicht wieder zu erörtern, da die Umstände worauf es hier ankommt, dieselben sind wie die im Art. 73 erörterten, und wir folglich auf dasselbe Resultat kommen müssen. Aber der Inhalt des vor. Art. bietet einen anderen Fall dar, welcher besonders untersucht werden muss. Es ist dieses der Fall

$$N'' = 90^0$$

denn da in diesem Falle $\chi'' = 0$ wird, so wird der Nenner des im vor. Art. für $\frac{dL}{da'}$ gefundenen Ausdrucks gleich Null, und dieser Ausdruck verliert daher jetzt seine Bedeutung.

Die Gleichungen (47) werden jetzt

$$\cos b = \gamma + u' \cos(A - a)$$
$$\cos b = \gamma + u' \cos(A + a')$$

Hieraus folgt, dass wenn wir nun von $a = 0$ und $a' = 0$ ausgehen und $a$ wachsen lassen, $a' = -a$ wird, und beide Gleichungen in Eine zusammen fallen. Setzen wir daher $a' = -a$ in (48), so bekommen wir

$$L = c + \frac{15}{n} \sin b - \frac{15}{n} u' \sin(A - a)$$

Setzen wir darin $b = 0$, so werden auch $a$ und $c = 0$, und $L$ wird negativ, lassen wir aber $b$ wachsen bis dass

$$\cos b = \gamma - u'$$

ist, — ein Ausdruck der immer möglich ist, weil immer $\gamma - u' < 1$ sein muss, — so wird $\cos(A - a) = -1$, und es ergiebt sich daher

$$L = c + \frac{15}{n} \sin b$$

Es wird jetzt $L$ positiv, und der doppelte Punkt findet also für $N'' = 90^0$ unbeschränkt statt, während er, wenn $N''$ von $90^0$ verschieden ist, der durch (52) bestimmten Beschränkung unterworfen ist.

Dieses anscheinende Paradoxon wird sich bald vollständig aufklären.

84.

Ersetzen wir $\chi''$ durch $\psi$ in (52), so hört zufolge dieser Gleichung der doppelte Punkt auf statt zu finden wenn

$$\gamma = \sin N'' - u' \sin \psi \quad \ldots\ldots \quad (53)$$

wird, $\psi$ der Gleichung (46) gnügt, und im zweiten Halbkreise angenom-

men wird; es zeigt sich hiemit dass die westlich-östliche Grenzcurve wieder in eine Spitze ausgeht.

Diese Spitze der westlich-östlichen Grenzcurve berührt jetzt nicht nur die südliche Grenzcurve sondern auch den äussersten Parallelkreis.

85.

Betrachten wir nun wieder zur Ergänzung der Untersuchung des vorvor. Art. den Fall $N'' = 90^0$, und substituiren diesen Werth in die Bedingungsgleichungen der Spitze, so erhalten wir

$$\psi = 270^0 \text{ und } \gamma - u' = 1$$

die letztere dieser Gleichungen drückt aber die Bedingung aus, dass zwischen dem Schattenkegel und dem Erdkörper nur Eine äussere Berührung statt findet, und die Sonnenfinsterniss daher überhaupt anfängt unmöglich zu werden. Dieses stimmt vollständig mit dem Resultat des vorvor. Art. überein, zufolge dessen der doppelte Punkt unbeschränkt statt findet, wenn $N'' = 90^0$ ist.

Nehmen wir aber $N''$ von $90^0$ verschieden an, so findet zufolge (53) die Spitze statt, während $\gamma - u' < 1$ ist, und das Vorhandensein des doppelten Punkts erleidet daher eine Beschränkung, wie im Art. 82 nachgewiesen wurde. Hiemit ist das Resultat des Art. 82 mit dem des Art. 83 in vollständige Uebereinstimmung gebracht.

86.

Wir können nun mit Ausnahme von $N'' = 90^0$ weiter gehen und

$$\gamma > \sin N'' - u' \sin \psi$$

setzen, wo $\psi$ wieder der Gleichung (46) genügen, und im zweiten Halbkreise angenommen werden muss. Unter dieser Bedingung hat die Spitze aufgehört statt zu finden, der doppelte Punkt kann auch nicht wieder eintreten, und die westlich-östliche Grenzcurve hat daher die Form eines Ovals angenommen. So lange ausserdem

$$\gamma < \sin N'' + u'$$

ist, hat dieses Oval zwei Maxima der Breite, die den äussersten Parallelkreis berühren*). So wie

*) Auf der zwischen diesen beiden Maximis der Breite, von dem äussersten Parallelkreis und der westlich-östlichen Grenzcurve, gebildeten zweieckigen Figur findet auch eine doppelte Unterbrechung der Sichtbarkeit der Sonnenfinsterniss durch den

$$\gamma = \sin N'' + u'$$

wird verliert die westlich-östliche Curve das eine Maximum der Breite, und wenn

$$\gamma > \sin N'' + u'$$

jedoch immer noch $\gamma < 1 + u'$ ist, berührt das Oval nicht mehr den äussersten Parallelkreis, denn in diesem Falle liegen — immer für $N'' < 90^0$ — alle Werthe von $N'' - W$ im zweiten Halbkreise, und erreichen nicht die Grenzen desselben. Alle Punkte der Curve gehören jetzt Sonnenaufgängen an. Wenn endlich

$$\gamma = 1 + u'$$

wird, so verwandelt sich die westlich-östliche, sowohl wie die südliche Grenzcurve in einen und denselben Punkt, und in diesem findet die einzige und äussere Berührung des Schattenkegels mit dem Erdkörper statt. Wenn $\gamma$ noch grösser wird ist die Sonnenfinsterniss unmöglich.

Statt einer Recapitulation aller im Vorhergehenden ermittelten Formen der in Rede stehenden Curven möge die Anführung der anfänglichen, mittleren und schliesslichen Formen derselben gnügen. Wenn (immer für ein positives $\gamma$)

$$\gamma < \sin N'' - u' \sin \psi$$

wo $\psi$ der Gleichung für die grösste Phase gnügen, und im ersten Halbkreise angenommen werden muss, nachdem in dieser Gleichung $N''$ statt $W$ gesetzt worden ist, so ist die westliche und die östliche Grenzcurve jede für sich ein Oval. Wenn

$$\gamma = \sin N'' - u' \sin \psi$$

wird, wo $\psi$ derselben Bedingung wie oben unterworfen ist, so ist von den letzt genannten Grenzcurven die eine noch immer ein Oval, die andere erhält aber eine Spitze, in welcher sie sowohl die nördliche Grenzcurve wie den äussersten Parallel berührt. Wenn $N < 90^0$ so hat die östliche Grenzcurve diese Spitze, und wenn $N > 90^0$ so bekommt die westliche Grenzcurve dieselbe. Wenn

$$\gamma > \sin N - u' \sin \psi$$

aber immer noch $\gamma + u' < 1$ sind, so nimmt die Grenzcurve die vorher eine Spitze hatte, die Figur einer 8 an, und wird wieder in allen ihren

---

Horizont statt, die eben so beschaffen ist, wie die in den Artt. 74 u. 75 beschriebene. In dem im Art. 68 erläuterten Falle findet dasselbe statt, und überhaupt tritt diese doppelte Unterbrechung immer ein, wenn die Curven, die hier untersucht werden, zwei Maxima der Breite haben, in welchen sie den äussersten Parallelkreis berühren.

Punkten stetig. Die westliche und die östliche Grenzcurve sind noch jede für sich geschlossene Curven. Wenn

$$\gamma + u' > 1$$

ist, so haben sich die westliche und östliche Grenzcurve zur westlich-östlichen vereinigt, und diese hat immer noch die Figur einer 8 so lange als

$$\gamma < \sin N'' - u' \sin \psi$$

ist, wo $\psi$ derselben oben genannten Gleichung gnügen aber im zweiten Halbkreise angenommen werden muss. Wenn unter denselben Bedingungen

$$\gamma = \sin N'' - u' \sin \psi$$

wird, so verliert die westlich-östliche Grenzcurve die Figur einer 8, und erhält eine Spitze, mit welcher sie zugleich die südliche Grenzcurve und den äussersten Parallel berührt. Wenn endlich

$$\gamma > \sin N'' - u' \sin \psi$$

wird, so nimmt die westlich-östliche Grenzcurve die Form eines Ovals an, und behält diese bis dahin wo $\gamma$ so gross ist, dass keine Sonnenfinsterniss möglich ist.

## 87.

Von der Curve der grössten Phase im Horizont wurde schon im Art. 47 bemerkt, dass sie sich im Innern der beiden Ovale erstreckt, aus welchen bei kleinem $\gamma$ die westliche und die östliche Grenzcurve bestehen. Wenn die Bedingung der Spitze eintritt, so erreicht der bez. Zweig der Curve der grössten Phase im Horizont in dieser Spitze seinen einen Endpunkt.

Wenn für jene Curven die Figur einer 8 statt findet, so durchschneidet die Curve der grössten Phase im Horizont die 8 Curven zwei Mal, und zwar in den Zweigen, die in Verbindung mit einem Theile des äussersten Parallelkreises die dreieckige Figur bilden, auf deren Fläche die Sichtbarkeit der Finsterniss zwei Mal vom Horizont unterbrochen wird. Da ihr Berührungspunkt mit dem äussersten Parallelkreis zwischen den beiden Berührungspunkten der 8 Curve mit diesem Parallelkreise liegt, so theilt sie die genannte dreieckige Figur in drei auch dreieckige Figuren. Wenn $\delta''$ positiv ist, so umfasst die mittlere dieser drei dreieckigen Figuren die Fläche auf welcher die grösste Phase unter dem Horizont statt findet, und die beiden äusseren die Flächen, auf welchen

die grösste Phase über dem Horizont statt findet. Wenn $\delta''$ negativ ist, so findet im Gegentheil auf der mittleren Figur die grösste Phase über dem Horizont, und auf den beiden äusseren Figuren dieselbe unter dem Horizont statt. Die beiden Durchschnittspunkte der Curve der grössten Phase im Horizont mit der 8 Curve lassen sich durch ein ähnliches Verfahren, wie das im Vorhergehenden angewandte, nachweisen.

## §. 7. Entwickelung der Differentialformeln für die Aenderungen der Lage der Grenzcurven in Bezug auf kleine Aenderungen in der Elongation des Mondes von der Sonne und der Mondbreite.

88.

Auch hier gnügt es vollständig, wenn wir die Abplattung und die Strahlenbrechung, so wie die Veränderlichkeit der Grössen, die sich während der Dauer einer Sonnenfinsterniss nur wenig ändern, übergehen. Um aber übrigens die grösste Genauigkeit mit der einfachsten Form zu verbinden müssen wir wieder von den Gleichungen (17) ausgehen, aber man wird in den Anwendungen nur wenig von der Genauigkeit opfern, wenn man $N'$ für $N''$ und die geocentrische Aufsteigung und Abweichung der Sonne für $\alpha''$ und $\delta''$, so wie $\theta$ für $\theta''$ liest. Es ist wohl in allen Fällen, die vorkommen können, die hiedurch begangene Uebergehung völlig unschädlich. Es sollen also hier die folgenden Gleichungen benutzt werden,

$$u' \sin(\psi + N'') = -\gamma \cos N'' + \frac{\tau - \mu}{15} n \sin N'' - \cos\varphi \sin t''$$

$$u' \cos(\psi + N'') - \gamma \sin N'' + \frac{\tau - \mu}{15} n \cos N''$$
$$- \sin\varphi \cos\delta'' + \cos\varphi \sin\delta'' \cos t''$$

in welchen $\psi$, $\tau$, $\varphi$, $t''$, $\gamma$, $\mu$ die veränderlichen Grössen sind. Die beiden letzten dieser sind durch die Gleichungen (11), nemlich durch

$$\gamma = Q_0 \sin N - P_0 \cos N$$
$$\mu = 15\, T_0 - \frac{15}{n} \{Q_0 \cos N + P_0 \sin N\}$$

mit den hier als Veränderliche zu betrachtenden Coordinaten $P_0$ und $Q_0$ verbunden, und für diese dürfen wir die folgenden Ausdrücke anwenden,

$$P_0 = \frac{(l - l') \cos b}{\sin(\pi - \pi')}, \quad Q_0 = \frac{b}{\sin(\pi - \pi')}$$

wo wie oben $l$, $b$, $\pi$ Länge, Breite und Aequatoreal-Horizontalparallaxe

des Mondes, und $l'$ und $\pi'$ Länge und Horizontalparallaxe des Mittelpunkts der Sonne bedeuten. Ich bemerke noch dass

$$N'' = N' - \theta + \theta'' = N - h - \theta + \theta'', \tau = l'' - \lambda + \alpha'' - \alpha'$$

ist.

89.

Die Differentiation der im vor. Art. aufgestellten Gleichungen giebt nun

$$u'\cos(\psi + N'')d\psi = -\cos N''\,d\gamma + \frac{n}{\varkappa}\sin N''(d\tau - d\mu)$$
$$-\cos\varphi\cos l''\,dl'' + \sin\varphi\sin l''\,d\varphi$$
$$-u'\sin(\psi + N'')d\psi = \sin N''\,d\gamma + \frac{n}{\varkappa}\cos N''(d\tau - d\mu)$$
$$-\cos\varphi\sin\delta''\sin l''\,dl'' - \{\cos\varphi\cos\delta'' + \sin\varphi\sin\delta''\cos l''\}\,d\varphi$$
$$d\gamma = \sin N dQ_0 - \cos N dP_0$$
$$d\mu = -\frac{\varkappa}{n}\cos N dQ_0 - \frac{\varkappa}{n}\sin N dP_0$$
$$dP_0 = \frac{\cos b\,d(l - l')}{\sin(\pi - \pi')}$$
$$dQ_0 = \frac{db}{\sin(\pi - \pi')}$$

aus deren letzten

$$d\gamma = -\frac{\cos N}{\sin(\pi - \pi')}\cos b d(l - l') + \frac{\sin N}{\sin(\pi - \pi')}db$$
$$d\mu = -\frac{\varkappa\sin N}{n\sin(\pi - \pi')}\cos b d(l - l') - \frac{\varkappa\cos N}{n\sin(\pi - \pi')}db$$

folgt.

90.

Wenden wir zuerst diese Ausdrücke auf die Curve der centralen Finsterniss an, dann ist $u' = 0$, und da auch $f = 0$ wird, so wird $l'' = l$, $\delta'' = \delta'$, etc. Wir werden aber aus einem weiter unten anzugebenden Grunde $l''$, $\delta''$, etc. stehen lassen. Die obigen Ausdrücke geben nun, wenn wir $u' = 0$ machen, und die Ausdrücke für $d\gamma$ und $d\mu$ substituiren,

$$0 = \frac{\cos(N - N'')}{\sin(\pi - \pi')}\cos b\,d(l - l') - \frac{\sin(N - N'')}{\sin(\pi - \pi')}db + \frac{n}{\varkappa}\sin N''\,d\tau$$
$$-\cos\varphi\cos l''\,dl'' + \sin\varphi\sin l''\,d\varphi$$
$$0 = \frac{\sin(N - N'')}{\sin(\pi - \pi')}\cos b d(l - l') + \frac{\cos(N - N'')}{\sin(\pi - \pi')}db + \frac{n}{\varkappa}\cos N''\,d\tau$$
$$-\cos\varphi\sin\delta''\sin l''\,dl'' - \{\cos\varphi\cos\delta'' + \sin\varphi\sin\delta''\cos l''\}\,d\varphi$$

wozu noch

$$d\tau = dl'' - d\lambda$$

kommt. Die Natur der Sache bringt es mit sich, dass hier die Zahl der

Unbekannten die der Gleichungen um Eins übersteigt, und dass daher eine der Unbekannten willkührlich ist. Man kann über diese beliebig verfügen. Nehmen wir zuerst zwischen $dt''$ und $d\varphi$ die Relation

$$dt'' = tg\,\varphi\, tg\, t''\, d\varphi$$

an, substituiren und eliminiren, so ergiebt sich

$$\begin{aligned} d\tau &= -B\cos(N - N'')\cos b\, d(l - l') + B\sin(N - N'')\, db \\ d\varphi &= \phantom{-}C\cos N\cos b d(l - l') \qquad + C\sin N db \end{aligned}$$

wo zur Abkürzung

$$\begin{aligned} A &= \sin N''\sin(\pi - \pi') \\ B &= \frac{\varkappa}{n}\frac{\cos t''}{A} \\ C &= \frac{\cos t''}{A\sin H''} \end{aligned}$$

gesetzt worden, und

$$\sin H'' = \sin\varphi\sin\delta'' + \cos\varphi\cos\delta''\cos t''$$

ist, also die Höhe des Punkts der Ränderberührung über dem Horizont bedeutet. Hat man aus diesen Ausdrücken $d\tau$ und $d\varphi$ berechnet, so bekommt man

$$d\lambda = tg\,\varphi\, tg\, t''\, d\varphi - d\tau$$

Wenn $H'' = 0$ ist, so verlieren diese Ausdrücke ihre Bedeutung, aber $H'' = 0$ ist die Bedingung der Endpunkte sowohl der Curve der centralen Finsterniss wie der nördlichen und der südlichen Grenzcurve, und für die Differentiale dieser Punkte werden wir weiter unten andere Ausdrücke geben. Es scheint ferner, dass der Ausdruck für $d\lambda$ unbestimmt wird, wenn $t'' = 90^0$ ist, aber dieses ist nicht der Fall, denn substituirt man die Ausdrücke für $d\varphi$ und $d\tau$ in den Ausdruck für $d\lambda$, so wird

$$d\lambda = \{D\cos N + B\cos(N - N'')\}\cos b d(l - l') + \{D\sin N - B\sin(N - N'')\}\, db$$

wo zur Abkürzung

$$D = \frac{tg\,\varphi\sin t''}{A\sin H''}$$

gesetzt, und die Unbestimmtheit entfernt ist.

91.

Man bekommt andere Ausdrücke, wenn man in den allgemeinen Formeln des vor. Art. $d\tau = 0$ macht. Führt man die durch die folgenden Gleichungen zu bestimmenden Hülfsgrössen ein,

$$e \sin E = \sin\varphi \sin t''$$
$$e \cos E = \cos\varphi \cos\delta'' + \sin\varphi \sin\delta'' \cos t''$$

von welchen $e$ der Sinus des vom Südpunkt des Horizonts bis an den Punkt der Ränderberührung gezogene Bogen grössten Kreises ist, und $E$ der Winkel, den dieser am letztgenannten Punkt mit dem Abweichungskreise macht, ferner

$$e' \sin E' = \cos t''$$
$$e' \cos E' = \sin\delta'' \sin t''$$

wo $e'$ den Cosinus des vom Punkt der Ränderberührung senkrecht auf den Meridian gezogenen Bogens, und $E'$ den Winkel bezeichnet, den dieser mit demselben Abweichungskreise macht, so geben unsere Gleichungen durch die Elimination

$$d\lambda = \quad A\cos(E-N+N'')\cos b d(l-l') + A\sin(E-N+N'')db$$
$$d\varphi = -B\cos(E'+N-N'')\cos b d(l-l') + B\sin(E'+N-N'')db$$

wo zur Abkürzung

$$A = \frac{e}{\cos\varphi \sin H'' \sin(\pi-\pi')}$$
$$B = \frac{e'}{\sin H'' \sin(\pi-\pi')}$$

gesetzt worden ist. Es ist zu bemerken dass

$$\sin H'' = e e' \sin(E+E')$$

wird.

## 92.

Noch andere Ausdrücke bekommt man, wenn man in den allgemeinen Formeln des vorvor. Art. $d\lambda = 0$ macht. Setzt man

$$n_1 \sin N_1 = \frac{n}{x} \sin N'' - \cos\varphi \cos t''$$
$$n_1 \cos N_1 = \frac{n}{x} \cos N'' - \cos\varphi \sin\delta'' \sin t''$$

wo $x n_1$ die scheinbare relative Bewegung des Mondes und der Sonne auf der Projectionsebene, und $N_1$ den Winkel bedeutet, den diese mit dem Abweichungskreise macht, so geben die angeführten Ausdrücke

$$d\varphi = -C\cos(N_1+h+\theta-\theta'')\cos b d(l-l') + C\sin(N_1+h+\theta-\theta'')db$$
$$d\tau = \quad D\cos(E-h-\theta+\theta'')\cos b d(l-l') + D\sin(E-h-\theta+\theta'')db$$

wo

$$C = \frac{1}{e\sin(N_1+E)\sin(\pi-\pi')}$$
$$D = -\frac{1}{n_1\sin(N_1+E)\sin(\pi-\pi')}$$

ist. Statt dieses auf dem Meridian, durch welchen der betrachtete Curvenpunkt geht, aufzutragenden Werthes von $d\varphi$ kann man auch die senkrecht auf der Curve gemessene Aenderung (die kleinste Aenderung) kennen zu lernen verlangen, und zu dem Ende bemerke ich dass diese $= \sin i \Delta\varphi$ ist, wenn $i$ den Winkel bezeichnet, den die Curve im betrachteten Punkt mit dem Meridian macht. Nimmt man aber $d\varphi$ und $d\lambda$ unabhängig von den Aenderungen $d(l-l')$ und $db$, so weiss man aus der Theorie der Curven dass $tg\, i = \frac{d\lambda}{d\varphi} \cos\varphi$ ist, und in unserem Falle geben die Gleichungen des Art. 90, nachdem man darin $d(l-l') = 0$, $db = 0$ gemacht, und $d\tau$ eliminirt hat,

$$\frac{d\lambda}{d\varphi} = \frac{e \sin(N_1 + E)}{\frac{n}{\varkappa}\sin(N'' - N_1)}$$

Es wird daher:

Die senkrechte (normale) Entfernung der durch $d(l-l')$ und $db$ bewirkten Curve von der ursprünglichen

$$= -C \sin i \cos(N_1 + h + \theta - \theta'') \cos b\, d(l-l') + C \sin i \sin(N_1 + h + \theta - \theta'')\, db$$

wo $C$ derselbe Ausdruck wie oben, und

$$tg\, i = \frac{e \sin(N_1 + E)}{\frac{n}{\varkappa}\sin(N'' - N_1)} \cos\varphi$$

ist. Es kann noch angemerkt werden dass

$$n_1 \sin(N_1 - N'') = \qquad e' \cos\varphi \sin(N'' - E')$$
$$n_1 \cos(N_1 - N'') = \frac{n}{\varkappa} - e' \cos\varphi \cos(N'' - E')$$

wird, wo $e'$ und $E'$ dieselben oben so benannten Hülfsgrössen sind. Insgleichen wird

$$n_1 \sin(N_1 - N'') = \quad -\cos\varphi \sin g \cos(G + t'')$$
$$n_1 \cos(N_1 - N'') = \frac{n}{\varkappa} - \cos\varphi \sin k \sin(K + t'')$$

wenn man

$$\sin g \sin G = \sin\delta'' \sin N'' \; ; \; \sin k \sin K = \qquad \sin N''$$
$$\sin g \cos G = \qquad \cos N'' \; ; \; \sin k \cos K = \sin\delta'' \cos N''$$

setzt. Man kann unter den obigen vier Systemen von Ausdrücken dasjenige wählen, welches man für den vorliegenden Fall am Passendsten hält.

Die Differentiale müssen alle in derselben Einheit ausgedrückt werden, drückt man daher z. B. $d(l-l')$ und $db$ in Bogenminuten aus,

so erhält man ebenfalls $d\tau$, $d\lambda$ und $d\varphi$ in Bogenminuten, u. s. w. Es ist ferner zu bemerken, dass man in allen diesen Ausdrücken die Abplattung der Erde bis auf sehr weniges dadurch berücksichtigen kann, dass man allenthalben $\cos\varphi_1$ für $\cos\varphi$, und $(1-c)\sin\varphi_1$ für $\sin\varphi$ schreibt. Diese beiden Bemerkungen beziehen sich auch auf die nachfolgenden Differentialformeln.

## 93.

Suchen wir nun die Aenderungen der Endpunkte der Curve der centralen Finsterniss, so ist den allgemeinen Gleichungen des Art. 90 die Bedingung $H''=0$, das ist

$$0=\sin\varphi\sin\delta''+\cos\varphi\cos\delta''\cos t''$$

oder vielmehr dessen Differential

$$0=\{\cos\varphi\sin\delta''-\sin\varphi\cos\delta''\cos t''\}\,d\varphi-\cos\varphi\cos\delta''\sin t''\,dt''$$

hinzuzufügen, und da nunmehr keine der Unbekannten unbestimmt wird, so kann man durch die Elimination nur Ein System von Gleichungen ableiten. Um die Elimination zu vereinfachen wollen wir den im Vorhergehenden schon angewandten Bogen $W$ durch die Gleichungen

$$\begin{aligned}\cos\varphi\sin t'' &= \sin(N''-W)\\ \cos\varphi\cos t'' &= -\sin\delta''\cos(N''-W)\\ \sin\varphi &= \cos\delta''\cos(N''-W)\end{aligned}$$

in unsere drei Gleichungen einführen. Da die vorstehenden Gleichungen

$$\cos\varphi=\sin t''\sin(N''-W)-\cos t''\sin\delta''\cos(N''-W)$$

geben, so ist es leicht den drei angeführten Gleichungen die folgende Form zu geben,

$$(54)\quad\begin{cases}0=\frac{\cos(N-N'')}{\sin(\pi-\pi')}\cos b\,d(l-l')-\frac{\sin(N-N'')}{\sin(\pi-\pi')}\,db+\frac{n}{x}\sin N''\,d\tau\\ \qquad+\sin\delta''\cos(N''-W)\,dt''+\sin t''\cos\delta''\cos(N''-W)\,d\varphi\\ 0=\frac{\sin(N-N'')}{\sin(\pi-\pi')}\cos b\,d(l-l')+\frac{\cos(N-N'')}{\sin(\pi-\pi')}\,db+\frac{n}{x}\cos N''\,d\tau\\ \qquad-\sin\delta''\sin(N''-W)\,dt''-\sin t''\cos\delta''\sin(N''-W)\,d\varphi\\ 0=\cos\varphi\cos\delta''\sin(N''-W)\,dt''-\sin\delta''\,d\varphi\end{cases}$$

Aus den beiden ersten dieser Gleichungen bekommt man durch eine leichte Elimination

$$0=\frac{\sin(N-W)}{\sin(\pi-\pi')}\cos b\,d(l-l')+\frac{\cos(N-W)}{\sin(\pi-\pi')}db+\frac{n}{x}\cos W\,d\tau$$

$$0=\frac{\cos N}{\sin(\pi-\pi')}\cos b\,d(l-l')-\frac{\sin N}{\sin(\pi-\pi')}db+\sin\delta''\cos W\,dt''+\sin t''\cos\delta''\cos W\,d\varphi$$

und aus der letzten dieser und der dritten der vorstehenden ergiebt sich

$$0=\frac{\sin\delta''\cos N}{\sin(\pi-\pi')}\cos b\,d(l-l')-\frac{\sin\delta''\sin N}{\sin(\pi-\pi')}db+\cos W\cos^2\varphi\,dt''$$

$$0=\frac{\cos\delta''\sin(N''-W)\cos N}{\sin(\pi-\pi')}\cos b\,d(l-l')-\frac{\cos\delta''\sin(N''-W)\sin N}{\sin(\pi-\pi')}db+\cos W\cos\varphi\,d\varphi$$

Es wird daher schliesslich

$$d\tau=-A'\sin(N-W)\cos b\,d(l-l')-A'\cos(N-W)\,db$$

$$d\varphi=-B'\cos N\cos b\,d(l-l')+B'\sin N\,db$$

$$d\lambda=\{A'\sin(N-W)-C'\cos N\}\cos b\,d(l-l')+\{A'\cos(N-W)+C'\sin N\}db$$

wo zur Abkürzung, wenn

$$D=\cos W\sin(\pi-\pi')$$

angenommen wird,

$$A'=\frac{x}{n}\frac{1}{D}$$

$$B'=\frac{\cos\delta''\sin(N''-W)}{D\cos\varphi}$$

$$C'=\frac{\sin\delta''}{D\cos^2\varphi}$$

gesetzt worden ist.

94.

Um die Differentialformeln für die nördliche und die südliche Grenzcurve zu erhalten dienen dieselben Gleichungen, die wir bisher benutzt haben, mit der Ausnahme, dass die linke Seite der beiden ersten Gleichungen des Art. 90 nicht mehr Null, sondern bez. $u'\cos(\psi+N'')\,d\psi$ und $-u'\sin(\psi+N'')\,d\psi$ wird. Das Differential $d\psi$ muss nun durch das Differential der Bedingungsgleichung für die grösste Phase eliminirt werden. Allein die Veränderung von $\psi$ ist auf der ganzen Ausdehnung dieser Curven nicht sehr gross, und daher eine kleine zu übergehende Grösse, wenn es sich um kleine Veränderungen in den Elementen handelt, wie hier der Fall ist. Man kann daher die Differentialgleichungen für die Curve der centralen Finsterniss ohne Weiteres, als dass man die bezüglichen Werthe von $\varphi$, $t''$, $\delta''$, etc. darin substituirt, auf die nördliche und die südliche Grenzcurve auch anwenden, und aus diesem Grunde habe ich oben diese Zeichen stehen lassen. Man kann übrigens auch im jetzigen Falle ohne der Genauigkeit wesentlichen Abbruch zu thun die bez. Werthe von $t$, $\delta'$, etc. statt jener anwenden.

### 95.

Da auf der ganzen Ausdehnung der westlichen und der östlichen Grenzcurve $H'' = 0$ ist, so dienen die Gleichungen (54), nachdem auf der linken Seite derselben bez. $u' \cos(\psi + N'')\, d\psi$ und $-u' \sin(\psi + N'')\, d\psi$ gesetzt worden ist, um die Differentialgleichungen für diese beiden Curven zu erhalten. Die beiden ersten (54) werden daher

$$u' \cos(\psi + N'')\, d\psi = \frac{\cos(N - N'')}{\sin(\pi - \pi')} \cos b\, d(l - l') - \frac{\sin(N - N'')}{\sin(\pi - \pi')}\, db + \frac{n}{x} \sin N''\, d\tau$$
$$+ \sin \delta'' \cos(N'' - W)\, dt'' + \sin t'' \cos \delta'' \cos(N'' - W)\, d\varphi$$
$$-u' \sin(\psi + N'')\, d\psi = \frac{\sin(N - N'')}{\sin(\pi - \pi')} \cos b\, d(l - l') + \frac{\cos(N - N'')}{\sin(\pi - \pi')}\, db + \frac{n}{x} \cos N''\, d\tau$$
$$- \sin \delta'' \sin(N'' - W)\, dt'' - \sin t'' \cos \delta'' \sin(N'' - W)\, d\varphi$$

und hieraus ergiebt sich durch die Elimination von $d\psi$

$$0 = \frac{\sin(\psi + N)}{\sin(\pi - \pi')} \cos b\, d(l - l') + \frac{\cos(\psi + N)}{\sin(\pi - \pi')}\, db + \frac{n}{x} \cos \psi\, d\tau$$
$$+ \sin \delta'' \sin(\psi + W)\, dt'' + \sin t'' \cos \delta'' \sin(\psi + W)\, d\varphi$$

wozu noch die dritte (54) kommt, die wie folgt, gestellt werden kann

$$0 = \cos^2\varphi \sin t'' \cos \delta''\, dt'' - \sin \delta''\, d\varphi$$

Da es sich wieder hier um eine Curve handelt, so ist wieder eine der Unbekannten willkührlich. Setzen wir zuerst $d\varphi = 0$, so wird in Folge der vorstehenden Gleichung auch $dt'' = 0$, und deshalb $d\tau = -d\lambda$. Wir bekommen daher sogleich

$$d\lambda = A'' \sin(\psi + N) \cos b\, d(l - l') + A'' \cos(\psi + N)\, db$$

wo

$$A'' = \frac{x}{n} \frac{1}{\cos \psi \sin(\pi - \pi')}$$

ist. Da in der Nähe der Berührungspunkte der westlichen und der östlichen Grenzcurve mit der nördlichen und der südlichen $\cos \psi = 0$ wird, so kann der vorstehende Ausdruck in den betreffenden Curvenpunkten nicht angewandt werden. Setzen wir hingegen $d\tau = 0$, wodurch $d\lambda = dt''$ wird, so giebt die Elimination zwischen den obigen Gleichungen

$$d\lambda = B'' \sin(\psi + N) \cos b\, d(l - l') + B'' \cos(\psi + N)\, db$$
$$d\varphi = C'' \sin(\psi + N) \cos b\, d(l - l') + C'' \cos(\psi + N)\, db$$

wo

$$B'' = -\frac{\sin \delta''}{\cos^2\varphi \sin(\psi + W) \sin(\pi - \pi')}$$
$$C'' = -\frac{\cos \delta'' \sin(N'' - W)}{\cos \varphi \sin(\psi + W) \sin(\pi - \pi')}$$

ist. Diese Formeln können in den eben genannten Punkten sicher angewandt werden, verlieren aber in den Berührungspunkten des Schattenkegels mit der Erde ihre Bedeutung.

## §. 8. Ermittelung der Hauptumstände einer Finsterniss für einen gegebenen Ort. Differentialformeln.

96.

Die Hauptumstände einer Sonnenfinsterniss, die sich auf einen gegebenen Ort beziehen, sind die Zeiten des Anfangs und Endes, so wie die der grössten Phase und die Grösse dieser, wozu noch die Angabe der Punkte des Sonnenrandes gehört, an welchen die Ein- und Austritte statt finden. Die Abplattung der Erde werde ich in der Lösung dieser Aufgabe um so weniger übergehen, da man hier, wo die Polhöhe des Orts zu den gegebenen Grössen gehört, daraus im Voraus die geocentrische Breite und den betreffenden Halbmesser der Erde direct berechnen kann. Da übrigens die Anwendung dieser Aufgaben hauptsächlich dazu dient, um die Beobachter im Voraus mit den Beobachtungsmomenten bekannt zu machen, so ist die grösste Schärfe nicht nothwendig, und ich werde daher die Strahlenbrechung übergehen.

97.

Die Gleichungen, von welchen ich hier ausgehen werde, sind die (16), die ich in Folge des eben Angeführten wie folgt stelle,

$$u = u' - \{\eta \sin \delta' + \xi \cos \delta' \cos t\}\, tg f$$

$$u \sin \theta = -\gamma \cos N' + (t - \lambda - \mu)\frac{n}{15} \sin N' - \xi \sin t$$

$$u \cos \theta = \gamma \sin N' + (t - \lambda - \mu)\frac{n}{15} \cos N' - \eta \cos \delta' + \xi \sin \delta' \cos t$$

wo

$$\xi = \rho \cos \varphi' \;,\; \eta = \rho \sin \varphi'$$

gesetzt ist, und wofür man auch

$$\xi = \cos \varphi_1 \;,\; \eta = (1 - c) \sin \varphi_1$$

setzen kann, wo zufolge des Art. 25

$$tg\, \varphi_1 = (1 - c)\, tg\, \varphi$$

ist. Wenn man Logarithmen von höchstens fünf Decimalen anwendet, so kann man durch die Tafel des Art. 25, indem man die Grössen, welche sie giebt, mit entgegen gesetzten Zeichen anwendet, $\varphi_1$ durch $\varphi$ erhalten, und somit $\xi$ und $\eta$ mit grösster Leichtigkeit berechnen. In den hier zu lösenden Aufgaben darf man auch ohne merklichen Fehler befürchten zu müssen unter $\delta'$ die geocentrische Abweichung des Mittelpunkts der Sonne verstehen.

## 98.

Man vereinfacht die im vor. Art. aufgestellten Gleichungen etwas, wenn man die schon im Vorhergehenden angewandten Hülfsmittel $g$, $G$, $k$, $K$ durch folgende Ausdrücke einführt,

$$\begin{array}{ll} \sin g \sin G = \sin\delta' \sin N', & \sin k \sin K = \sin N' \\ \sin g \cos G = \cos N', & \sin k \cos K = \sin\delta' \cos N' \\ \cos g = \cos\delta' \sin N', & \cos k = \cos\delta' \cos N' \end{array}$$

sie gehen dadurch in die folgenden über,

$$\begin{aligned} u &= u' - \{\eta \sin\delta' + \xi \cos\delta' \cos t\}\, tg f \\ u \sin\psi &= -\gamma + \eta \cos g - \xi \sin g \sin(G + t) \\ u \cos\psi &= (t - \lambda - \mu)\frac{n}{15} - \eta \cos k + \xi \sin k \cos(K + t) \end{aligned}$$

wo wie früher $\psi = \theta - N'$ ist. Da diese Gleichungen in Bezug auf die Unbekannte $t$ transcendent sind, so mache ich wieder von der Substitution Gebrauch, die ich in meiner oben angeführten Abhandlung eingeführt habe. Sei $\tau$ irgend eine unbestimmte, in Graden ausgedrückte, Zeit, so ist identisch

$$\begin{aligned} \sin t &= \sin\tau + \varkappa' \cos\tfrac{1}{2}(t + \tau) \cdot \frac{t - \tau}{15} \\ \cos t &= \cos\tau - \varkappa' \sin\tfrac{1}{2}(t + \tau) \cdot \frac{t - \tau}{15} \end{aligned}$$

wenn

$$\varkappa' = 30\, \frac{\sin\frac{1}{2}(t - \tau)}{t - \tau}$$

gesetzt wird. Die folgende Tafel giebt die Werthe von $\log\varkappa'$ für $t - \tau = 0$ bis $t - \tau = \pm 48^0$, und man erkennt leicht, dass für $t = \tau$ die Grösse $\varkappa'$ in die im Vorhergehenden oft vorgekommene Grösse $\varkappa$ übergeht.

| $\pm(t-\tau)$ | $\log \varkappa'$ | Diff. | $\pm(t-\tau)$ | $\log \varkappa'$ | Diff. | $\pm(t-\tau)$ | $\log \varkappa'$ | Diff. | $\pm(t-\tau)$ | $\log \varkappa'$ | Diff. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0° | 9.41797 | 1 | 12° | 9.41717 | 13 | 24° | 9.41479 | 27 | 36° | 9.41080 | 40 |
| 1 | 796 | 1 | 13 | 704 | 15 | 25 | 452 | 28 | 37 | 9.41040 | 42 |
| 2 | 795 | 3 | 14 | 689 | 16 | 26 | 424 | 29 | 38 | 9.40998 | 42 |
| 3 | 792 | 4 | 15 | 673 | 17 | 27 | 395 | 31 | 39 | 956 | 44 |
| 4 | 788 | 5 | 16 | 656 | 19 | 28 | 364 | 32 | 40 | 912 | 45 |
| 5 | 783 | 6 | 17 | 637 | 19 | 29 | 332 | 32 | 41 | 867 | 47 |
| 6 | 777 | 7 | 18 | 618 | 20 | 30 | 300 | 34 | 42 | 820 | 47 |
| 7 | 770 | 9 | 19 | 598 | 22 | 31 | 266 | 35 | 43 | 773 | 48 |
| 8 | 761 | 9 | 20 | 576 | 23 | 32 | 231 | 36 | 44 | 725 | 50 |
| 9 | 752 | 10 | 21 | 553 | 23 | 33 | 195 | 37 | 45 | 675 | 51 |
| 10 | 742 | 12 | 22 | 530 | 25 | 34 | 158 | 39 | 46 | 624 | 52 |
| 11 | 730 | 13 | 23 | 505 | 26 | 35 | 119 | 39 | 47 | 572 | 53 |
| 12 | 9.41717 | | 24 | 9.41479 | | 36 | 9.41080 | | 48 | 9.40519 | |

Eliminirt man nun in den obigen Grundformeln $t$ unter dem Sinus- und Cosinuszeichen durch diese Ausdrücke, und setzt,

$$u_1 = u' - \{\eta \sin\delta' + \xi \cos\delta' \cos\tau\}\, tg f$$

so bekommt man

$$u = u_1 + \varkappa' \xi\, tg f \cos\delta' \sin\tfrac{1}{2}(t+\tau) \,.\, \tfrac{t-\tau}{15}$$

$$u \sin\psi = -\gamma + \eta \cos g - \xi \sin g \sin(G+\tau) - \varkappa' \xi \sin g \cos\left(G + \tfrac{1}{2}(t+\tau)\right) . \tfrac{t-\tau}{15}$$

$$u \cos\psi = (t-\lambda-\mu)\tfrac{n}{15} - \eta \cos k + \xi \sin k \cos(K+\tau) - \varkappa' \xi \sin k \sin\left(K + \tfrac{1}{2}(t+\tau)\right) . \tfrac{t-\tau}{15}$$

Setzt man ferner

$$m \sin M = \gamma - \eta \cos g + \xi \sin g \sin(G+\tau)$$

$$m \cos M = (\tau-\lambda-\mu)\tfrac{n}{15} - \eta \cos k + \xi \sin k \cos(K+\tau)$$

$$m' \sin M' = \quad -\varkappa' \xi \sin g \cos\left(G + \tfrac{1}{2}(t+\tau)\right)$$

$$m' \cos M' = n - \varkappa' \xi \sin k \sin\left(K + \tfrac{1}{2}(t+\tau)\right)$$

woraus

$$u \sin\psi = -m \sin M + m' \sin M' . \tfrac{t-\tau}{15}$$

$$u \cos\psi = \quad m \cos M + m' \cos M' . \tfrac{t-\tau}{15}$$

hervorgeht, so ergiebt sich, wenn man $M' - \psi = \chi'$ setzt,

$$\sin\chi' = \tfrac{m}{u} \sin(M + M')$$

$$t = \tau - 15\tfrac{m}{m'}\cos(M+M') + 15\tfrac{u}{m'}\cos\chi'$$

aus welchen die Ein- und Austrittszeiten $t$ hervorgehen.

99.

Die im vor. Art. entwickelten Gleichungen können auf zwei verschiedene Arten angewandt werden. Auf jeden Fall muss man zuerst für $\tau$ einen beliebigen innerhalb der Zeit der Finsterniss überhaupt fallenden Werth substituiren, und hiemit geben diese Gleichungen zwei Werthe von $t$, die als genäherte Werthe der Ein- und Austrittszeiten betrachtet werden können. In der zweiten und den folgenden Annäherungen kann man immer für $\tau$ jeden der beiden Werthe von $t$ substituiren, die die zunächst vorhergehende Annäherung gegeben hat, und hiemit fortfahren bis die Rechnung die substituirten Werthe wiedergiebt, oder mit anderen Worten bis dass man $t=\tau$ bekommt, welche Werthe dann die genauen Ein- und Austrittszeiten sind. In dieser Rechnung muss unter den Sinus- und Cosinuszeichen immer $\tau$ statt $\frac{1}{2}(t+\tau)$, und $\varkappa$ statt $\varkappa'$ angewandt werden. Man kann aber auch in der zweiten und den folgenden Annäherungen den anfänglich substituirten Werth von $\tau$ beibehalten, und durch die in jeder zunächst vorhergehenden Annäherung erhaltenen Werthe von $t$ die anzuwendenden Werthe von $\frac{1}{2}(t+\tau)$ und $\varkappa'$ berechnen. Da dieses Verfahren das Einfachere ist, so will ich jenes nicht weiter ausführen.

Um die Ausdrücke möglichst zu vereinfachen sei

$$(55) \quad \ldots\ldots\ldots \quad \tau = \lambda + \mu$$

wodurch

$$(56) \quad \ldots \quad \begin{cases} m\sin M = \gamma - \eta\cos g + \xi\sin g\sin(G+\tau) \\ m\cos M = \quad -\eta\cos k + \xi\sin k\cos(K+\tau) \end{cases}$$

wird, und diese Grössen im Verlaufe der Rechnung unverändert beibehalten werden. In der ersten Annäherung rechne man nun

$$(57) \quad \ldots \quad \begin{cases} m'\sin M' = \quad -\varkappa\xi\sin g\cos(G+\tau) \\ m'\cos M' = n - \varkappa\xi\sin k\sin(K+\tau) \\ u_1 = u' - \{\eta\sin\delta' + \xi\cos\delta'\cos\tau\}\,\mathrm{tg}f \end{cases}$$

und hierauf

$$(58) \quad \ldots \quad \begin{cases} \sin\chi' = \frac{m}{u}\sin(M+M') \\ t = \tau - 15\frac{m}{m'}\cos(M+M') + 15\frac{u}{m'}\cos\chi' \end{cases}$$

indem man $u=u_1$ annimmt. Da dem Sinus von $\chi'$ ein negativer und ein positiver Werth von $\cos\chi'$ zukommt, so giebt die letzte Gleichung zwei Werthe von $t$, von welchen der eine ein genäherter Werth der Eintritts-,

und der andere ein genäherter Werth der Austrittszeit ist. Es kann sich ereignen, dass man in der ersten Annäherung einen imaginären Werth von $\chi'$ erhält, obgleich die Finsterniss für den der Rechnung untergelegten Ort reel ist. In diesem Falle muss man in der zweiten Gleichung (58) $\cos\chi' = 0$ setzen, und mit dem dadurch hervorgehenden Werthe von $t$ die zweite Annäherung ausführen. In der zweiten Annäherung*) substituirt man jeden der beiden eben gefundenen Werthe von $t$, und in dem eben bemerkten Falle den einzigen Werth, in die Ausdrücke

$$\left.\begin{aligned} m'\sin M' &= \quad -\varkappa'\xi\sin g\cos(G' + \tfrac{1}{2}t) \\ m'\cos M' &= n - \varkappa'\xi\sin k\sin(K' + \tfrac{1}{2}t) \\ u &= u_1 + \varkappa'\xi\cos\delta' tg f \sin\tfrac{1}{2}(t+\tau)\,.\tfrac{t-\tau}{15} \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \quad (59)$$

wo

$$G' = G + \tfrac{1}{2}\tau\ ,\ K' = K + \tfrac{1}{2}\tau$$

ist, und rechnet mit den daraus folgenden Werthen von $M'$, $m'$ und $u$ durch die Ausdrücke (58) zwei neue Werthe von $t$. Diese sind schon weit genauer wie die vorigen, und gemeiniglich hinreichend genau; sollte letzteres nicht der Fall sein, so muss man mit denselben die Rechnung nach (59) und (58) wiederholen. Wenn fortwährend $\chi'$ imaginär bleibt, so findet die Finsterniss an dem der Rechnung untergelegten Orte nicht statt.

## 100.

Die beiden Werthe von $\chi'$, die man zugleich erhält, geben durch die Gleichung

$$\theta = N' + M' - \chi'$$

zwei Werthe von $\theta$, durch welche die beiden Punkte des Sonnenrandes bestimmt werden, an welchen der Ein- und der Austritt statt finden.

Aus den Artt. 5 und 7 erhellet, dass $\theta = 0$ ist, wenn die Erscheinung am Nordpunkte des Sonnenrandes vor sich geht, und dass von da an $\theta$ nach Osten wächst. Für den Anfang und das Ende der Ringför-

---

*) Nach der ersten Annäherung kann man auch mit den beiden erhaltenen Werthen von $t$ die Hülfsgrössen durch Interpolation aus den verschiedenen, für verschiedene Zeiten berechneten Werthen derselben verbessern, wenn man die Genauigkeit so weit treiben will. In diesem Falle muss man auch beim Beginn der zweiten Annäherung durch (55) und (56) für Anfang und Ende der Finsterniss verbesserte Werthe von $M$ und $m$ rechnen. Diese können jedenfalls unverändert für alle folgenden Annäherungen dienen. Diese Verbesserung ist jedoch in der Regel überflüssig.

migkeit ist der Anfangspunkt von $\theta$ im Südpunkt des Sonnenrandes, das Wachsen dieses Bogens in derselben Richtung wie vorher; also jetzt nach Westen.

Will man $\theta$ von dem durch die Sonne gehenden Verticalkreise an zählen, so braucht man nur den Winkel an der Sonne zwischen dem Abweichungs- und dem Verticalkreise zu berechnen, und dem Werthe von $\theta$ hinzu zu fügen. Dieser Winkel ist der im Art. 38 eingeführte und mit $K$ bezeichnete, man erhält aus den Gleichungen (25)

$$tg\,K = \frac{\sin t}{\cos\delta'\,tg\,\varphi - \sin\delta'\cos t}$$

und muss $K$ immer in demselben Halbkreise wie $t$ annehmen. Nennt man nun $\theta_0$ den vom Verticalkreise an, sonst aber eben so wie $\theta$ gezählten Positionswinkel des Ein- und Austritts, so wird

$$\theta_0 = \theta - K = N' + M' - \chi' - K$$

## 101.

Die Bedingungsgleichung (18) des Art. 30 für die grösste Phase wollen wir jetzt in die folgende abkürzen,

$$0 = \{n\sin N' - \varkappa\xi\cos t\}\sin\theta$$
$$+ \{n\cos N' - \varkappa\xi\sin\delta'\sin t\}\cos\theta$$

da sie in dieser Form für unsern jetzigen Zweck hinreichend genau ist. Vergleichen wir diese Gleichung mit den vorhergehenden, so können wir sie auch wie folgt stellen,

$$0 = \cos(\theta - N' - M') = \cos\chi'$$

vorausgesetzt, dass wir $t$ statt $\frac{1}{2}(t+\tau)$ oder bez. $\tau$ in die Ausdrücke für $m'\sin M'$ und $m'\cos M'$ setzen. Diese Gleichung giebt

$$\chi' = 90^0 \text{ oder } \chi' = 270^0$$

und wir können nun dieselben Formeln, die gedient haben um die Ein- und Austritte zu berechnen, anwenden um die Zeit der grössten Phase zu finden. Hiebei ist zu bemerken, dass von den zwei für jene Berechnung im Art. 99 angegebenen Verfahrungsarten jetzt nur das Erstere angewandt werden darf, nach welchem in jeder Annäherung für $\tau$ der (hier einzige) Werth von $t$ substituirt werden muss, den die nächst vorhergehende Annäherung gegeben hat. Die Ausdrücke für die Berechnung der Zeit der grössten Phase sind daher die folgenden.

$$m \sin M = \gamma - \eta \cos g + \xi \sin g \sin (G + \tau)$$
$$m \cos M = (\tau - \lambda - \mu)\frac{n}{15} - \eta \cos k + \xi \sin k \cos (K + \tau)$$
$$m' \sin M' = \quad - \varkappa \xi \sin g \cos (G + \tau)$$
$$m' \cos M' = n - \varkappa \xi \sin k \sin (K + \tau)$$
$$t = \tau - 15 \frac{m}{m'} \cos (M + M')$$

in welchen man anfänglich $\tau$ beliebig annehmen, und dann für $\tau$ den in der nächst vorhergehenden Annäherung erhaltenen Werth von $t$ substituiren muss. Wenn man vorher die Ein- und Austrittszeiten berechnet hat, so ist das arithmetische Mittel aus diesen ein Werth von $\tau$, welcher, nachdem er der Rechnung zu Grunde gelegt worden ist, gemeiniglich sogleich einen hinreichend genauen Werth von $t$ giebt. Hat man jene Zeiten nicht berechnet, so kann man wieder anfänglich $\tau$ durch (55) bestimmen. Da man hier in der letzten Annäherung

$$M + M' = 90^0 \text{ oder } M + M' = 270^0$$

bekommen muss, so kann man diese Gleichung auch als die Gleichung der grössten Phase bezeichnen.

102.

Um die Grösse der grössten Phase zu finden bemerke ich, dass die erste Gleichung (58)

$$u = \frac{m \sin (M + M')}{\sin \chi'}$$

giebt. Da aber hier $\sin \chi' = \pm 1$, und in der letzten Annäherung auch $\sin (M + M') = \pm 1$ wird, so ergiebt sich

$$u = m$$

wenn wir unter $m$ den Werth dieser Grösse verstehen, den die letzte Annäherung gegeben hat. Ich setze überdies voraus, dass man $M$ und $M'$ stets so bestimme, dass $m$ und $m'$ positiv werden, und demzufolge müssen hier $\sin (M + M')$ und $\sin \chi'$ stets dasselbe Zeichen haben. Es folgt hieraus, dass der nördliche Theil der Sonne verfinstert wird, wenn

$$M + M' = 90^0$$

und der südliche, wenn

$$M + M' = 270^0$$

wird. Um $u'$ zu bekommen haben wir aus dem Art. 48

$$\sin f = (u' - s)\sin\pi$$

in welchem Ausdruck man hier unbedenklich $u$ statt $u'$ setzen darf, und daher

$$u' = u + z(u - s)\,G\sin(\pi - \pi')$$

wird, wenn man

$$z = \varrho\sin\varphi'\sin\delta' + \varrho\cos\varphi'\cos\delta'\cos t$$

setzt, und $G$ in der Bedeutung des Art. 20 annimmt. Hieraus ergiebt sich wie früher die Grösse der grössten Phase

$$i = 12\,\frac{u'_1 - u'}{u'_1 - u'_2}$$

Will man den kleinen Unterschied zwischen $u$ und $u'$ hier übergehen, so kann man in diesem Ausdruck auch $u$ statt $u'$ setzen *).

## 103.

Um den Einfluss einer Veränderung der Mond- und Sonnenörter auf die Ein- und Austrittszeiten zu erhalten giebt die Differentiation der Gleichungen des Art. 98, wenn wir darin $\tau = t$ setzen, und die kleine Veränderung von $u$ übergehen,

$$u\cos\psi\,d\psi = -d\gamma + \frac{m'}{x}\sin M'\,dt$$

$$-u\sin\psi\,d\psi = -\frac{n}{x}d\mu + \frac{m'}{x}\cos M'\,dt$$

---

*) Ich bemerke hiezu noch, dass man in dem Ausdruck für die Grösse der Phase, den ich im Vorhergehenden immer von $u'$, $u'_1$ und $u'_2$ abhängig gemacht habe, ohne Weiteres auch $u$, $u_1$ und $u_2$ setzen darf, vorausgesetzt dass diese drei Grössen sich auf einen und denselben Zeitpunkt beziehen. Setzt man wieder

$$z = \varrho\sin\varphi'\sin\delta' + \varrho\cos\varphi'\cos\delta'\cos t$$

so ist

$$u'_1 = u_1 + z\sin f_1$$
$$u'_2 = u_2 + z\sin f_2$$
$$u' = u + z\sin f$$

und zufolge des Art. 5

$$\sin f = \sin f_1 - \frac{\sin f_1 - \sin f_2}{12}\,i$$

Substituirt man diese Ausdrücke in den obigen Ausdruck für die Grösse der Phase, so bekommt man zuerst

$$i = \frac{12\,(u_1 - u) + z(\sin f_1 - \sin f_2)\,i}{u_1 - u_2 + z(\sin f_1 - \sin f_2)}$$

und hieraus

$$i = 12\,\frac{u_1 - u}{u_1 - u_2}$$

w. z. b. w.

wo $m'$ und $M'$ mit $t$ und $\varkappa$ statt $\frac{1}{2}(t+\tau)$ und $\varkappa'$ berechnet werden müssen. Durch die Elimination von $d\psi$ folgt hieraus

$$0 = -\sin\psi\, d\gamma - \frac{n}{\varkappa}\cos\psi\, d\mu + \frac{m'}{\varkappa}\cos\chi'\, dt$$

und nach der Substitution der Ausdrücke des Art. 89 für $d\gamma$ und $d\mu$

$$dt = \frac{\varkappa \sin(\chi' - M' - N)}{m' \cos\chi' \sin(\pi - \pi')} \cos b\, d(l - l') - \frac{\varkappa \cos(\chi' - M' - N)}{m' \cos\chi' \sin(\pi - \pi')}\, db$$

Es geht aus diesem Ausdruck hervor, dass wenn $\cos\chi'$, und folglich auch die Finsterniss an dem in Rechnung gezogenen Orte klein ist, eine kleine Aenderung in den Mond- und Sonnenörtern eine grosse Aenderung in den Ein- und Austrittszeiten hervorbringen kann, welches auch an sich einleuchtend ist.

### 104.

Es kann zuweilen, namentlich bei alten Finsternissen, die an einem gegebenen Orte weder total noch ringförmig waren, nützlich werden die grösste Breite der Sonnensichel während der grössten Phase kennen zu lernen, ich werde daher hier Ausdrücke entwickeln um überhaupt diese Breite zu berechnen.

Legen wir durch den Beobachtungsort und die Mittelpunkte des Mondes und der Sonne eine Ebene und ziehen eine grade Linie vom Beobachtungsorte nach dem Mittelpunkte des Mondes, dann ist zufolge des §. 1 diese Linie die Hypotenuse eines rechtwinklichen Dreiecks, dessen Catheten $u$ und $Z'$ sind. Bezeichnen wir daher in diesem Dreieck den Winkel am Monde mit $a$, so wird

$$tg\, a = \frac{u}{Z'}$$

Construiren wir auch das analoge Dreieck für die Sonne und nennen den bez. Winkel desselben $a'$, so wird auf dieselbe Weise

$$tg\, a' = \frac{u}{Z' + \varrho'}$$

Nennen wir aber die vom Beobachtungsorte aus gesehene Entfernung der Mittelpunkte der Sonne und des Mondes $b$, so ist $b = a - a'$, und es wird daher strenge

$$tg\, b = \frac{\varrho' u}{Z'(Z' + \varrho') + u^2}$$

oder wenn wir wie früher $Z' = Z - z$ setzen,

$$tg\, b = \frac{\varrho' u}{Z(Z + \varrho') - (2Z + \varrho')z + z^2 + u^2}$$

Zufolge des §. 4 ist mit einer für den jetzigen Zweck hinreichenden Genauigkeit

$$Z = \frac{1}{\sin\pi}, \quad \rho' = \frac{\sin(\pi - \pi')}{\sin\pi \sin\pi'}$$

woraus

$$Z + \rho' = \frac{1}{\sin\pi'}, \quad 2Z + \rho' = \frac{\sin(\pi + \pi')}{\sin\pi \sin\pi'}$$

folgt. Auch ist wie früher

$$z = \rho \sin\varphi' \sin\delta' + \rho \cos\varphi' \cos\delta' \cos t$$

Substituiren wir diese Ausdrücke, schreiben $b$ statt $tg\, b$, und übergehen das unmerkliche Produkt von $z^2 + u^2$ in $\sin\pi \sin\pi'$, so wird

$$b = \frac{u \sin(\pi - \pi')}{1 - z \sin(\pi + \pi')}$$

wofür man auch

$$b = u \sin(\pi - \pi') + uz \sin^2(\pi - \pi') + uz^2 \sin^3(\pi - \pi')$$

setzen darf. Lassen wir nun $u$ für einen beliebigen Zeitpunkt während des Verlaufes der Sonnenfinsterniss an einem gegebenen Orte gelten, und bezeichnen mit $u_1$ und $u_2$ bez. die Werthe von $u$ für die äussere und innere Ränderberührung, wobei jedoch zu bemerken ist, dass $u_1$ und $u_2$ mit demselben Werthe von $z$ wie $u$ berechnet werden müssen. dann wird

$$b_1 = u_1 \sin(\pi - \pi') + u_1 z \sin^2(\pi - \pi') + u_1 z^2 \sin^3(\pi - \pi')$$
$$b_2 = u_2 \sin(\pi - \pi') + u_2 z \sin^2(\pi - \pi')$$

und nennen wir die scheinbaren Halbmesser des Mondes und der Sonne für den Zeitpunkt, für welchen $u_1$, $u_2$ und $u$ gelten $d$ und $d'$, so wird

$$d + d' = b_1\, 206265''$$
$$d - d' = b_2\, 206265''$$

woraus man, wenn man will, diese Halbmesser berechnen kann. Bezeichnen wir nun für denselben Augenblick die grösste Breite der Sonnensichel mit $\odot$, so wird überhaupt

$$\odot = (b - b_2)\, 206265''$$

und es versteht sich von selbst, dass dieses die grösste Breite der Sonnensichel während der grössten Phase ist, wenn $u$ sich auf die grösste Phase bezieht.

105.

Es kann auch manchmal dienlich werden die Fläche des unverfinsterten Theils der Sonnenscheibe in Theilen der ganzen Fläche dersel-

ben kennen zu lernen. Der Ausdruck dafür, dessen Ableitung ich, da sie sehr leicht zu finden ist, weglassen werde, ist der folgende:

$$\frac{b_1^2(p'-p) - 2b_1b_2(p'+p) + b_2^2(p'-p)}{\pi(b_1-b_2)^2}$$
$$+ \frac{2\sqrt{(b-b_2)(b+b_2)(b_1+b)(b_1-b)}}{\pi(b_1-b_2)^2}$$

wo $\pi$ nicht die Mondparallaxe, sondern das Verhältniss des Kreisumfanges zum Durchmesser bedeutet, und die Bögen $p'$ und $p$ in Theilen des Radius ausgedrückt werden müssen, nachdem sie durch folgende Formeln

$$tg\tfrac{1}{2}(p'-p) = \sqrt{\frac{(b-b_2)(b+b_2)}{(b_1+b)(b_1-b)}}\ ;\ tg\tfrac{1}{2}(p'+p) = \frac{b_1}{b_2}\,tg\tfrac{1}{2}(p'-p)$$

in Graden u. s. w. ausgedrückt erhalten worden sind.

### §. 9. Bestimmung des Längenunterschiedes zweier Oerter durch die Beobachtung einer Sonnenfinsterniss. Differentialformeln.

106.

Die Momente einer Sonnenfinsterniss, die man bisher zum Zweck der Längenbestimmungen in Rechnung gezogen hat, sind die vier Ränderberührungen, allein an den meisten Orten finden die beiden inneren Berührungen nicht statt, und es bleiben daher nur die beiden äusseren übrig. Unter diesen ist es unmöglich die erste genau zu beobachten, denn man wird den Anfang der Finsterniss erst dann gewahr, wenn die Ränderberührung vorüber ist; es bleibt daher für solche Oerter, an welchen die Finsterniss nicht total oder ringförmig wird, nur das Ende derselben für die Längenbestimmungen übrig, wenn man die für die Berechnung derselben bisher entwickelten Verfahrungsarten betrachtet. Ausser der Beobachtung der eben genannten Momente hat man aber auch seit langer Zeit manchmal während des Verlaufes der Sonnenfinsterniss Abstände der Hörner der Sonne von einander beobachtet, und diese scheinen ein schätzbares Mittel darzubieten um die Längenbestimmung sicherer zu machen, weil man durch Zuziehung jeder dieser Messungen eine unabhängige Bestimmung für die Zeit der wahren Conjunction erhält, und die Gesammtheit aller dieser Bestimmungen gewiss genauer sein muss, wie jede einzelne derselben.

Es ist mir nicht bekannt, dass man irgend wo das Verfahren ent-

wickelt hätte um die Messungen der Hörnerabstände auch zur Längenbestimmung zu benutzen, und ich werde daher dasselbe hier ausführen.

### 107.

Es liegt an der Hand, dass die einzige Veränderung, die mit den Grundformeln vorgenommen werden muss um sie zur Anwendung auf die Messung von Hörnerabständen geeignet zu machen darin besteht, dass man der Grösse $u$ andere Werthe, wie die die sie bisher gehabt hat, beilegen muss.

Durch Hülfe der scheinbaren Halbmesser der Sonne und des Mondes im Augenblick der Hörnermessung, und durch diesen selbst, kann man leicht die entsprechende scheinbare Entfernung der Mittelpunkte der Sonne und des Mondes finden, und hieraus kann man schon durch Anwendung der Sätze des Art. 104 den anzuwendenden numerischen Werth von $u$ erhalten, aber es lässt sich ein anderes, eleganteres und zweckmässigeres Verfahren zur Berechnung von $u$ angeben, welches ich jetzt entwickeln werde.

Denkt man sich im Augenblick der Messung eines Hörnerabstandes zwei gemeinschaftliche Tangenten an den Mond- und den Sonnenkörper gelegt, die sich im Beobachtungsorte schneiden, so ist klar, dass diese Tangenten die Gesichtslinien nach den Hörnern sind, und der Winkel, den sie mit einander machen, ist also dem Hörnerabstand gleich. Aus der Lage dieser beiden Tangenten gegen die die Mittelpunkte der Sonne und des Mondes in demselben Zeitpunkt verbindende grade Linie folgt unmittelbar der Ausdruck für $u$. Um diesen zu erhalten wenden wir wieder das in §. 1 bei der Ableitung der Grundformeln des Art. 5 eingeführte Coordinatensystem an, dessen Beschaffenheit ich hier zu mehrerer Deutlichkeit wieder erklären werde. Der Anfangspunkt der Coordinaten $P'$, $Q'$, $Z'$ liegt im Beobachtungsorte und die Achse der $Z'$ ist der graden Linie, welche die Mittelpunkte der Sonne und des Mondes mit einander verbindet, parallel. Die Coordinaten $P'$ und $Q'$ sind daher für diese beiden Mittelpunkte dieselben, und wurden mit denselben Buchstaben bezeichnet; die dritte Coordinate des Mondmittelpunkts wurde mit $Z'$, und die des Sonnenmittelpunkts mit $Z'+\varrho'$ bezeichnet. Da ferner

$$P' = u \sin\theta_1\ ;\ Q' = u \cos\theta_1$$

gesetzt wurde, so kann $u$ als die Entfernung der gemeinschaftlichen Projection der Mittelpunkte der Sonne und des Mondes auf die Ebene der $P'$ und $Q'$ vom Anfangspunkt der Coordinaten definirt werden. Hiemit ist die Abhängigkeit der Grösse $u$ von den beiden oben eingeführten gemeinschaftlichen Tangenten dargethan, da diese auch durch den Anfangspunkt der Coordinaten gehen.

## 108.

Um die Lage dieser beiden gemeinschaftlichen Tangenten gegen unsere Coordinatenachsen zu finden wollen wir die zwei Kegeloberflächen betrachten, deren gemeinschaftliche Spitze im Anfangspunkt der Coordinaten liegt, und von welchen die eine den Mondkörper, und die andere den Sonnenkörper berührt, denn es ist klar, dass die beiden graden Linien, in welchen diese beiden Kegeloberflächen einander schneiden die beiden gesuchten gemeinschaftlichen Tangenten sind.

Die Gleichung des graden Kegels mit kreisförmiger Grundfläche ist bekanntlich, wenn wir die Spitze desselben in den Anfangspunkt der Coordinaten $x$, $y$, $z$ verlegen, und die Achse desselben mit der Achse der $z$ zusammen fallen lassen, die folgende:

$$x^2 + y^2 = z^2 \, tg^2 g$$

wo $g$ den Erzeugungswinkel des Kegels bedeutet. Denken wir uns nun eine Kugel, die von diesem Kegel berührt wird, nennen den Halbmesser derselben $s$, und die Coordinate $z$ ihres Mittelpunkts $c$, so giebt die Bedingung, dass in den Berührungspunkten die Halbmesser der Kugel senkrecht auf der Kegeloberfläche stehen müssen, sogleich die Bedingungsgleichung

$$s = c \sin g$$

und hiemit wird die Gleichung der Kegeloberfläche, die eine Kugel vom Halbmesser $s$ berührt,

$$x^2 (c^2 - s^2) + y^2 (c^2 - s^2) = z^2 s^2$$

Drehen wir die Achsen der $x$ und $z$ um den Winkel $p$, und nennen die neuen Coordinaten $\xi$ und $\zeta$, dann ist

$$x = \xi \cos p - \zeta \sin p$$
$$z = \xi \sin p + \zeta \cos p$$

Bezeichnen wir die Werthe dieser Coordinaten für den Mittelpunkt der

Kugel mit $\xi'$ und $\zeta'$, dann ist auch

$$0 = \xi' \cos p - \zeta' \sin p$$
$$c = \xi' \sin p + \zeta' \cos p$$

und die Substitution dieser Ausdrücke in die eben gefundene Gleichung der Kegeloberfläche verwandelt diese in

$$(60) \qquad \xi^2(\zeta'^2 - s^2) - 2\xi\zeta\xi'\zeta' + y^2(\xi'^2 + \zeta'^2 - s^2) + \zeta^2(\xi'^2 - s^2) = 0$$

109.

Die eben entwickelte allgemeine Gleichung können wir unmittelbar auf unsere Aufgabe anwenden, denn die Ebene der $\xi$ und $\zeta$, in welcher die Achse des Kegels liegt, können wir mit der Ebene der $u$ und $Z'$ identificiren. Wir erhalten die Gleichung des Kegels, welcher den Mondkörper berührt, wenn wir in (60) $u$ statt $\xi'$, $Z'$ statt $\zeta'$ schreiben, und wie oben unter $s$ den Halbmesser des Mondkörpers verstehen, so wie die Gleichung des Kegels, welcher den Sonnenkörper berührt, wenn wir in (60) wieder $u$ statt $\xi'$, aber $Z' + \varrho'$ statt $\zeta'$, und $s'$ statt $s$ schreiben, wo wieder $s'$ den Halbmesser des Sonnenkörpers bezeichnet. Die Gleichungen dieser beiden Kegel sind also

$$\xi^2(Z'^2 - s^2) - 2\xi\zeta u Z' + y^2(u^2 + Z'^2 - s^2) + \zeta^2(u^2 - s^2) = 0$$
$$\xi^2((Z' + \varrho')^2 - s'^2) - 2\xi\zeta u(Z' + \varrho') + y^2(u^2 + (Z' + \varrho')^2 - s'^2) + \zeta^2(u^2 - s'^2) = 0$$

110.

Die Gleichung einer Ebene, die auf der Ebene der $\xi\zeta$ senkrecht steht, mit der $\zeta$ Achse den Winkel $f$ macht, und durch den Anfangspunkt der Coordinaten geht, ist

$$\xi = \zeta \operatorname{tg} f$$

Schneiden wir unsere beiden Kegel durch diese Ebene, so bekommen wir durch die Elimination von $\xi$ aus den Gleichungen der Kegel für die beiden Durchschnittslinien bez. die Gleichungen

$$y = \pm \zeta \sqrt{\frac{s^2 \sec^2 f - (u - Z' \operatorname{tg} f)^2}{u^2 + Z'^2 - s^2}} \; ; \; \xi = \zeta \operatorname{tg} f$$

und

$$y = \pm \zeta \sqrt{\frac{s'^2 \sec^2 f - (u - (Z' + \varrho') \operatorname{tg} f)^2}{u^2 + (Z' + \varrho')^2 - s'^2}} \; ; \; \xi = \zeta \operatorname{tg} f$$

Wenn wir diese Linienpaare mit einander identificiren, so ergeben sich die beiden Linien, unter welchen die Kegel selbst einander schneiden.

oder die beiden gemeinschaftlichen Tangenten, von welchen oben die Rede war, die mit den Gesichtslinien vom Beobachtungsorte nach den beiden Hörnern der Sonne identisch sind. Nennen wir nun den Winkel, den diese beiden Linien mit einander machen, oder mit anderen Worten den beobachteten Hörnerabstand $c$, so ist der Winkel, den jede der beiden Linien mit der Ebene der $\xi\zeta$ macht, $\frac{1}{2}c$, und die Tangente des Winkels, den die Projection einer jeden derselben auf der Ebene der $y\zeta$ mit der Achse der $\zeta$ macht, hat $tg\frac{1}{2}c\sec f$ zum Ausdruck. Es wird also auch

$$y = \pm \zeta\, tg\tfrac{1}{2}c \sec f$$

und da diese Gleichung mit den beiden vorstehenden zwischen $y$ und $\zeta$ identisch sein muss, so erhalten wir

$$s^2\sec^2 f - (u - Z'\,tg f)^2 = (u^2 + Z'^2 - s^2)\,tg^2\tfrac{1}{2}c\sec^2 f$$
$$s'^2\sec^2 f - (u - (Z' + \varrho')\,tg f)^2 = (u^2 + (Z' + \varrho')^2 - s'^2)\,tg^2\tfrac{1}{2}c\sec^2 f$$

Eliminirt man $f$ zwischen diesen beiden Gleichungen, so bekommt man die Gleichung zwischen $u$ und $c$, die die directe Auflösung der Aufgabe bildet. Diese Gleichung ist zwar so zusammen gesetzt, dass sie sich zur Anwendung nicht eignet, da sie aber zu einer interessanten Bemerkung Anlass giebt, so werde ich sie hier entwickeln.

## 111.

Setzen wir zur Abkürzung

$$a^2 = s^2\sec^2\tfrac{1}{2}c - (Z'^2 + u^2)\,tg^2\tfrac{1}{2}c$$
$$a'^2 = s'^2\sec^2\tfrac{1}{2}c - ((Z' + \varrho')^2 + u^2)\,tg^2\tfrac{1}{2}c$$

so können die im vor. Art. gefundenen Gleichungen wie folgt geschrieben werden,

$$u\cos f - Z'\sin f = a$$
$$u\cos f - (Z' + \varrho')\sin f = a'$$

und hieraus erhält man leicht

$$\varrho'\sin f = a - a'$$
$$u\varrho'\cos f = a(Z' + \varrho') - a'Z'$$

Multiplicirt man die erste dieser mit $u$, erhebt dann beide ins Quadrat und addirt, so ergiebt sich

$$u^2\varrho'^2 - a^2(u^2 + (Z' + \varrho')^2) - a'^2(u^2 + Z'^2) = -2aa'(u^2 + Z'(Z' + \varrho'))$$

in welcher $f$ eliminirt ist. Um die Wurzelgrösse $aa'$ wegzuschaffen, muss

man jede Seite dieser Gleichung ins Quadrat erheben, und hiedurch ergiebt sich eine Gleichung die wie folgt gestellt werden kann,

$$\begin{aligned}&4u^2a^2a'^2\varrho'^2-2u^4\varrho'^2(a^2+a'^2)+u^4\varrho'^4+u^4(a^2-a'^2)^2\\&-2u^2\varrho'^2\{a^2(Z'+\varrho')^2+a'^2Z'^2\}+2u^2(a^2-a'^2)\{a^2(Z'+\varrho')^2-a'^2Z'^2\}\\&+\{a^2(Z'+\varrho')^2-a'^2Z'^2\}^2=0\end{aligned}$$

und augenscheinlich vom dritten Grade in $u^2$ ist. Substituirt man die Ausdrücke für $a^2$ und $a'^2$ und ordnet, so wird sie

$$\begin{aligned}&4u^6\varrho'^2\sec^2\tfrac{1}{2}c\,tg^2\tfrac{1}{2}c\\&+u^4\{\varrho'^4+4\varrho'^2\{(Z'+\varrho')^2+Z'^2\}\sec^2\tfrac{1}{2}c\,tg^2\tfrac{1}{2}c-2\varrho'^2(s^2+s'^2)\sec^2\tfrac{1}{2}c\,(1+2\,tg^2\tfrac{1}{2}c)\\&\qquad+(s^2-s'^2)^2\sec^4\tfrac{1}{2}c\}\\&+u^2\sec^2\tfrac{1}{2}c\,\{4\varrho'^2s^2s'^2\sec^2\tfrac{1}{2}c-2\varrho'^2\{s^2(Z'+\varrho')^2+s'^2Z'^2\}(1+2\,tg^2\tfrac{1}{2}c)\\&\qquad+4\varrho'^2Z'^2(Z'+\varrho')^2\,tg^2\tfrac{1}{2}c+2(s^2-s'^2)\{s^2(Z'+\varrho')^2-s'^2Z'^2\}\sec^2\tfrac{1}{2}c\}\\&+\{s^2(Z'+\varrho')^2-s'^2Z'^2\}^2\sec^4\tfrac{1}{2}c=0\end{aligned}$$

Da das letzte Glied dieser Gleichung positiv ist, so hat sie immer eine negative Wurzel für $u^2$, woraus zwei imaginäre Werthe von $u$ folgen. Wenn die beiden anderen Wurzeln reel und positiv sind, so giebt sie also vier reelle Werthe von $u$, von welchen zwei und zwei mit entgegengesetztem Zeichen einander gleich sind. Es ist leicht sich durch einfache geometrische Betrachtungen zu überzeugen, dass in der Thal die Werthe von $u$ so beschaffen sein müssen. Denn für jeden Werth von $c$, der nicht grösser ist, als dass er einem Schnitt der beiden Kegeloberflächen entsprechen kann, giebt es im Allgemeinen vier Punkte in der in der Ebene der $P'$ und $Q'$ liegenden Achse der $\xi$, in welchen die gemeinschaftliche Spitze derselben liegen kann, und von diesen liegen zwei und zwei in gleichen Entfernungen von der $Z'$ oder $\zeta$ Achse auf entgegengesetzten Seiten derselben. Die einen zwei davon entsprechen dem Schnitt, welcher der äusseren, und die anderen zwei dem Schnitt, welcher der inneren Berührung der beiden Kegel am Nächsten liegt.

Es fragt sich nun was die beiden imaginären Werthe von $u$, die die obige Gleichung giebt, für eine Beziehung zur Aufgabe haben, denn da sie in der Gleichung, auf welche die Aufgabe führt, enthalten sind, so können sie dieser nicht fremd sein. Wenn die Werthe der Coordinaten $Z'$ und $Z'+\varrho'$ so beschaffen sind, dass die Spitze des beides den Mond und die Sonne berührenden Kegels in der Ebene der $P'$ und $Q'$ liegt, dann löst der Werth $u=0$ unabhängig von $c$ die Aufgabe. Die bisher betrachteten zwei Kegel fallen in diesem Falle in diesen Einen

Kegel zusammen. Dieses zeigt die obige Gleichung durch die negative Wurzel für $u^2$ an. Denn die Bedingung, die eben gefordert wurde, verlangt dass

$$\frac{s'}{Z'+\varrho'} = \frac{s}{Z'}$$

werde, hiemit wird das letzte Glied der obigen Gleichung Null, und die ausserdem negative Wurzel und die daraus folgenden imaginären Werthe von $u$ werden $u = 0$.

## 112.

Statt der Anwendung der im vor. Art. entwickelten Gleichung ist ein indirectes Verfahren zur Bestimmung von $u$ vorzuziehen, und um so mehr da vermöge der in der Natur statt findenden Grössenverhältnisse die erste Annäherung schon immer ein ausreichend genaues Resultat geben wird. Die beiden im vorvor. Art. erhaltenen Gleichungen stelle ich zuerst wie folgt

$$(u\cos f - Z'\sin f)^2 = s^2 - (u^2 + Z'^2 - s^2)\, tg^2 \tfrac{1}{2}c$$
$$(u\cos f - (Z'+\varrho')\sin f)^2 = s'^2 - (u^2 + (Z'+\varrho')^2 - s'^2)\, tg^2 \tfrac{1}{2}c$$

Bestimmt man nun die Winkel $p$ und $p'$ durch die folgenden Ausdrücke

$$\sin p = \frac{\sqrt{u^2+Z'^2-s^2}}{s}\, tg\tfrac{1}{2}c\ ;\ \sin p' = \frac{\sqrt{u^2+(Z'+\varrho')^2-s'^2}}{s'}\, tg\tfrac{1}{2}c$$

so geben diese Gleichungen

$$u\cos f - Z'\sin f = \pm s\cos p$$
$$u\cos f - (Z'+\varrho')\sin f = \pm s'\cos p'$$

woraus

$$\sin f = \frac{s\cos p \pm s'\cos p'}{\varrho'}$$
$$u = (s\cos p + Z'\sin f)\sec f$$

hervorgehen, die den im §. 1 für die Ränderberührungen abgeleiteten Ausdrücken für $u$ und $f$ völlig analog sind, und damit identisch werden, wenn man $c = 0$ macht.

## 113.

Um die eben abgeleiteten Ausdrücke für die Anwendung einzurichten bemerke ich zuerst, dass $\sqrt{u^2 + (Z'+\varrho')^2 - s'^2}$ die Entfernung des Beobachtungsortes von den beiden Punkten des Sonnenkörpers bedeutet, die von den Gesichtslinien nach den beiden Hörnern berührt werden; hiefür darf unbedenklich der Radius Vector der Sonne $R'$ ge-

setzt werden. Da nun in derselben Einheit wie $R'$ ausgedrückt, $s = \sin\Delta'$ ist, wenn $\Delta'$ wieder den mittleren Sonnenhalbmesser bedeutet, so wird

$$\sin p' = \frac{R'}{\sin\Delta'}\, tg\tfrac{1}{2}c$$

Die Function $\sqrt{u^2 + Z'^2 - s^2}$ hat in Bezug auf den Mond dieselbe Bedeutung und kann auch unbedenklich durch $Z'$ ersetzt werden, da die Grösse $u^2 - s^2$ in Bezug auf $Z'^2$ sehr klein ist. Nachdem man ferner, wie im Art. 3, $Z' = Z - z$ gesetzt hat, darf man wie im Art. 19 gezeigt wurde $\frac{1}{\sin\pi}$ für $Z$ setzen, wo wieder $\pi$ die Aequatorealhorizontalparallaxe des Mondes bedeutet. Es wird hiemit

$$\sin p = \frac{1 - z\sin\pi}{s\sin\pi}\, tg\tfrac{1}{2}c$$

wo wieder $s$ das constante Verhältniss des Mondhalbmessers zur genannten Horizontalparallaxe bedeutet. Wenden wir nun auch in den obigen Ausdrücken für $f$ und $u$ dieselben Einheiten und Substitutionen an, die im §. 4 eingeführt wurden, so erhalten wir

$$\sin p = \frac{1 - z\sin\pi}{s\sin\pi}\, tg\tfrac{1}{2}c\ ;\ \sin p' = \frac{R'}{\sin\Delta'}\, tg\tfrac{1}{2}c$$

$$\sin f = \frac{K}{R'}\,G$$

$$u' = (s\cos p + w)\sec f$$

$$u = u' - z\, tg f$$

wo zur Abkürzung

$$K = s\sin\Pi'\cos p \pm \sin\Delta'\cos p'$$

$$\sin\pi' = \frac{\sin\Pi'}{R'}\ ;\ G = 1 + \frac{\sin\pi'}{\sin(\pi - \pi')}$$

$$G' = \frac{\cos b\cos(l - l')}{\sin(\pi - \pi')}\ ;\ w = \frac{K}{R'}\,G'$$

$$z = \eta\sin\delta' + \xi\cos\delta'\cos(t + \Delta\alpha')$$

gesetzt werden, und wie im vor. §

$$\xi = \varrho\cos\varphi'\ ,\ \eta = \varrho\sin\varphi'$$

ist. Vom doppelten Zeichen wird das obere angewandt, wenn der gemessene Hörnerabstand in der Nähe einer der beiden äusseren, und das untere wenn derselbe in der Nähe einer der beiden inneren Ränderberührungen liegt. Es kann hieraus nie über das anzuwendende Zeichen Zweifel entstehen, da die Hörnerabstände, die in die Mitte zwischen den Ränderberührungen fallen für die Längenbestimmungen unbrauchbar sind. Es darf nemlich, wenn der gemessene Hörnerabstand brauchbar sein

soll, die Veränderung desselben in Bezug auf die Zeit nicht zu klein sein, und dieses findet in der Mitte zwischen den Ränderberührungen immer statt. Man muss daher die Hörnerabstände immer in den Zeitpunkten messen, die dem Zeitpunkt einer Ränderberührung nicht zu ferne liegen, und die Hörnerabstände die den inneren Ränderberührungen nahe liegen, werden manchmal aus dem Grunde ausgeschlossen werden müssen, dass die Durchmesser der Mond- und Sonnenscheibe zu wenig von einander verschieden sind. Aus dieser Ursache bekommen nemlich die Unregelmässigkeiten des Mondrandes grossen Einfluss auf den Hörnerabstand.

Aus den vorstehenden Erklärungen geht hervor, dass die zu Längenbestimmungen brauchbaren Hörnerabstände immer viel kleiner sein werden, wie der Sonnen- oder Monddurchmesser, und wohl nicht die Hälfte dieser letzteren erreichen dürfen, die Folge davon ist, dass die Bögen $p$ und $p'$ selten oder nie $30^0$ erreichen, dass daher um so mehr die kleinen oben übergangenen Grössen auf die Bestimmung von $p$ und $p'$ nur unmerklichen Einfluss äussern werden. Will man indess das genauere Resultat kennen lernen, so kann man mit dem durch die obigen Formeln erhaltenen Werthe von $u$ die Wurzelgrössen $\sqrt{u^2 + Z'^2 - s^2}$ und $\sqrt{u^2 + (Z' + \varrho')^2 - s'^2}$ berechnen, und damit genauere Werthe von $f$ und $u$ erhalten. Es wird dieses aber wohl nie nöthig werden.

## 114.

Durch die eben entwickelte Berechnung von $u$ ist die erste der Grundgleichungen (16) berücksichtigt, die beiden anderen sind, nachdem $\xi$ und $\eta$ darin eingeführt worden sind,

$$u \sin\theta = -\gamma\cos N' + \frac{t-\lambda-\mu}{15} n \sin N' - (1+x)\,\xi \sin(t + \Delta\alpha')$$

$$u \cos\theta = \gamma\sin N' + \frac{t-\lambda-\mu}{15} n \cos N' - (1+x)\{\eta\cos\delta' - \xi\sin\delta'\cos(t+\Delta\alpha')\}$$

für welche die Hülfsgrössen $\gamma$, $\mu$, $n$, $N'$, $\Delta\alpha'$, $\delta'$ den Auseinandersetzungen des §. 4 gemäss berechnet werden müssen. In dieser Aufgabe muss man die Hülfsgrössen mit möglichster Genauigkeit für die bekannte Zeit, oder die bekannten Zeiten $t$ der Beobachtungen, sei es der Ränderberührungen oder der Hörnerabstände berechnen. Hiezu ist erforderlich, dass man einen genäherten Werth der Länge $\lambda$ kenne, und die Kenntniss

eines hinreichend genauen Werthes derselben wird auch immer vorhanden, oder leicht zu erlangen sein, da die Hülfsgrössen sich nur sehr langsam ändern. Die Auflösung der vorstehenden Gleichungen in Bezug auf $\lambda$ ist nun leicht direct zu bewirken, da $t$, $\xi$ und $\eta$ bekannte Grössen sind.

Führen wir die folgenden Hülfsgrössen ein,

$$(61)\quad \begin{cases} \gamma' = 15\frac{\gamma}{n} \operatorname{cotg} N' \\ \Gamma = \frac{\gamma}{\sin N'} \\ q \sin Q = (1+x)\,\xi \sin(t + \Delta\alpha') \\ q \cos Q = \Gamma - (1+x)\,\{\eta \cos\delta' - \xi \sin\delta' \cos(t+\Delta\alpha')\} \end{cases}$$

dann gehen die vorstehenden Grundgleichungen in die folgenden über,

$$u \sin\theta = \frac{t-\lambda-\mu-\gamma'}{15}\, n \sin N' - q \sin Q$$

$$u \cos\theta = \frac{t-\lambda-\mu-\gamma'}{15}\, n \cos N' + q \cos Q$$

woraus

$$(62)\ \ldots \begin{cases} \sin\chi = \frac{q}{u}\sin(Q+N') \\ \lambda = t - \mu - \gamma' + 15\frac{q}{n}\cos(Q+N') - 15\frac{u}{n}\cos\chi \\ \text{oder} \\ \lambda = t - \mu - \gamma' - 15\frac{q \sin(Q+N'-\chi)}{n \sin\chi} \end{cases}$$

folgt, und $\chi = N' - \theta$ ist.

Jede an irgend einem Orte angestellte Beobachtung einer Ränderberührung oder eines Hörnerabstandes giebt einen Werth von $\lambda$, und aus allen diesen Werthen muss man das arithmetische Mittel nehmen, wenn alle Beobachtungen für gleich genau gehalten werden müssen, und wenn dieses nicht der Fall ist, die Gewichte der einzelnen Beobachtungen auf bekannte Art berücksichtigen. Wenn man annehmen darf, dass die Epochen der angewandten Mond- und Sonnentafeln fehlerfrei, oder nur mit unmerklichen Fehlern behaftet sind, so ist der auf die beschriebene Art erhaltene Werth von $\lambda$ die Länge des Beobachtungsortes in Bezug auf den Meridian, für welchen die Mondtafeln gelten; muss man aber in diesen Epochen merkliche Fehler annehmen, so giebt der Unterschied der beiden zu zwei Beobachtungsörtern gehörigen Werthe von $\lambda$ den Längenunterschied zwischen diesen beiden Oertern unabhängig von dem Fehler der Epochen der Tafeln.

## 115.

Da hier wieder $\chi$ durch seinen Sinus bestimmt wird, so muss das Zeichen von $\cos\chi$ besonders bestimmt werden. Hiefür ist zuerst zu bemerken, dass im Allgemeinen $\cos\chi$ dasselbe Zeichen bekommt wie $\cos\chi'$ im vor. §, dass aber auch Fälle vorkommen können, in welchen das Gegentheil statt findet.

Wenn man durch die Ausdrücke des §. 5 für die betreffende Phase nicht blos die nördliche oder bez. südliche Grenzcurve, sondern auch die Curve, auf welcher $\psi = 90^0$ oder bez. $= 270^0$ ist, berechnet, und diese beiden Curven auf einem Globus construirt, so begrenzen sie den Theil der Erdoberfläche, auf welchem im ganzen Verlauf der Finsterniss $\cos\chi$ entweder positiv oder negativ ist, und daher das Zeichen von $\cos\chi$ entweder im Anfang der Finsterniss oder im Ende derselben nicht mit dem von $\cos\chi'$ übereinstimmt, und man könnte daher durch dieses Hülfsmittel schon das Zeichen von $\cos\chi$ bestimmen. Aber es lässt sich ein anderes Unterscheidungszeichen angeben, welches die Berechnung und Construction jener Curven nicht verlangt.

Es gab sich im vor. § zu erkennen, dass für den Zeitpunkt der grössten Phase $\chi'$ entweder $= 90^0$ oder $= 270^0$ ist, und hieraus folgt in Verbindung mit den Gleichungen (55) dass, wenn $u$ positiv ist, für jedes Moment der Finsterniss, welches der grössten Phase vorangeht, $\cos\chi'$ negativ, und für jedes derselben nachfolgende Moment $\cos\chi'$ positiv ist, so wie dass die entgegengesetzten Zeichen von $\cos\chi'$ anzuwenden sind, wenn $u$ negativ ist.

Da nun $\chi' = M' - \psi$, und $\chi = -\psi$ ist, so wird

$$\chi' = M' + \chi$$

und es entspringt für die Bestimmung des Quadranten, in welchem $\chi$ zu nehmen ist, folgende allgemein gültige Regel.

Für jedes Moment, welches der grössten Phase vorangeht, muss mit Rücksicht auf das Zeichen von $\sin\chi$, welches immer durch die erste Gleichung (62) gegeben ist, $\chi$ so genommen werden dass

$$\cos(M' + \chi) \text{ negativ}$$

wird, wenn $u$ positiv ist, und

$$\cos(M' + \chi) \text{ positiv}$$

wird, wenn $u$ negativ ist. Für jedes Moment dagegen, welches der grössten Phase nachfolgt, muss

$$\cos(M'+\chi) \text{ positiv}$$

angenommen werden, wenn $u$ positiv ist, und

$$\cos(M'+\chi) \text{ negativ}$$

angenommen werden, wenn $u$ negativ ist.

Man braucht um diese Regel anzuwenden nur $M'$ durch die Ausdrücke (57) zu rechnen, indem man darin $t$ oder $t+\Delta\alpha'$ statt $\tau$ substituirt. Nur in den selteneren Fällen, aber namentlich in denjenigen, in welchen die Finsterniss am Beobachtungsorte klein gewesen ist, wird es nothwendig $M'$ in der That für diesen Zweck zu berechnen, denn in den meisten Fällen kann man ohne diese Rechnung auszuführen das anzuwendende Zeichen von $\cos(M'+\chi)$ erkennen, indem es, da $M'$ immer ein nicht grosser Bogen ist, dasselbe wird wie das von $\cos\chi$ selbst.

## 116.

Untersuchen wir jetzt den Einfluss der Tafelfehler auf diese Längenbestimmung, wobei wir den Unterschied der Mond- und Sonnenlänge $l-l'$, die Mondbreite $b$, die Horizontalparallaxe $\pi$, das Verhältniss des Mondhalbmessers zur Horizontalparallaxe $s$, und den Sonnenhalbmesser $\Delta'$ als mit Fehlern behaftet betrachten wollen. Indem wir in Bezug auf $\pi$ zu differentiiren haben ist zu bemerken, dass nicht nur $\gamma$ und $\mu$, sondern auch $n$ Functionen von $\pi$ sind. Da $n\sin N$ und $n\cos N$ die endlichen Unterschiede der, verschiedenen Zeiten angehörigen, Werthe der Coordinaten $P$ und $Q$ sind, und diese der Grösse $\sin(\pi-\pi')$ umgekehrt proportional sind, so haben jene dieselbe Eigenschaft, und hieraus folgt sogleich dass

$$\frac{dn}{d\pi} = -\frac{n}{\sin(\pi-\pi')}\,;\ \frac{dN}{d\pi} = 0$$

ist, wenn wir hier $\cos(\pi-\pi') = 1$ setzen. Da übrigens vorausgesetzt wird, dass die Fehler der oben genannten Grössen während der Dauer der Finsterniss dieselben bleiben, so sind die eben ermittelten Ausdrücke die vollständigen Differentiale von $n$ und $N$. Differentiiren wir nun die im Art. 114 aufgestellten Gleichungen, so bekommen wir zuerst

$$du\sin\theta + u\cos\theta\, d\theta = -d\gamma\cos N' - (d\lambda + d\mu)\frac{n}{\varkappa}\sin N' - \frac{t-\lambda-\mu}{15}\cdot\frac{n\sin N'}{\sin(\pi-\pi')}\,d\pi$$

$$du\cos\theta - u\sin\theta\, d\theta = \quad d\gamma\sin N' - (d\lambda + d\mu)\frac{n}{\varkappa}\cos N' - \frac{t-\lambda-\mu}{15}\cdot\frac{n\cos N'}{\sin(\pi-\pi')}\,d\pi$$

und hieraus durch die Elimination von $d\theta$

$$d\lambda = -d\mu + \frac{\varkappa\sin\chi}{n\cos\chi}\,d\gamma - \frac{t-\lambda-\mu}{15}\cdot\frac{\varkappa}{\sin(\pi-\pi')}\,d\pi - \frac{\varkappa}{n\cos\chi}\,du$$

## 117.

Um das Differential von $du$ zu entwickeln entnehme ich aus dem Vorhergehenden die folgenden Ausdrücke

$$\sin p = \frac{Z'}{s} tg\tfrac{1}{2}c\ ;\ \sin p = \frac{Z'+\varrho'}{s'} tg\tfrac{1}{2}c$$

$$\sin f = \frac{s\cos p \pm s'\cos p'}{\varrho'}$$

$$u = s\cos p + Z'\sin f$$

in welchen $\cos f = 1$ gesetzt worden ist, da diese Annahme hier jedenfalls statthaft ist. Es ist zu bemerken, dass zwar $Z'$ und $\varrho'$ Functionen von $\pi$ sind, aber die Coefficienten von $d\pi$ in dem Differential von $u$ so klein werden, dass man sie übergehen kann. Wir bekommen daher

$$dp = -\frac{tg p}{s} ds\ ;\ dp' = -\frac{tg p'}{s'} ds'$$

$$df = \frac{ds\cos p \pm ds'\cos p'}{\varrho'} - \frac{dp s\sin p \pm dp's'\sin p'}{\varrho'}$$

$$du = ds\cos p - dp\, s\sin p + Z'\, df$$

woraus

$$du = \frac{ds}{\cos p} + \frac{Z'\,ds}{\varrho'\cos p} \pm \frac{Z'\,ds'}{\varrho'\cos p'}$$

folgt, und in welcher das zweite Glied in Bezug auf das erste übergangen werden kann. Da nun hier

$$\frac{Z'}{\varrho'} = \frac{\sin\pi'}{\sin(\pi-\pi')}\ ;\ s' = \frac{\sin\Delta'}{\sin\pi'}$$

gesetzt werden kann, wo $\Delta'$ wieder den mittleren Sonnenhalbmesser bedeuten darf, so wird, wenn wir zur Abkürzung $\sigma$ statt $-d\mu$, und $\eta$ statt $\frac{x}{n} d\gamma$ setzen, der im vor. Art. gefundene Ausdruck

$$d\lambda = \sigma + \eta\, tg\chi - \frac{t-\lambda-\mu}{15}\frac{x}{\sin(\pi-\pi')} d\pi$$
$$- \frac{x}{n}\frac{\sec\chi}{\cos p} ds \mp \frac{x}{n\sin(\pi-\pi')}\frac{\sec\chi}{\cos p'} d\Delta'.$$

Wegen

$$\frac{dn}{d\pi} = -\frac{n}{\sin(\pi-\pi')}\ ;\ \frac{dN}{d\pi} = 0$$

bekommen wir aus den Artt. 88 und 89

$$\frac{d\gamma}{d\pi} = -\frac{\gamma}{\sin(\pi-\pi')}\ ;\ \frac{d\mu}{d\pi} = 0$$

und hiemit

$$\eta = -\frac{x\cos N}{n\sin(\pi-\pi')}\cos b\, d(l-l') + \frac{x\sin N}{n\sin(\pi-\pi')} db - \frac{x\gamma}{n\sin(\pi-\pi')} d\pi$$

$$\sigma = \frac{x\sin N}{n\sin(\pi-\pi')}\cos b\, d(l-l') + \frac{x\cos N}{n\sin(\pi-\pi')} db$$

Wenn man den Längenunterschied zweier Oerter durch Beobachtung

einer Sonnenfinsterniss an jedem derselben bestimmt, so hat die Grösse $\sigma$ gar keinen Einfluss auf das Resultat, weil sie für jeden der beiden Werthe von $d\lambda$ dieselbe ist, und daher im Unterschiede dieser verschwindet.

118.

Untersuchen wir schliesslich auch den Einfluss eines Beobachtungsfehlers auf die Längenbestimmung. Differentiiren wir mit Uebergehung der kleinen Veränderung von $u$ die Gleichungen des Art. 114 in Bezug auf $\lambda$ und $t$, so bekommen wir zuerst

$$u\cos\theta\, d\theta = \left(\frac{n}{x}\sin N' - \xi\cos t\right) dt - \frac{n}{x}\sin N' d\lambda$$

$$-u\sin\theta\, d\theta = \left(\frac{n}{x}\cos N' - \xi\sin\delta'\sin t\right) dt - \frac{n}{x}\cos N'\, d\lambda$$

woraus durch die Elimination von $d\theta$

$$0 = \left\{\left(\frac{n}{x}\sin N' - \xi\cos t\right)\sin\theta + \left(\frac{n}{x}\cos N' - \xi\sin\delta'\sin t\right)\cos\theta\right\} dt$$
$$- \left(\frac{n}{x}\sin N'\sin\theta + \frac{n}{x}\cos N'\cos\theta\right) d\lambda$$

folgt. Berücksichtigen wir nun die Gleichungen (59), und führen die Winkel $\chi'$ und $\chi$ ein, so wird

$$d\lambda = \frac{m'\cos\chi'}{n\cos\chi}\, dt$$

Dieser Coefficient von $dt$ hat eine einfache geometrische Bedeutung. Er bezeichnet das Verhältniss der auf den grössten Kreis, welcher zur Zeit der Beobachtung die Mittelpunkte des Mondes und der Sonne mit einander verbindet, projicirten scheinbaren, zu der auf den analogen Kreis projicirten wahren, relativen Bewegung des Mondes und der Sonne. Die Grösse der grössten Phase kommt in diesem Ausdruck nicht vor, woraus folgt, dass kleine Sonnenfinsternisse sich so gut wie grosse zu Längenbestimmungen eignen, vorausgesetzt, dass man bei jenen die beobachteten Momente eben so genau erhalten könne wie bei diesen.

## §. 10. Berechnung eines Beispiels.

119.

Als Beispiel habe ich die Sonnenfinsterniss gewählt, die im Juli des Jahres 1860 eintreffen wird. Aus den oben angeführten ecliptischen Tafeln suchte ich zuerst die Zeit der wahren Conjunction, und fand

dafür Juli 18,096 m. Z. Greenwich. Hierauf berechnete ich aus den neuen Mondtafeln für die fünf beigesetzten Zeiten die Mondörter,

| 1860 | Mondlänge. | Mondbreite. | Aeq. Hor. Par. |
|---|---|---|---|
| Juli 18.0 m. Z. Gr. | 114°40′47″9 | +0°40′38″8 | 59′45″50 |
| „ 18.05 | 115 24 6.9 | 0 36 40.3 | |
| „ 18.1 | 116 7 28.2 | 0 32 41.2 | 59 48.68 |
| „ 18.15 | 116 50 51.6 | 0 28 41.6 | |
| „ 18.2 | 117 34 17.3 | 0 24 41.5 | 59 51.72 |

und aus den Sonnentafeln

| 1860 | Sonnenlänge | m. AR |
|---|---|---|
| Juli 18.0 m. Z. Gr. | 115°59′47″9 | $7^h46^m\ 4^s02$ |
| „ 18.05 | 116 2 39.8 | |
| „ 18.1 | 116 5 31.7 | 7 46 27.68 |
| „ 18.15 | 116 8 23.6 | |
| „ 18.2 | 116 11 15.4 | 7 46 51.34 |

und für Juli 18,1

Breite = + 0″, 24, log. Rad. vect. = 0.0069641

Schiefe der Ecliptik = 23°27′31″,1

welches zufolge der in dieser Abhandlung entwickelten Ausdrücke die zur Berechnung dieser Sonnenfinsterniss nöthigen tabularischen Data sind.

120.

Ich habe nun die folgenden Hülfsgrössen so genau berechnet, wie für etwaige Längenbestimmungen durch diese Finsterniss erforderlich ist, habe mich aber dabei enthalten, eine Menge von Decimalstellen anzusetzen, die man doch nicht verbürgen kann, und deren Berücksichtigung zwar die Rechnung länger und mühsamer macht, die Resultate aber nicht genauer. Ich habe daher grössten Theils nur Logarithmen von sechs oder weniger Decimalen angewandt.

| | $P$ | $Q$ | log sin $f$. äuss. Ber. | log sin $f$. inn. Ber. |
|---|---|---|---|---|
| Juli 18.0 | −1.324975 | +0.681743 | 7.662872 | 7.660748$n$ |
| „ 18.05 | −0.646287 | 0.614795 | | |
| „ 18.1 | +0.032512 | 0.547740 | 7.662871 | 7.660747$n$ |
| „ 18.15 | +0.711376 | 0.480609 | | |
| „ 18.2 | +1.390226 | 0.413402 | 7.662870 | 7.660746$n$ |

| | $u'$ äuss. Ber. | $u'$ inn. Ber. | log. $n$ | $N$ |
|---|---|---|---|---|
| Juli 18.0 | 0.537584 | +0.009627 | 9.754630 | 95°38′15″35 |
| „ 18.05 | 0.537522 | 0.009689 | 9.754669 | 95 38 29.63 |
| „ 18.1 | 0.537425 | 0.009785 | 9.754698 | 95 38 40.70 |
| „ 18.15 | 0.537294 | 0.009916 | 9.754715 | 95 38 50.84 |
| „ 18.2 | 0.537129 | 0.010081 | 9.754712 | 95 39 2.79 |

| | $a'$ | $d'$ | $h_0$ | Zeitgl. |
|---|---|---|---|---|
| Juli 18.0 | 117°59′42″0 | +20°57′56″41 | —10°46′10″52 | —5ᵐ54ˢ78 |
| „ 18.05 | | 57 24.25 | 47 15.21 | |
| „ 18.1 | 118 5 43.7 | 56 52.05 | 48 19.86 | —5 55.23 |
| „ 18.15 | | 56 19.81 | 49 24.47 | |
| „ 18.2 | 118 11 45.1 | 55 47.52 | 50 29.04 | —5 55.67 |

| | $\Delta\alpha'$ | $\Delta\delta'$ | $\Delta h$ | $\gamma$ | $\mu$ | $N'$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Juli 18.0 | —10″70 | +7″53 | —3″83 | +0.548284 | 35°0879 | 106°24′29″7 |
| „ 18.05 | — 4.76 | 5.89 | —1.70 | 0.548283 | 35.0879 | 25 46.5 |
| „ 18.1 | + 1.17 | 4.26 | +0.42 | 0.548282 | 35.0878 | 27 0.1 |
| „ 18.15 | + 7.10 | 2.62 | +2.54 | 0.548281 | 35.0876 | 28 12.8 |
| „ 18.2 | +13.02 | +0.99 | +4.65 | 0.548280 | 35.0874 | 29 27.2 |

$$\pi' = 8'', 46$$

Die Coordinaten $P$ und $Q$ sind nach den Ausdrücken (7) berechnet worden, die Grössen $\sin f$ und $u'$ nach (8) und (9), und $n$ und $N$ nach (10), nachdem vorher durch die Ausdrücke des Art. 21 die $p$ und $q$ berechnet worden waren, in welchen für $P_0$ und $Q_0$ die zu Juli 18,1, das ist zu Juli 18 2ʰ4, gehörigen Werthe dieser Coordinaten gewählt worden waren. Es sind hierauf $a'$, $d'$ und $h_0$ durch die (12) erhalten worden, worauf die Zeitgleichung sich durch den Ausdruck

$$\text{mittl. gr. Aufst.} - \tfrac{1}{15} a'$$

ergab, und zufolge der Annahme von $P_0$ und $Q_0$

$$T_0 = 15\,\{2^h 4 + \text{Zeitgl.}\}$$

wurde, in welchem die in Decimaltheile der Stunde verwandelte Zeitgleichung angewandt werden muss. Es ergeben sich ferner $\Delta\alpha'$, $\Delta\delta'$ und $\Delta h$ aus (13), und $\gamma$ nebst $\mu$ aus (11). Schliesslich wurde

$$N' = N - h$$

berechnet. Um aus den obigen Täfelchen für einen gegebenen Werth von $\tau$ die Werthe der Hülfsgrössen durch Interpolation leicht finden zu können, müssen die angesetzten Zeiten auf die Einheit und Gattung von

$\tau$ gebracht werden. Nun ist aber in dieser Abhandlung allenthalben für $\tau$ die wahre Zeit des ersten Meridians verstanden, und diese ist in Graden und Decimaltheilen davon ausgedrückt worden. Verwandelt man die fünf Zeiten der Täfelchen, so werden sie

Juli 18 — 1°4782
„ 18 + 16.5208
„ 18 + 34.5199
„ 18 + 52.5190
„ 18 + 70.5181

die zur genannten Interpolation dienen.

121.

Ich habe hierauf die Erscheinung dieser Finsterniss auf der Erde überhaupt ermittelt, und zu dem Ende die verschiedenen Grenzcurven berechnet. Da ich dafür halte, dass die Angabe der Curvenpunkte in Graden und Minuten ausreicht, so habe ich mich bei dieser Rechnung durchgehends Logarithmen von nur vier Decimalen bedient, in einem Paar Fällen habe ich Logarithmen von fünf Decimalen angewandt. Die Berechnung der Grenzcurven habe ich damit angefangen, dass ich die Berührungspunkte der verschiedenen Curven mit einander, und die Berührungspunkte des Schattenkegels mit dem Erdkörper berechnete. Da in diesem Beispiel

$$\gamma + u' = + 1,075 \ldots > 1$$

ist, so werden die nördliche Grenzcurve für die äusseren Ränderberührungen, sowohl wie die inneren Berührungen des Schattenkegels für den Halbschatten mit dem Erdkörper imaginär.

Da man vor der Rechnung die Zeit des ersten Meridians, in welchem diese Berührungen statt finden nicht kennt, und diese vielmehr erst durch die Berechnung der Berührungspunkte selbst mit kennen lernt, so ist nichts weiter zu thun wie von den vorstehenden Werthen der Hülfsgrössen in der ersten Annäherung die mittleren zu Grunde zu legen. Mit den für Juli 18,1 geltenden Werthen fand sich zuerst durch die Ausdrücke (24) und (27)

$$D = 21^\circ 0'.7 \;, \; \log d = 9.99874$$
$$\nu = + 2'.7 \;, \; \log e = 9.99884$$
$$\nu' = - 2'.7 \;, \; \log e' = 9.99990$$

Ich nahm hierauf für die Strahlenbrechung im Horizont 33′ an, und da diese in den betreffenden Formeln in Theilen des Radius ausgedrückt werden muss, so wurde

$$\log r = 7{,}98224$$

gesetzt. Das im §. 5 unter *c*) und bez. *d*) erklärte Verfahren gab nun für die Berührungspunkte der westlich-östlichen Grenzcurve mit der südlichen

$$W = 178^0 55',\ \psi = 260^0 30',\ \tau = 6^0 22',\ t = 262^0 57'$$
$$\lambda = 256^0 35',\ \varphi = +16^0 10'$$

und

$$W = 0^0 59',\ \psi = 279^0 23',\ \tau = 63^0 47',\ t = 84^0 54'$$
$$\lambda = 21^0 7',\ \varphi = -14^0 41'$$

für die Berührungspunkte des Schattenkegels mit dem Erdkörper

$$W = 159^0 4',\ \psi = 201^0 1',\ \tau = -2^0 47',\ t = 253^0 48'$$
$$\lambda = 256^0 35',\ \varphi = +34^0 16'$$

und

$$W = 20^0 54',\ \psi = 339^0 5',\ \tau = +73^0 0',\ t = 92^0 21'$$
$$\lambda = 19^0 22',\ \varphi = +3^0 52'$$

Da der erste dieser Berührungspunkte den Anfang der Finsterniss auf der Erde überhaupt, und der zweite das Ende derselben bezeichnet, so sind diese beiden Zeitpunkte

Juli 17 $23^h\,48'\!.9$ und Juli 18 $4^h\,52'\!.0$ w. Z. Gr.

und die ganze Dauer dieser Finsterniss

$5^h\,3'\!.1$

Da nun die Werthe von $\tau$ für die vorstehenden vier Punkte bekannt sind, so hätte ich damit aus den Angaben des vor. Art. durch Interpolation die Werthe der Hülfsgrössen genauer finden, und dann durch Wiederholung der Rechnung die vorstehenden Resultate verbessern können, allein bei den geringen Veränderungen, denen die Hülfsgrössen unterworfen sind, habe ich diese Verbesserung für unnöthig gehalten und daher unterlassen. Da ferner die obigen Werthe von $\tau$ die Kenntniss der Zeit des ersten Meridians für vier Punkte der westlich-östlichen Grenzcurve gewähren, so hätte ich vor der Berechnung eines jeden der übrigen unten folgenden Punkte dieser Curve mit mehr wie erforderlicher Genauigkeit die wahren Werthe der Hülfsgrössen aus den Täfelchen des vor. Art. entnehmen können. Ich habe dieses aber nicht ge-

than, sondern alle folgenden Curvenpunkte mit den für Juli 18.1 geltenden Werthen der Hülfsgrössen berechnet. Der Mangel an Genauigkeit in den Curvenpunkten, der dadurch erwachsen ist, ist sehr unbedeutend. Durch das im §. 5 unter *b*) erklärte Verfahren ergaben sich, nach Einverleibung der obigen vier die folgenden

Punkte der westlich-östlichen Grenzcurve.

| $W+\nu$ | $\psi$ | $\frac{1}{15}\tau$ | $\lambda$ | $\varphi$ | $\psi$ | $\frac{1}{15}\tau$ | $\lambda$ | $\varphi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 179°23′ | 270° 0′ | 0ʰ34ᵐ9 | 254°27′ | +15°47′ | | | | |
| 179 21 | 268 | 0 32.9 | 254 56 | 15 48 | 272° 0′ | 0ʰ36ᵐ8 | 253°58′ | +15°48′ |
| 179 18 | 266 | 0 30.9 | 255 24 | 15 51 | 274 | 0 38.8 | 253 27 | 15 52 |
| 179 10 | 264 | 0 28.9 | 255 50 | 15 57 | 276 | 0 40.7 | 252 56 | 15 59 |
| 179 5 | 262 0 | 0 27.0 | 256 16 | 16 3 | 278 | 0 42.7 | 252 24 | 16 4 |
| 178 58 | 260 30 | 0 25.5 | 256 35 | 16 10 | | | | |
| 178 55 | 260 0 | 0 25.1 | 256 40 | 16 13 | 280 | 0 44.7 | 251 50 | 16 16 |
| 178 42 | 258 | 0 23.1 | 257 4 | 16 25 | 282 | 0 46.7 | 251 17 | 16 27 |
| 178 27 | 256 | 0 21.1 | 257 27 | 16 38 | 284 | 0 48.6 | 250 42 | 16 42 |
| 178 11 | 254 | 0 19.3 | 257 48 | 16 53 | 286 | 0 50.5 | 250 7 | 16 57 |
| 177 52 | 252 | 0 17.4 | 258 8 | 17 10 | 288 | 0 52.5 | 249 31 | 17 14 |
| 177 31 | 250 | 0 15.5 | 258 27 | 17 29 | 290 | 0 54.3 | 248 56 | 17 32 |
| 176 29 | 245 | 0 11.1 | 259 8 | 18 26 | 295 | 0 59.0 | 247 21 | 18 31 |
| 175 14 | 240 | 0 6.9 | 259 39 | 19 35 | 300 | 1 3.5 | 245 45 | 19 42 |
| 173 47 | 235 | 0 2.9 | 260 1 | 20 55 | 305 | 1 8.0 | 244 2 | 21 2 |
| 172 8 | 230 | −0 0.7 | 260 12 | 22 26 | 310 | 1 12.3 | 242 17 | 22 33 |
| 170 17 | 225 | −0 3.7 | 260 9 | 24 6 | 315 | 1 16.5 | 240 27 | 24 15 |
| 168 16 | 220 | −0 6.4 | 259 54 | 25 59 | 320 | 1 20.5 | 238 36 | 26 7 |
| 166 4 | 215 | −0 8.5 | 259 24 | 27 59 | 325 | 1 24.5 | 236 35 | 28 9 |
| 163 43 | 210 | −0 10.0 | 258 41 | 30 3 | 330 | 1 28.3 | 234 34 | 30 14 |
| 161 13 | 205 0 | −0 10.9 | 257 38 | 32 21 | 335 | 1 31.9 | 232 25 | 32 33 |
| 159 7 | 201 1 | −0 11.1 | 256 35 | 34 16 | | | | |
| 158 34 | 200 0 | −0 11.1 | 256 17 | 34 45 | 340 | 1 35.5 | 230 7 | 34 57 |
| 155 46 | 195 | −0 10.6 | 254 35 | 37 16 | 345 | 1 39.0 | 227 42 | 37 29 |
| 152 51 | 190 | −0 9.3 | 252 31 | 39 50 | 350 | 1 42.5 | 225 6 | 40 2 |
| 149 49 | 185 | −0 7.1 | 250 3 | 42 30 | 355 | 1 45.7 | 222 20 | 42 44 |
| 146 39 | 180 | −0 4.4 | 247 8 | 45 14 | 0 | 1 49.0 | 219 18 | 45 26 |
| 143 22 | 175 | −0 0.7 | 243 41 | 48 1 | 5 | 1 52.3 | 215 57 | 48 14 |
| 139 57 | 170 | +0 3.9 | 239 36 | 50 50 | 10 | 1 55.6 | 212 11 | 51 5 |
| 136 25 | 165 | 0 9.3 | 234 50 | 53 41 | 15 | 1 58.9 | 207 55 | 53 55 |
| 132 46 | 160 | 0 15.5 | 229 13 | 56 29 | 20 | 2 2.1 | 203 2 | 56 42 |
| 128 58 | 155 | 0 22.7 | 222 32 | 59 15 | 25 | 2 5.5 | 197 15 | 59 28 |
| 125 11 | 150 0 | 0 30.6 | 214 54 | 61 48 | 30 0 | 2 8.6 | 190 44 | 62 0 |
| 122 0 | 146 24 | 0 37.3 | 207 41 | 63 43 | 33 36 | 2 11.9 | 184 21 | 63 56 |
| 118 | 141 50 | 0 46.4 | 197 24 | 65 47 | 38 10 | 2 15.5 | 175 19 | 65 57 |
| 114 | 137 34 | 0 55.7 | 185 50 | 67 22 | 42 26 | 2 19.5 | 165 2 | 67 30 |
| 113 | 136 33 | 0 58.1 | 182 46 | 67 40 | 43 27 | 2 20.5 | 162 17 | 67 48 |
| 112 | 135 33 | 1 0.5 | 179 36 | 67 56 | 44 27 | 2 21.5 | 159 27 | 68 4 |
| 111 | 134 34 | 1 2.9 | 176 24 | 68 10 | 45 26 | 2 22.5 | 156 34 | 68 17 |
| 110 | 133 40 | 1 5.3 | 173 11 | 68 21 | 46 20 | 2 23.6 | 153 39 | 68 27 |
| 109 | 132 46 | 1 7.7 | 169 53 | 68 29 | 47 14 | 2 24.7 | 150 40 | 68 36 |
| 108 | 131 54 | 1 10.1 | 166 35 | 68 35 | 48 6 | 2 25.8 | 147 40 | 68 41 |
| 107 0 | 131 3 | 1 12.5 | 163 15 | 68 38 | 48 57 | 2 26.9 | 144 38 | 68 44 |

| 106°30′ | 130°29′ | $1^h 13^m.6$ | 161°36′ | +68°39′ | 49°21′ | $2^h 27.5$ | 143° 7′ | +68°45′ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 106 0 | 130 15 | 1 14.8 | 159 56 | 68 39 | 49 45 | 2 28.1 | 141 37 | 68 44 |
| 105 | 129 29 | 1 17.1 | 156 37 | 68 36 | 50 31 | 2 29.3 | 138 33 | 68 41 |
| 104 | 128 44 | 1 19.5 | 153 18 | 68 32 | 51 16 | 2 30.5 | 135 32 | 68 36 |
| 103 | 128 2 | 1 21.9 | 150 1 | 68 24 | 51 58 | 2 31.7 | 132 31 | 68 28 |
| 102 | 127 21 | 1 24.2 | 146 47 | 68 13 | 52 39 | 2 33.0 | 129 33 | 68 17 |
| 98 | 125 10 | 1 33.1 | 134 26 | 67 7 | 54 50 | 2 38.5 | 118 3 | 67 11 |
| 94 | 123 49 | 1 41.7 | 123 16 | 65 28 | 56 11 | 2 44.7 | 107 29 | 65 28 |
| 90 | 123 20 | 1 49.4 | 113 33 | 63 20 | 56 40 | 2 51.7 | 97 58 | 63 20 |
| 86 | 123 49 | 1 56.3 | 105 11 | 60 49 | 56 11 | 2 59.5 | 89 25 | 60 48 |
| 82 | 125 10 | 2 2.5 | 98 0 | 58 1 | 54 50 | 3 7.9 | 81 43 | 57 59 |
| 78 | 127 21 | 2 8.1 | 91 50 | 55 0 | 52 39 | 3 16.9 | 74 44 | 54 57 |
| 74 | 130 15 | 2 13.0 | 86 32 | 51 51 | 49 45 | 3 26.3 | 68 21 | 51 48 |
| 70 | 133 40 | 2 17.5 | 81 53 | 48 33 | 46 20 | 3 35.8 | 62 27 | 48 30 |
| 66 | 137 34 | 2 21.5 | 77 46 | 45 10 | 42 26 | 3 45.3 | 57 1 | 45 2 |
| 62 | 141 50 | 2 25.5 | 74 3 | 42 21 | 38 10 | 3 54.7 | 51 58 | 41 36 |
| 58 0 | 146 24 | 2 29.2 | 70 38 | 38 10 | 33 36 | 4 3.7 | 47 18 | 38 4 |
| 54 49 | 150 0 | 2 32.2 | 68 7 | 35 18 | 30 0 | 4 10.5 | 43 50 | 35 10 |
| 51 2 | 155 | 2 34.5 | 65 20 | 31 54 | 25 | 4 18.3 | 39 57 | 31 45 |
| 47 14 | 160 | 2 38.8 | 62 40 | 28 27 | 20 | 4 25.5 | 36 21 | 28 19 |
| 43 35 | 165 | 2 42.1 | 60 11 | 25 6 | 15 | 4 31.7 | 33 19 | 24 56 |
| 40 3 | 170 | 2 45.3 | 57 52 | 21 50 | 10 | 4 37.1 | 30 19 | 21 42 |
| 36 38 | 175 | 2 48.7 | 55 38 | 18 40 | 5 | 4 41.7 | 27 48 | 18 31 |
| 32 21 | 180 | 2 51.9 | 53 33 | 15 28 | 0 | 4 45.3 | 25 36 | 15 28 |
| 30 11 | 185 | 2 55.1 | 51 32 | 12 40 | 355 | 4 48.2 | 23 42 | 12 30 |
| 27 9 | 190 | 2 58.5 | 49 34 | 9 54 | 350 | 4 50.3 | 22 3 | 9 41 |
| 24 14 | 195 | 3 1.9 | 47 39 | 7 7 | 345 | 4 51.1 | 20 47 | 6 56 |
| 21 26 | 200 | 3 5.3 | 45 46 | 4 30 | 340 0 | 4 52.0 | 19 32 | 4 20 |
| 20 57 | | | | | 339 5 | 4 52.0 | 19 22 | 3 52 |
| 18 47 | 205 | 3 8.9 | 43 55 | + 2 0 | 335 0 | 4 51.7 | 18 39 | + 1 50 |
| 16 17 | 210 | 3 12.6 | 42 7 | − 0 20 | 330 | 4 50.9 | 17 57 | − 0 29 |
| 13 56 | 215 | 3 16.3 | 40 21 | 2 33 | 325 | 4 49.3 | 17 29 | 2 42 |
| 11 44 | 220 | 3 20.3 | 38 35 | 4 36 | 320 | 4 47.1 | 17 14 | 4 45 |
| 9 43 | 225 | 3 24.3 | 36 52 | 6 29 | 315 | 4 44.5 | 17 9 | 6 37 |
| 7 52 | 230 | 3 28.5 | 35 9 | 8 14 | 310 | 4 41.4 | 17 14 | 8 21 |
| 6 13 | 235 | 3 32.7 | 33 30 | 9 47 | 305 | 4 37.8 | 17 31 | 9 53 |
| 4 46 | 240 | 3 37.1 | 31 52 | 11 8 | 300 | 4 33.9 | 17 55 | 11 14 |
| 3 31 | 245 | 3 41.7 | 30 16 | 12 18 | 295 | 4 29.7 | 18 30 | 12 23 |
| 2 29 | 250 | 3 46.4 | 28 44 | 13 18 | 290 | 4 25.2 | 19 12 | 13 21 |
| 2 8 | 252 | 3 48.3 | 28 8 | 13 37 | 288 | 4 23.3 | 19 32 | 13 41 |
| 1 49 | 254 | 3 50.1 | 27 33 | 13 54 | 286 | 4 21.5 | 19 52 | 13 58 |
| 1 33 | 256 | 3 52.1 | 26 59 | 14 10 | 284 | 4 19.5 | 20 14 | 14 13 |
| 1 18 | 258 | 3 54.1 | 26 24 | 14 24 | 282 | 4 17.7 | 20 36 | 14 27 |
| 1 5 | 260 | 3 56.0 | 25 51 | 14 36 | 280 0 | 4 15.7 | 21 1 | 14 38 |
| 1 2 | | | | | 279 23 | 4 15.1 | 21 7 | 14 41 |
| 0 55 | 262 | 3 57.9 | 25 18 | 14 46 | 280 0 | 4 13.7 | 21 25 | 14 47 |
| 0 50 | 264 | 3 59.9 | 24 46 | 14 52 | 276 | 4 11.8 | 21 51 | 14 54 |
| 0 42 | 266 | 4 1.9 | 24 14 | 14 58 | 274 | 4 9.8 | 22 17 | 14 59 |
| 0 39 | 268 | 4 3.9 | 23 44 | 15 1 | 272 0 | 4 7.7 | 22 47 | −15 1 |
| 0 37 | 270 0 | 4 5.9 | 23 14 | −15 3 | | | | |

Es braucht wohl kaum angegeben zu werden, dass die hier und im Folgenden angegebenen Längen östliche von Greenwich sind.

Durch Interpolation findet man aus dem vorstehenden Verzeichniss von Curvenpunkten die Lage des doppelten Punkts wie folgt:

$$\lambda = 152^\circ 34' \ , \ \varphi = +\, 68^\circ 30'$$

und die Punkte in welchen die Curve den äussersten Parallelkreis berührt sind

$$\lambda = 161^\circ 36' \ , \ \varphi = 68^\circ 39'$$

und $$\lambda = 143 \ \ 7 \ , \ \varphi = 68 \ 45$$

Da hier $\gamma$ und $\delta'$ dasselbe Zeichen haben, so sieht der Beobachter auf der Fläche der dreieckigen Figur, die durch die vorstehenden Punkte bezeichnet ist, zwar Anfang und Ende dieser Finsterniss, der Verlauf derselben ist aber durch den Horizont unterbrochen. Die Sonne geht zum Theil verfinstert unter, und am andern Morgen noch zum Theil verfinstert auf.

## 122.

Von der Curve der grössten Phase im Horizont, welche die Endpunkte aller südlichen und nördlichen Grenzcurven bildet, habe ich nach dem Verfahren des Abschnittes *e*) des §. 5 eine Reihe von Punkten berechnet, und diesen die Endpunkte der berechneten südlichen und nördlichen Grenzcurven, die weiter unten angegeben werden sollen, in der folgenden Tafel beigefügt.

| $W+\nu$ | $\psi$ | $\frac{1}{15}\tau$ | $\lambda$ | $\varphi$ | Gr. d. Ph. |
|---|---|---|---|---|---|
| 178°58′ | 260°30′ | $0^h 25^m 5$ | 256°35′ | +16°10′ | 0 |
| 175 0 | 260 44 | 0 27.3 | 254 32 | 19 51 | 1.58 |
| 171 28 | 260 49 | 0 29.1 | 252 37 | 23 6 | 3.00 |
| 170 0 | 260 57 | 0 30.1 | 251 44 | 24 27 | 3.58 |
| 163 50 | 261 17 | 0 34.7 | 247 48 | 30 7 | 6.00 |
| 160 0 | 261 27 | 0 38.0 | 245 5 | 33 35 | 7.46 |
| 155 51 | 261 54 | 0 42.1 | 241 50 | 37 20 | 9.00 |
| 150 0 | 262 22 | 0 48.3 | 236 43 | 42 32 | 11.09 |
| 147 19 | 262 42 | 0 51.5 | 234 6 | 44 52 | 12.00 |
| 146 39 | 262 42<br>82 42 | 0 52.3 | 233 26<br>233 0 | 45 26<br>45 15 | —<br>— |
| 145 58 | 82 41 | 0 53.1 | 232 18 | 45 50 | 12.00 |
| 140 0 | 83 22 | 1 0.7 | 225 29 | 50 49 | 10.10 |
| 136 18 | 83 45 | 1 5.8 | 220 37 | 53 48 | 9.00 |
| 130 0 | 84 32 | 1 14.9 | 210 57 | 58 33 | 7.29 |
| 124 36 | 85 13 | 1 23.0 | 200 51 | 62 11 | 6.00 |
| 120 0 | 85 47 | 1 30.2 | 190 37 | +64 49 | 5.03 |

| 114°15′ | 86°35′ | 1ʰ39ᵐ5 | 175°31′ | +67°17′ | 4.00 |
|---|---|---|---|---|---|
| 110 0 | 87 9 | 1 46.5 | 162 53 | 68 21 | 3.37 |
| 109 0 | 87 17 | 1 48.1 | 159 46 | 68 28 | 3.24 |
| 108 0 | 87 26 | 1 49.8 | 156 39 | 68 34 | 3.12 |
| 107 0 | 87 34 | 1 51.5 | 153 30 | 68 38 | 3.00 |
| 106 30 | 87 38 | 1 52.3 | 151 55 | 68 38 | 2.94 |
| 106 0 | 87 42 | 1 53.1 | 150 21 | 68 38 | 2.89 |
| 105 0 | 87 51 | 1 54.9 | 147 11 | 68 35 | 2.78 |
| 100 0 | 88 34 | 2 3.4 | 131 49 | 67 43 | 2.35 |
| 90 0 | 90 0 | 2 20.5 | 105 48 | 63 18 | 2.01 |
| 80 0 | 91 26 | 2 37.7 | 86 49 | 56 29 | 2.35 |
| 70 0 | 92 50 | 2 54.6 | 72 46 | 48 29 | 3.37 |
| 65 45 | 93 24 | 3 1.6 | 67 46 | 44 52 | 4.00 |
| 60 0 | 94 11 | 3 10.9 | 61 40 | 39 50 | 5.03 |
| 55 24 | 94 45 | 3 18.1 | 57 15 | 35 43 | 6.00 |
| 50 0 | 95 26 | 3 26.2 | 52 26 | 30 50 | 7.29 |
| 43 42 | 96 12 | 3 35.2 | 47 18 | 25 4 | 9.00 |
| 40 0 | 96 34 | 3 40.2 | 44 29 | 21 39 | 10.10 |
| 34 2 | 97 15 | 3 47.8 | 40 13 | 16 7 | 12.00 |
| 33 21 | 97 14 | 3 48.6 | 39 45 | 15 29 | — |
| | 277 14 | | 39 25 | 15 37 | — |
| 32 41 | 277 13 | 3 49.4 | 38 58 | 14 59 | 12.00 |
| 30 0 | 277 33 | 3 52.5 | 37 11 | 12 28 | 11.09 |
| 24 9 | 278 0 | 3 58.8 | 33 31 | 6 59 | 9.00 |
| 20 0 | 278 21 | 4 2.9 | 31 2 | + 3 6 | 7.46 |
| 16 10 | 278 37 | 4 6.1 | 28 53 | − 0 31 | 6.00 |
| 10 0 | 278 56 | 4 10.7 | 25 33 | 6 18 | 3.58 |
| 8 32 | 279 4 | 4 11.5 | 24 48 | 7 41 | 3.00 |
| 5 0 | 279 9 | 4 13.5 | 23 2 | 10 58 | 1.58 |
| 1 2 | 279 23 | 4 15.1 | 21 7 | −14 41 | 0. |

## 123.

Von den nördlichen und südlichen Grenzcurven habe ich nicht blos die, welche den Ränderberührungen entsprechen, berechnet, sondern auch die nördlichen für 2, 4, 6 und 9 Zoll, und die südlichen für 9, 6 und 3 Zoll grösste Phase. Es trifft sich bei dieser Sonnenfinsterniss, dass für die Phase von 2 Zoll die nördliche Grenzcurve so nahe ein Punkt wird, dass man sie dafür ansehen kann. Es zeigt sich dieses schon aus der Tafel des vor. Art., zufolge welcher $W + \nu = 90^0$ einer grössten Phase von 2,01 Zoll entspricht. Die Hülfsgrössen, die zufolge des Abschnittes *a*) des §. 5 bei der Berechnung dieser Curven angewandt worden sind, haben die folgenden Werthe.

| | $G$ | $\log\sin g$ | $\log\alpha$ | $u'$ | $\sin f$ |
|---|---|---|---|---|---|
| nördl. | | | | | |
| 4 Zoll | 129°40'3 | 9.64699 | 9.95098 | 0.36155 | +0.001541 |
| 6 „ | 129 33' | 9.6481 | 9.9507 | 0.2736 | +0.000011 |
| 9 „ | 129 22 | 9.6497 | 9.9503 | 0.1417 | —0.002284 |
| 12 „ | 129 12 | 9.6513 | 9.9499 | 0.00979 | —0.004579 |
| südl. | | | | | |
| 12 Zoll | 129 54 | 9.6449 | 9.9515 | 0.00979 | —0.004579 |
| 9 „ | 129 44 | 9.6465 | 9.9511 | 0.1417 | —0.002284 |
| 6 „ | 129 33 | 9.6481 | 9.9507 | 0.2736 | +0.000011 |
| 3 „ | 129 22 | 9.6497 | 9.9503 | 0.4055 | +0.002306 |
| 0 „ | 129 12 | 9.6513 | 9.9499 | 0.5374 | +0.004601 |

und für alle diese Curven ist

$$K = 96^\circ 2'$$
$$\log\sin k = 9.9843$$
$$\log\beta = 0,8423n$$

Nördliche Grenzcurve für die Phase von 4 Zoll.

| $t$ | $\psi$ | $\frac{1}{15}\tau$ | $\lambda$ | $\varphi$ |
|---|---|---|---|---|
| 200°23' | 86°35' | 1ʰ39ᵐ5 | 175°31' | +67°17' |
| 202 54 | 86 52 | 1 39.5 | 178 2 | 70 4 |
| 205 10 | 87 13 | 1 40.2 | 180 7 | 73 3 |
| 206 51 | 87 37 | 1 41.6 | 181 27 | 76 3 |
| 207 35 | 88 5 | 1 43.5 | 181 42 | 79 2 |
| 206 18 | 88 35 | 1 46.2 | 179 45 | 82 2 |
| 199 22 | 89 9 | 1 49.4 | 172 1 | 85 1 |
| 190 0 | 89 27 | 1 51.1 | 162 13 | 86 21 |
| 180 | 89 37 | 1 52.3 | 151 56 | 87 2 |
| 170 | 89 45 | 1 53.1 | 141 44 | 87 25 |
| 160 | 89 50 | 1 53.5 | 131 38 | 87 38 |
| 150 | 89 55 | 1 54.1 | 121 28 | 87 45 |
| 140 | 90 0 | 1 54.7 | 111 19 | 87 47 |
| 130 | 90 5 | 1 55.3 | 101 10 | 87 44 |
| 120 | 90 10 | 1 55.8 | 91 2 | 87 37 |
| 110 | 90 16 | 1 56.6 | 80 51 | 87 23 |
| 100 | 90 24 | 1 57.3 | 70 39 | 87 0 |
| 90 | 90 35 | 1 58 8 | 60 18 | 86 17 |
| 85 | 90 44 | 1 59.8 | 55 3 | 85 41 |
| 80 0 | 90 57 | 2 1.5 | 49 38 | 84 42 |
| 77 50 | 91 6 | 2 2.5 | 47 12 | 84 1 |
| 73 35 | 91 42 | 2 7.5 | 41 43 | 81 2 |
| 73 10 | 92 17 | 2 12.5 | 40 3 | 78 2 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 74°15' | 92°49' | $2^h17^m5$ | 39°52' | 75° 3' |
| 76 8 | 93 19 | 2 22.9 | 40 25 | 72 3 |
| 78 32 | 93 45 | 2 28.1 | 41 30 | 69 4 |
| 81 18 | 94 7 | 2 33.6 | 42 54 | 66 4 |
| 84 25 | 94 23 | 2 38.9 | 44 42 | 63 5 |
| 85 0 | 94 25 | 2 39.8 | 45 3 | 62 32 |
| 90 | 94 37 | 2 46.9 | 48 16 | 58 20 |
| 95 | 94 35 | 2 52.5 | 51 52 | 54 40 |
| 100 | 94 23 | 2 56.9 | 55 47 | 51 25 |
| 105 | 94 3 | 2 59.9 | 60 1 | 48 36 |
| 111 0 | 93 36 | 3 1.3 | 64 40 | 46 11 |
| 113 10 | 93 24 | 3 1.6 | 67 46 | +44 52 |

Nördliche Grenzcurve für die Phase von 6 Zoll.

| $t$ | $\psi$ | $\frac{1}{15}\tau$ | $\lambda$ | $\varphi$ |
|---|---|---|---|---|
| 221°36' | 85°13' | $1^h23^m0$ | 200°51' | +62°11' |
| 230 0 | 85 52 | 1 24.2 | 208 57 | 66 44 |
| 240 | 86 29 | 1 25.9 | 218 32 | 71 16 |
| 260 | 87 45 | 1 31.8 | 237 3 | 77 12 |
| 280 | 88 40 | 1 36.9 | 255 46 | 80 13 |
| 300 | 89 22 | 1 41.1 | 274 44 | 81 36 |
| 320 | 89 59 | 1 44.9 | 293 47 | 82 1 |
| 340 | 90 37 | 1 48.9 | 312 46 | 81 38 |
| 0 | 91 22 | 1 54.1 | 331 29 | 80 18 |
| 20 | 92 25 | 2 1.8 | 349 33 | 77 23 |
| 40 | 94 4 | 2 15.1 | 6 13 | 71 35 |
| 60 | 96 2 | 2 37.1 | 20 44 | 61 42 |
| 80 | 96 44 | 3 2.1 | 34 29 | 49 26 |
| 100 0 | 95 25 | 3 16.9 | 50 47 | 38 35 |
| 106 46 | 94 45 | 3 18.1 | 57 15 | +35 43 |

Nördliche Grenzcurve für die Phase von 9 Zoll.

| $t$ | $\psi$ | $\frac{1}{15}\tau$ | $\lambda$ | $\varphi$ |
|---|---|---|---|---|
| 237°4' | 83°45' | $1^h 5^m8$ | 220°37' | +53°48' |
| 240 0 | 83 59 | 1 5.8 | 223 33 | 55 6 |
| 260 | 85 20 | 1 9.8 | 242 32 | 62 31 |
| 280 | 86 52 | 1 17.5 | 260 38 | 67 9 |
| 300 | 88 24 | 1 25.9 | 278 31 | 69 37 |
| 320 | 89 57 | 1 35.1 | 296 14 | 70 25 |
| 340 | 91 36 | 1 45.3 | 313 40 | 69 43 |
| 0 | 93 28 | 1 57.9 | 330 32 | 67 22 |
| 20 | 95 39 | 2 14.6 | 346 21 | 62 52 |
| 40 | 97 54 | 2 36.9 | 0 47 | 55 36 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 60° | 99°14′ | 3ʰ 3ᵐ.1 | 14°13′ | 45°42′ |
| 80 | 98 35 | 3 25.7 | 28 35 | 34 51 |
| 100 0′ | 96 13 | 3 35.1 | 46 13 | 25 30 |
| 101 6 | 96 12 | 3 35.2 | 47 18 | +25 4 |

Nördliche Grenzcurve für die inneren Ränderberührungen (12 Zoll).

| $t$ | $\psi$ | $\frac{1}{15}\tau$ | $\lambda$ | $\varphi$ |
|---|---|---|---|---|
| 245°35′ | 82°41′ | 0ʰ53ᵐ.1 | 232°18 | +45°50′ |
| 250 0 | 83 0 | 0 53.3 | 236 41 | 47 33 |
| 260 | 83 40 | 0 55.1 | 246 14 | 51 15 |
| 270 | 84 40 | 0 58.7 | 255 20 | 54 17 |
| 280 | 85 27 | 1 3.3 | 264 10 | 56 40 |
| 290 | 86 28 | 1 8.7 | 272 50 | 58 27 |
| 300 | 87 33 | 1 14.7 | 281 19 | 59 42 |
| 310 | 88 42 | 1 21.3 | 289 41 | 60 26 |
| 320 | 89 54 | 1 28.3 | 297 56 | 60 43 |
| 330 | 91 10 | 1 35.7 | 306 4 | 60 31 |
| 340 | 92 30 | 1 43.9 | 314 1 | 59 51 |
| 350 | 93 54 | 1 52.9 | 321 47 | 58 41 |
| 0 | 95 22 | 2 2.8 | 329 18 | 56 59 |
| 10 | 96 51 | 2 13.9 | 336 32 | 54 41 |
| 20 | 98 18 | 2 26.1 | 343 28 | 51 47 |
| 30 | 99 37 | 2 39.5 | 350 8 | 48 11 |
| 40 | 100 39 | 2 53.7 | 356 34 | 43 57 |
| 50 | 101 14 | 3 8.3 | 2 56 | 39 10 |
| 60 | 101 15 | 3 21.9 | 9 32 | 34 0 |
| 70 | 100 41 | 3 33.5 | 16 37 | 28 44 |
| 80 | 99 39 | 3 42.1 | 24 28 | 23 38 |
| 90 0 | 98 15 | 3 47.0 | 33 15 | 18 58 |
| 97 10 | 97 15 | 3 37.8 | 40 13 | +16 7 |

Curve der centralen Finsterniss.

| $t$ | $\frac{1}{15}\tau$ | $\lambda$ | $\varphi$ | Dauer d. Tot. |
|---|---|---|---|---|
| 246°18′ | 0ʰ52′.3 | 233°13′ | +45°20′ | 1ᵐ53ˢ |
| 250 0 | 0 52.5 | 236 53 | 46 51 | 1 57 |
| 260 | 0 54.2 | 246 27 | 50 31 | 2 10 |
| 270 | 0 57.7 | 255 35 | 53 32 | 2 24 |
| 280 | 1 2.4 | 264 24 | 55 54 | 2 37 |
| 290 | 1 7.9 | 273 2 | 57 41 | 2 49 |
| 300 | 1 13.9 | 281 31 | 58 56 | 3 0 |
| 310 | 1 20.5 | 289 52 | 59 39 | 3 10 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 320° | 1h27'.7 | 298° 4' | +59°55' | 3m20s |
| 330 | 1 35.5 | 306 8 | 59 42 | 3 28 |
| 340 | 1 43.9 | 314 2 | 59 1 | 3 36 |
| 350 | 1 53.1 | 321 44 | 57 49 | 3 42 |
| 0 | 2 3.3 | 329 11 | 56 5 | 3 47 |
| 10 | 2 14.6 | 336 21 | 53 46 | 3 49 |
| 20 | 2 27.1 | 343 13 | 50 49 | 3 48 |
| 30 | 2 40.7 | 349 49 | 47 13 | 3 43 |
| 40 | 2 55.1 | 356 13 | 42 59 | 3 34 |
| 50 | 3 9.7 | 2 35 | 38 13 | 3 20 |
| 60 | 3 23.2 | 9 12 | 33 6 | 3 2 |
| 70 | 3 34.7 | 16 19 | 27 54 | 2 43 |
| 80 | 3 43.2 | 24 12 | 22 53 | 2 22 |
| 90 0' | 3 47.8 | 33 3 | 18 17 | 2 4 |
| 96 44 | 3 48.6 | 39 35 | +15 33 | 1 53 |

Südliche Grenzcurve für die inneren Ränderberührungen (12 Zoll).

| $t$ | $\psi$ | $\frac{1}{15}\tau$ | $\lambda$ | $\varphi$ |
|---|---|---|---|---|
| 246°59' | 262°42' | 0h51m5 | 234° 6' | +44°52' |
| 250 0 | 262 58 | 0 51.7 | 237 5 | 46 10 |
| 260 | 263 37 | 0 53.3 | 246 40 | 49 47 |
| 270 | 264 26 | 0 56.7 | 255 49 | 52 47 |
| 280 | 265 23 | 1 1.5 | 264 38 | 55 8 |
| 290 | 266 26 | 1 7.0 | 273 15 | 56 55 |
| 300 | 267 33 | 1 13.2 | 281 42 | 58 10 |
| 310 | 268 44 | 1 19.9 | 290 1 | 58 53 |
| 320 | 269 59 | 1 27.3 | 298 11 | 59 6 |
| 330 | 271 19 | 1 35.1 | 306 13 | 58 53 |
| 340 | 272 43 | 1 43.8 | 314 3 | 58 11 |
| 350 | 274 11 | 1 53.3 | 321 41 | 56 57 |
| 0 | 275 42 | 2 3.7 | 329 4 | 55 11 |
| 10 | 277 14 | 2 15.3 | 336 10 | 52 51 |
| 20 | 278 42 | 2 28.1 | 342 58 | 49 52 |
| 30 | 279 59 | 2 41.9 | 349 31 | 46 15 |
| 40 | 280 57 | 2 56.5 | 355 53 | 42 1 |
| 50 | 281 25 | 3 11.0 | 2 15 | 37 17 |
| 60 | 281 19 | 3 24.5 | 8 53 | 32 12 |
| 70 | 280 40 | 3 35.9 | 16 1 | 27 5 |
| 80 | 279 27 | 3 44.2 | 23 57 | 22 8 |
| 90 0 | 278 6 | 3 48.6 | 32 51 | 17 36 |
| 96 19 | 277 13 | 3 49.4 | 38 58 | +14 59 |

Südliche Grenzcurve für die Phase von 9 Zoll.

| $t$ | $\psi$ | $\frac{1}{15}\tau$ | $\lambda$ | $\varphi$ |
|---|---|---|---|---|
| 252°21' | 261°54' | $0^h42^m.1$ | 241°50' | +37°20' |
| 260 0 | 262 27 | 0 42.8 | 249 18 | 40 13 |
| 280 | 264 16 | 0 50.9 | 267 17 | 46 5 |
| 300 | 266 49 | 1 4.7 | 283 49 | 49 27 |
| 320 | 269 57 | 1 22.7 | 299 20 | 50 33 |
| 340 | 273 34 | 1 44.1 | 313 58 | 49 30 |
| 0 | 277 25 | 2 9.7 | 327 35 | 46 14 |
| 20 | 280 54 | 2 39.2 | 340 12 | 40 30 |
| 40 | 282 56 | 3 10.7 | 352 17 | 32 21 |
| 60 | 282 35 | 3 39.0 | 5 15 | 22 28 |
| 80 0 | 280 7 | 3 56.1 | 20 59 | 12 35 |
| 93 23 | 278 0 | 3 58.8 | 33 31 | + 6 59 |

Südliche Grenzcurve für die Phase von 6 Zoll.

| $t$ | $\psi$ | $\frac{1}{15}\tau$ | $\lambda$ | $\varphi$ |
|---|---|---|---|---|
| 256°28' | 261°17' | $0^h34^m.7$ | 247°48' | +30° 7' |
| 260 0 | 261 34 | 0 34.9 | 251 16 | 31 27 |
| 280 | 263 20 | 0 42.5 | 269 22 | 37 41 |
| 300 | 266 5 | 0 58.1 | 285 28 | 41 21 |
| 320 | 269 54 | 1 19.3 | 300 11 | 42 34 |
| 340 | 274 21 | 1 45.7 | 313 34 | 41 28 |
| 0 | 278 58 | 2 16.7 | 325 49 | 38 1 |
| 20 | 282 46 | 2 49.9 | 337 31 | 32 3 |
| 40 | 284 26 | 3 23.6 | 349 6 | 23 39 |
| 60 | 283 24 | 3 50.9 | 2 16 | 13 41 |
| 80 0 | 280 23 | 4 5.0 | 18 45 | + 3 54 |
| 90 24 | 278 37 | 4 6.1 | 28 53 | − 0 31 |

Südliche Grenzcurve für die Phase von 3 Zoll.

| $t$ | $\psi$ | $\frac{1}{15}\tau$ | $\lambda$ | $\varphi$ |
|---|---|---|---|---|
| 259°54' | 260°49' | $0^h29^m.1$ | 252°37' | +23° 6' |
| 270 0 | 261 33 | 0 31.1 | 262 14 | 26 35 |
| 280 | 262 35 | 0 36.1 | 270 59 | 29 42 |
| 300 | 265 35 | 0 53.1 | 286 44 | 33 35 |
| 320 | 269 51 | 1 21.7 | 300 35 | 34 54 |
| 340 | 275 3 | 1 48.3 | 312 56 | 33 47 |
| 0 | 280 20 | 2 23.3 | 324 10 | 30 13 |
| 20 | 284 16 | 3 0.4 | 334 54 | 24 5 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 40° | 285°30′ | 3ʰ35ᵐ1 | 346°14′ | 15°27′ |
| 60 | 283 50 | 4 0.7 | 359 50 | + 5 19 |
| 80 0 | 280 27 | 4 11.5 | 17 7 | — 4 26 |
| 87 41 | 279 4 | 4 11.5 | 24 48 | — 7 41 |

Südliche Grenzcurve für die äusseren Ränderberührungen (0 Zoll).

| $t$ | $\psi$ | $\frac{1}{15}\tau$ | $\lambda$ | $\varphi$ |
|---|---|---|---|---|
| 262°57′ | 260°30′ | 0ʰ25ᵐ5 | 256°35′ | +16°10′ |
| 270 0 | 261 0 | 0 26.7 | 263 20 | 18 45 |
| 280 | 261 57 | 0 31.3 | 272 11 | 21 52 |
| 290 | 263 19 | 0 38.9 | 280 16 | 24 17 |
| 300 | 265 4 | 0 49.3 | 287 41 | 25 58 |
| 310 | 267 14 | 1 2.1 | 294 29 | 27 2 |
| 320 | 269 47 | 1 16.9 | 300 47 | 27 24 |
| 330 | 272 38 | 1 33.5 | 306 37 | 27 9 |
| 340 | 275 40 | 1 51.7 | 312 5 | 26 16 |
| 350 | 278 42 | 2 10.9 | 317 16 | 24 47 |
| 0 | 281 30 | 2 30.9 | 322 17 | 22 39 |
| 10 | 283 48 | 2 51.2 | 327 12 | 19 52 |
| 20 | 285 25 | 3 10.5 | 332 22 | 16 21 |
| 30 | 286 13 | 3 28.9 | 337 46 | 12 10 |
| 40 | 286 9 | 3 45.1 | 343 43 | 7 26 |
| 50 | 285 20 | 3 58.6 | 350 21 | + 2 19 |
| 60 | 283 56 | 4 8.3 | 357 55 | — 2 54 |
| 70 | 282 11 | 4 14.0 | 6 30 | 8 0 |
| 80 0 | 280 16 | 4 15.7 | 16 5 | 12 36 |
| 84 54 | 279 23 | 4 15.2 | 21 7 | —14 41 |

Die nördliche Grenzcurve für die Phase von 4 Zoll gewährt hier ein Beispiel des in Art. 33 bemerkten Falles, in welchem der Stundenwinkel $t$ nicht den ganzen Umkreis durchlaufen kann, sondern ein Maximum und ein Minimum hat.

Zwei Abschnitte der oben angegebenen Punkte dieser Curve sind daher nach den Ausdrücken des Art. 36 berechnet worden, während alle übrigen Punkte der vorstehenden Curven nach den Ausdrücken des Art. 33 berechnet worden sind; die Endpunkte ausgenommen, die wie immer durch die des Art. 43 erhalten worden sind. Die südliche Grenzcurve für die äusseren Ränderberührungen giebt ein Beispiel davon, dass auch auf diesen Curven die Zeit des ersten Meridians ein Maximum haben kann, und hieraus folgt dass sie in anderen Fällen ein Minimum

haben kann. Hiedurch erwächst indess keine Aenderung des hier entwickelten Verfahrens.

Die Abplattung übt auf diese Curven, und namentlich auf die, welche dem Pole nahe liegen, eine merkliche Wirkung aus. Wenn man in der obigen nördlichen Grenzcurve für die Phase von 4 Zoll die Abplattung übergehen wollte, so würde man diese Curve um mehr wie 4° unrichtig finden.

## 124.

Ich habe ferner von der westlichen und der östlichen Grenzcurve der inneren Ränderberührungen die folgenden Punkte berechnet:

Westliche Grenzcurve der inneren Ränderberührungen.

| $W+\nu$ | $\psi$ | $\frac{1}{15}\tau$ | $\lambda$ | $\varphi$ | $\psi$ | $\frac{1}{15}\tau$ | $\lambda$ | $\varphi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 145°58′ | 90° 0′ | $0^h53^m.0$ | 232°22′ | +45°50′ | | | | |
| 145 58 | | | | | 82°41′ | $0^h53^m.1$ | 232°18′ | +45°50′ |
| 146 4 | 120 0 | 0 52.3 | 232 46 | 45 49 | 60 0 | 0 53.4 | 232 14 | 45 42 |
| 146 16 | | | | | 33 52 | 0 53.5 | 232 18 | 45 31 |
| 146 18 | 150 0 | 0 51.7 | 233 15 | 45 41 | 30 0 | 0 53.5 | 232 21 | 45 30 |
| 146 39 | 180 0 | 0 51.3 | 233 45 | 45 26 | 0 0 | 0 53.3 | 232 42 | 45 14 |
| 147 0 | 210 0 | 0 51.1 | 234 6 | 45 10 | 330 0 | 0 52.9 | 233 11 | 44 59 |
| 147 1 | 213 7 | 0 51.1 | 234 7 | 45 9 | | | | |
| 147 14 | 240 0 | 0 51.3 | 234 12 | 44 57 | 300 0 | 0 52.3 | 233 40 | 44 50 |
| 147 19 | 262 42 | 0 51.5 | 234 6 | 44 52 | | | | |
| 147 19 | 270 0 | 0 51.7 | 234 2 | 44 51 | | | | |

Oestliche Grenzcurve der inneren Ränderberührungen.

| $W+\nu$ | $\psi$ | $\frac{1}{15}\tau$ | $\lambda$ | $\varphi$ | $\psi$ | $\frac{1}{15}\tau$ | $\lambda$ | $\varphi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 34° 2′ | 90° 0′ | $3^h47^m.9$ | 40° 9′ | +16° 8′ | | | | |
| 34 2 | 97 15 | 3 47.8 | 40 13 | 16 7 | | | | |
| 33 56 | 120 0 | 3 47.5 | 40 18 | 16 0 | 60° 0′ | $3^h48^m.5$ | 39°50′ | +16° 5′ |
| 33 44 | 146 16 | 3 47.4 | 40 17 | 15 48 | | | | |
| 33 42 | 150 0 | 3 47.4 | 40 16 | 15 46 | 30 0 | 3 49.1 | 39 28 | 15 55 |
| 33 21 | 180 0 | 3 47.5 | 40 3 | 15 28 | 0 0 | 3 49.7 | 39 6 | 15 38 |
| 33 0 | 210 0 | 3 48.1 | 39 42 | 15 11 | 330 0 | 3 49.9 | 38 53 | 15 19 |
| 32 59 | | | | | 327 1 | 3 49.9 | 38 52 | 15 18 |
| 32 46 | 240 0 | 3 48.7 | 39 19 | 15 0 | 300 0 | 3 49.7 | 38 51 | 15 5 |
| 32 41 | | | | | 277 13 | 3 49.4 | 38 58 | 14 59 |
| 32 41 | 270 0 | 3 49.3 | 39 1 | 14 59 | | | | |

Unter diesen Punkten befinden sich sowohl die vier Berührungspunkte mit der nördlichen und der südlichen Grenzcurve, wie die vier Berührungspunkte des Vollschattenkegels mit dem Erdkörper. Diese acht Punkte sind leicht von den übrigen zu unterscheiden.

## 125.

Für die Curve der grössten Phase im Mittage und in der Mitternacht sind keine besonderen Rechnungen nöthig gewesen, wenn man die Angaben für den Pol ausnimmt, da in den vorhergehenden eine hinreichende Anzahl von Punkten dieser Curve vorhanden sind, und auch der Endpunkt derselben, welcher in dieser Sonnenfinsterniss auf der Curve der grössten Phase im Horizont liegt, unter den oben angegebenen Punkten dieser Curve sich befindet. Ich will diese Punkte hier zusammen stellen.

| $t$ | $\psi$ | $\frac{1}{15}\tau$ | $\lambda$ | $\varphi$ | Gr. d. Ph. |
|---|---|---|---|---|---|
| 0° | 281°30′ | 2ʰ30ᵐ9 | 322°17′ | +22°39′ | 0. |
| 0 | 280 20 | 2 23.3 | 324 10 | 30 13 | 3. |
| 0 | 278 58 | 2 16.7 | 325 49 | 38 1 | 6. |
| 0 | 277 25 | 2 9.7 | 327 35 | 46 14 | 9. |
| 0 | 275 42 | 2 3.7 | 329 4 | 55 11 | 12. |
| 0 | — | 2 3.3 | 329 11 | 56 5 | central |
| 0 | 95 22 | 2 2.8 | 329 18 | 56 59 | 12. |
| 0 | 93 28 | 1 57.9 | 330 32 | 67 22 | 9. |
| 0 | 91 22 | 1 54.1 | 331 29 | 80 18 | 6. |
| — | 90 0 | 1 52.6 | — | 90 0 | 4.39 |
| 180 | 89 37 | 1 52.3 | 151 56 | 87 2 | 4. |
| 180 | 87 38 | 1 52.3 | 151 55 | +68 38 | 2.94 |

## 126.

Der Punkt der Curve der grössten Phase im Horizont, welcher zu $W + \nu = 90^0$ gehört, ist identisch mit dem Punkt, in welchen in diesem Beispiel die nördliche Grenzcurve für die Phase von 2 Zoll (genauer 2,01 Zoll) übergeht. Da zufolge des §. 6 die westlich-östliche Grenzcurve für diese Phase zwei Doppelpunkte haben muss, so habe ich um diesen Fall auch durch ein Beispiel anschaulich zu machen, die folgenden Punkte dieser Curve, die in der Nähe dieser beiden Doppelpunkte liegen, berechnet.

| $W+\nu$ | $\psi$ | $\frac{1}{15}\tau$ | $\lambda$ | $\varphi$ | $\psi$ | $\frac{1}{15}\tau$ | $\lambda$ | $\varphi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 81° | 76°34′ | 2h48m,1 | 85°27′ | +57°13′ | 103°26′ | 2h26m,1 | 90°56′ | +57°14′ |
| 84 | 81 3 | 2 38.9 | 91 41 | 59 22 | 98 57 | 2 24.2 | 95 22 | 59 24 |
| 87 | 85 30 | 2 29.8 | 98 26 | 61 26 | 94 30 | 2 22.3 | 100 18 | 61 23 |
| 90 | 90 0 | 2 20.5 | 105 48 | 63 18 | 90 0 | 2 20.5 | 105 48 | 63 18 |
| 93 | 94 30 | 2 7.3 | 113 49 | 64 56 | 85 30 | 2 18.7 | 111 58 | 64 56 |
| 96 | 98 57 | 2 2.1 | 122 30 | 66 20 | 81 3 | 2 16.9 | 118 49 | 66 20 |
| 99 | 103 26 | 1 52.9 | 131 56 | 67 27 | 76 34 | 2 15.1 | 126 24 | 67 27 |
| 102 | 107 56 | 1 44.0 | 141 50 | 68 12 | 72 4 | 2 13.2 | 134 32 | 68 13 |
| 105 | 112 26 | 1 35.1 | 152 7 | 68 35 | 67 34 | 2 11.3 | 143 5 | 68 37 |
| 108 | 116 58 | 1 26.5 | 162 29 | 68 34 | 63 2 | 2 9.4 | 151 45 | 68 37 |
| 111 | 121 31 | 1 17.9 | 172 39 | 68 9 | 58 29 | 2 7.5 | 160 18 | 68 13 |
| 114 | 126 8 | 1 9.7 | 182 21 | 67 22 | 53 52 | 2 5.5 | 168 27 | 67 27 |

Der eine Doppelpunkt ist schon aus dem Täfelchen zu erkennen, er liegt bei $W+\nu=90^0$, den anderen gab mir die Interpolation wie folgt,

$$\lambda = 152^0 50'\ ,\quad \varphi = +\,68^0 35'.$$

Herr Professor **Habicht** hat die Güte gehabt die im Vorstehenden berechneten Curven aufzuzeichnen, um ein Bild des Bereichs dieser Sonnenfinsterniss zu geben. Auf der ersten der dieser Abhandlung beigelegten Tafeln sind alle berechneten Grenz- und Phasencurven nebst den Umrissen der Länder und Inseln des Bereichs aufgetragen. Auf der linken Seite der zweiten Tafel ist in einem grösseren Maassstabe der Theil der westlich-östlichen Grenzcurve und der Curve der grössten Phase im Horizont aufgetragen, welcher in der Nähe des Doppelpunkts und der Berührungspunkte mit dem äussersten Parallel liegt. Auf derselben ist $aCDAa'$ ein Theil des äussersten Parallels, $bBEAb'$ und $cCFBc'$ Theile der beiden Zweige der westlich-östlichen Grenzcurve, und $dFDEd'$ ein Theil der Curve der grössten Phase im Horizont. $C$ und $A$ sind die Berührungspunkte der westlich-östlichen Grenzcurve, und $D$ der Berührungspunkt der Curve der grössten Phase im Horizont mit dem äussersten Parallel. Es ist dadurch die dreieckige Figur $ABC$ veranschaulicht, auf welcher zufolge des §. 6 die Finsterniss zu zwei verschiedenen Malen vom Horizont unterbrochen wird. Desgleichen erkennt man durch diese Tafel wie diese Figur von der Curve der grössten Phase im Horizont durchschnitten, und in drei andere dreieckige Figuren zerlegt wird, auf deren mittlerer $FEB$ in diesem Falle die grösste Phase unter dem Horizont, und auf deren zwei äusseren $CDF$ und $DAE$ dieselbe über dem Horizont statt findet.

Auf der rechten Seite der zweiten Tafel ist der im vor. Art. berechnete Theil der westlich-östlichen Grenzcurve für die grösste Phase

von 2,01 Zoll aufgetragen, welcher zwei Doppelpunkte hat. Der Punkt, in welchen sich die nördliche Grenzcurve für diese Phase verwandelt, ist auf der ersten Tafel angemerkt; er ist mit dem einen der beiden Doppelpunkte der eben erwähnten Curve identisch.

127.

Ich habe ferner von der dem Zeitpunkt

$$\tau = 34^0,5199$$

angehörigen Grenzcurve dieser Sonnenfinsterniss durch beide unter §. 5, $h$) entwickelten Verfahrungsarten zwei Punkte berechnet, um die Uebereinstimmung dieser zu zeigen, und mich bei dieser Rechnung Logarithmen von sechs Decimalen bedient. Es ergab sich zuerst durch die Ausdrücke (38)

$$\Sigma = 92^0 14'52'',1 \;,\; \log S = 9.739337$$

$$\text{und hiemit } \Sigma' = +14^0 12'8'',0$$

Nachdem erst $\theta'' = 45^0$ angenommen worden war, für welchen Werth beide Verfahrungsarten in diesem Falle sichere Resultate geben müssen, fand sich durch die Formeln des Art. 59, und $\log \sin f = 7.662871$,

$$u'' = 0.537419$$

$$\alpha'' - \alpha' = +11'58'',6,\; \delta'' - \delta' = +11'11''1,\; \theta - \theta'' = -4'16'',9$$

woraus

$$\delta'' = +21^0 7'58'',9 \;,\; \theta = 44^0 55'43'',1$$

folgt. Durch die Gleichungen (43) fand sich hierauf

$$\begin{array}{llll} D'' = & +21^0 11'50'',8 & , & \log d'' = 9,998739 \\ V = & 44^0 59'58'',8 & , & \log \nu = 9.999997 \\ V' = & 45\;\;0\;\;1,2 & , & \log \nu' = 9.999997 \\ \Sigma'' = & 14^0 16'23'',7 & , & \Sigma_1'' = 14^0 16'26'',1 \end{array}$$

woraus aus den (44)

$$K'' = 301^0 52'31'',9 \text{ und } H'' = 73^0 15'0'',7$$

und aus den betr. Ausdrücken des Art. 59

$$\varphi_1 = +29^0 13'5'',0 \text{ und } \lambda = 309^0 23'41'',3$$

folgte. Um denselben Curvenpunkt auch durch das Verfahren des Art. 55 berechnen zu können, muss man wenigstens den Werth von $H$ kennen, der demselben angehört. Es wurde aber um die Vergleichung abzukürzen nicht blos $H$ sondern auch $K$ durch die folgenden Ausdrücke

$$tg\,R = \frac{tg\,\varphi_1}{\cos(t+\Delta\alpha')}$$
$$tg\,K = \frac{\cos R\, tg\,(t+\Delta\alpha')}{\sin(R-D)}$$
$$tg\,H = cotg\,(R-D)\cos K$$

berechnet, die den Ausdrücken des Art. 41 analog sind. Nachdem mit

$$\delta' = +\,20^0 56' 47'',8$$

aus den (24)

$$D = +\,21^0 0' 38'',1\ ,\ \log d = 9.998736$$

gefunden worden war, gaben die vorstehenden Ausdrücke mit den oben gefundenen Werthen von $\varphi_1$ und $\lambda$, und mit $\Delta\alpha' = +\,1'',2$

$$K = 302^0 39' 39'',4\ ,\ H = 73^0 18' 28'',4$$

Aus $K$ wurde noch

$$L = 302^0 35' 6'',6\ ,\ \log l = 9.999633$$

berechnet, und es konnte nun der Ausdruck (41) zu einer anderweitigen Berechnung von $L$ angewandt werden. Ich fand dadurch

$$L = 302^0 35' 8'',0$$

vom vorher berechneten Werthe nur $1'',4$ abweichend. Diese kleine Abweichung kann sehr wohl zum grössten Theil in den kleinen Uebergehungen ihre Ursache haben, die in dem Verfahren des Art. 55 vorgenommen worden sind.

Als zweites Beispiel sei $\theta'' = 95^0$, hiemit und mit den obigen anderen Daten bekam ich auf dieselbe Art wie im ersten Beispiel,

$$\alpha'' - \alpha' = +\,16'52'',3\ ;\ \delta'' - \delta' = -\,1'22'',7\ ;\ \theta - \theta'' = -\,6'1'',9$$
$$\delta'' = +\,20^0 55' 25'',1\ ;\ \theta = 94^0 53' 58'',1$$
$$D'' = +\,20\ \ 59\ 14.9\ ;\ \log d'' = 9.998736$$
$$V = \ \ 95\ \ 0\ \ 0.2\ ;\ \log \nu = 9.999995$$
$$V' = \ \ 94\ \ 59\ 59.8\ ;\ \log \nu' = 0.000000$$
$$\Sigma'' = \ \ 14\ \ 18\ 10.1\ ;\ \Sigma_1'' = 14^0 18'\ 9'',7$$
$$K'' = \ \ 325\ \ 25\ 47.4\ ;\ H'' = 45\ \ 11\ 59.5$$
$$\varphi_1 = +\,52\ \ 44\ 14.8\ ;\ \lambda = 284\ \ 26\ \ 4.5$$

Zur Vergleichung mit der ersten Auflösung wurden hieraus noch berechnet

$$K = 325^0 32'\ 3'',5\ ;\ H = 45^0 22' 3'',6$$
$$L = 325\ 27\ 23.1\ ;\ \log l = 9.999142$$

mit welchem Werthe von $H$ der Ausdruck (41)

$$L = 325^0 27' 23'',4$$

gab, vom vorstehenden Werthe nur $0'',4$ abweichend.

### Zusatz zu Art. 17.

Da ich während des Druckes dieser Abhandlung bemerkt habe, dass in dem Art. 17 eine Schlussfolgerung ausgelassen worden ist, und dadurch das Verständniss desselben erschwert werden kann, so will ich diese nachholen.

Wenden wir dieselbe Bezeichnung an wie dort, mit der Ausnahme dass wir $\tau'$ statt $\theta'$ setzen, so ist für je zwei Punkte der Curve des Lichtstrahls

$$(1+a')\sin\tau'\sqrt{1+\mu d'} = (1+a)\sin\theta\sqrt{1+\mu d}$$

Verlängern wir nun die Tangente am ersten Curvenpunkt bis dass sie den zum zweiten Punkt gehörigen Erdradius schneidet, nennen den Winkel den diese beiden Linien mit einander machen $\theta'$, und die Entfernung dieses Durchschnittspunkts von dem Mittelpunkt der Erde $\varrho(1+x)$, so giebt das ebene Dreieck zwischen dieser Tangente und den beiden Halbmessern der (hier als kugelförmig betrachteten) Erde

$$1+a' = \frac{\sin\theta'}{\sin\tau'}(1+x)$$

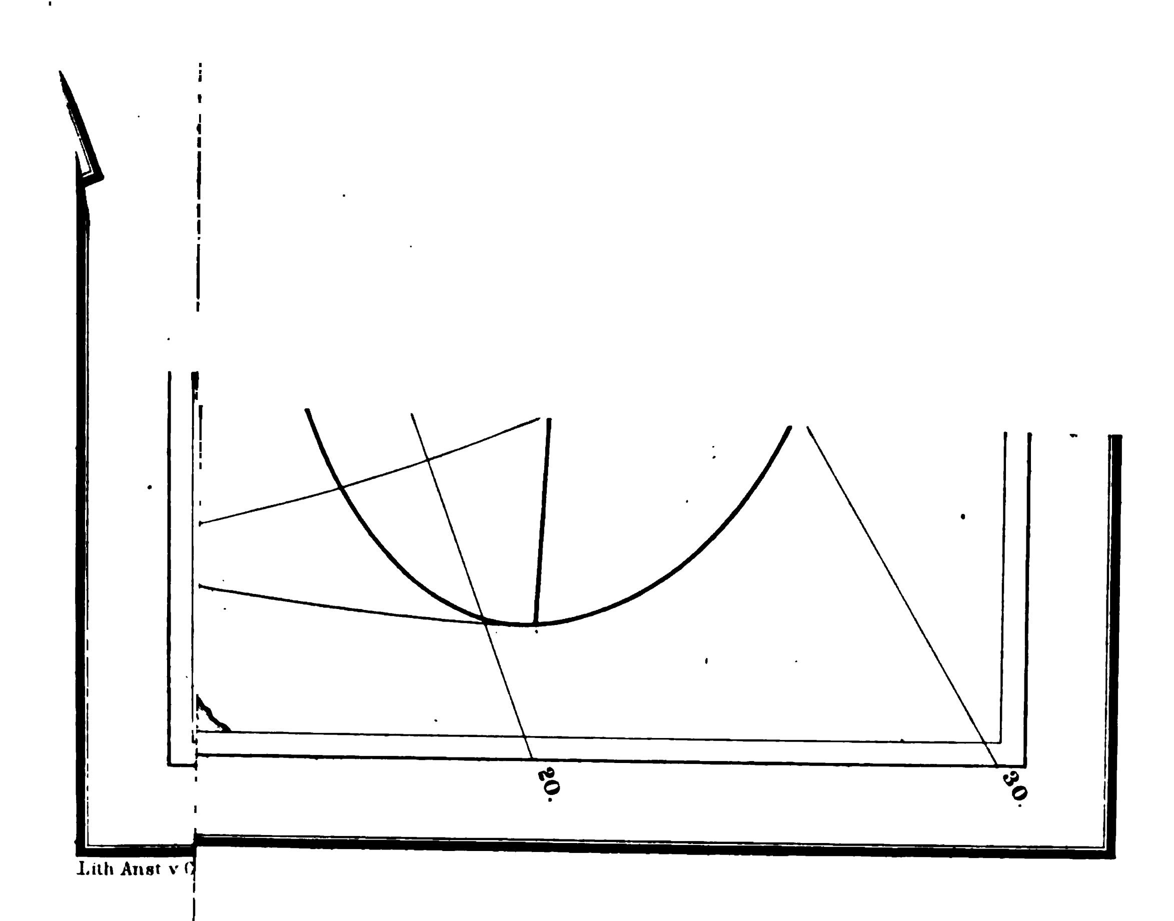
Eliminirt man hiemit $1+a'$ aus der vorstehenden Gleichung, so ergiebt sich

$$(1+x)\sin\theta'\sqrt{1+\mu d'} = (1+a)\sin\theta\sqrt{1+\mu d}$$

Beziehen wir nun den ersten Punkt auf die obere Grenze der Atmosphäre und den zweiten auf den Beobachtungsort, so bekommen wir, wie im Art. 17

$$x = \frac{\sin\theta}{\sin\theta'}\sqrt{1+\mu d} - 1$$

wo $\theta$ die scheinbare, $\theta'$ die wahre Zeitdistanz, $\mu d$ die brechende Kraft der Atmosphäre an der Oberfläche der Erde, und $\varrho x$ die Höhe über der Erdoberfläche im Vertical des Beobachtungsortes ist, in welche man zufolge meines Aufsatzes in den A. N. No. 347 Sp. 190 den Beobachtungsort versetzen muss, um in der Berechnung einer Sonnenfinsterniss u. s. w. die Wirkung der Strahlenbrechung zu berücksichtigen, indem der Lichtstrahl, welcher ohne die Brechung in der Atmosphäre zu berücksichtigen in diesen Punkt gelangt, derjenige ist, welcher in der That das Auge des Beobachters trifft.



Lith Anst v C

ÜBER EIN

# PSYCHOPHYSISCHES GRUNDGESETZ

UND DESSEN

## BEZIEHUNG ZUR SCHÄTZUNG DER STERNGRÖSSEN.

VON

G. TH. FECHNER.

---

## ERSTER ABSCHNITT.

Ein theoretisches Interesse veranlasste mich zuerst, folgenden Versuch anzustellen: Ich suchte bei halbbedecktem Himmel zwei benachbarte Wolkennüancen auf, welche sich so wenig unterschieden, dass der Unterschied nur als eben merklich gelten konnte, oder statt dessen einen Wolkendunst, der als nur eben merklicher Schein im klaren Himmelsgrunde schwebte, und also nur einen eben merklichen Lichtunterschied davon darbot. Darauf nahm ich zwei solche graue Plangläser, wie sie jetzt bei Optikern zum Gebrauche für Personen mit lichtscheuen Augen zu haben sind, von einer der dunkelsten Nummern, vor die Augen und richtete sie auf dieselben Lichtschattirungen, die den nur eben merklichen Unterschied darboten; ich will sie künftig kurz Componenten des Unterschieds nennen. Beide Componenten werden hiedurch photometrisch in gleichem Verhältnisse abgeschwächt, und in demselben Verhältnisse wird begreiflich auch der photometrische Unterschied derselben geschwächt. Seien z. B. zwei Lichtintensitäten 100 und 98, so wird der Unterschied 2 durch Halbirung der Intensitäten auf die Hälfte 1 herabgehen. Die photometrische Abschwächung fand übrigens nach der Dunkelheit der Gläser in erheblich stärkerem Verhältniss als bis zur Hälfte statt. Es fragte sich, ob der vor der Abschwächung nur eben merkliche Unterschied durch die starke Abschwächung unmerklich werden, oder, insofern etwa die Gränze der Merklichkeit vor der Abschwächung noch nicht erreicht war, an Merklichkeit mindestens auffallend einbüssen würde.

Diess scheint natürlich, vielleicht sogar selbstverständlich, und ist doch thatsächlich nicht der Fall. Der Unterschied zeigte sich mindestens, ich sage ausdrücklich mindestens, so deutlich als vorher.

Ich habe diesen Versuch von ziemlich vielen Personen wiederholen lassen, u. a. Prof. Hankel, Ruete, Volkmann, und alle haben sich einstimmig hierüber erklärt.

Denselben Erfolg erhielt ich, wenn ich statt der Abschwächung durch einfache Gläser eine Abschwächung durch doppelt zusammengelegte Gläser unter Anwendung blos des einen Auges zum ganzen vergleichenden Versuche bei Schluss des andern anwandte. Nach einer allerdings nur oberflächlichen photometrischen Bestimmung mochten die Lichtintensitäten der Componenten und mithin der nur eben merkliche Unterschied derselben hiedurch photometrisch etwa auf $^1/_7$ herabgebracht sein (bestimmtere Zahlenangaben nach einer andern Versuchsmethode folgen später); doch blieb der photometrisch so stark herabgebrachte Unterschied mindestens noch eben so merklich für die Empfindung, als bei Betrachtung der Wolkennüancen mit blossen Augen.

Denselben Erfolg erhielt ich endlich, wenn ich statt grauer Gläser solche von verschiedenen Farben, zum Theil noch von erheblich grösserer Dunkelheit, als sich mit den doppelt zusammengelegten grauen Gläsern erzielen liess, anwandte. Nur darf man nicht graue Wolkennüancen gegen den blauen Himmel oder verschiedenfarbige Nüancen gegen einander durch farbige Gläser betrachten wollen, wo der Versuch durch die ungleiche Absorption der verschiedenen Farbenstralen unrein wird.

Man kann wünschen, das Ergebniss dieser Versuche noch durch andre Versuchsweisen, bei welchen man die Bestimmung und Abänderung der Verhältnisse mehr in der Gewalt hat, constatirt zu sehen. Auf solche komme ich zur Genüge unten. Aber fassen wir zuvörderst das Ergebniss unter Anhalt an die bisherige Versuchsweise etwas näher in das Auge.

Für den ersten Anblick kann es eben so paradox, als in Widerspruch mit alltäglichen Erfahrungen erscheinen, dass ein auf $^1/_3$, $^1/_7$, ja noch viel mehr herabgebrachter photometrischer Unterschied mindestens eben so merklich für die Empfindung sein soll, als ohne Abschwächung. Denn es ist doch von der andern Seite gewiss, dass wir täglich Lichtunterschiede durch Abschwächung verschwinden sehen; ja wie sollten sie anders für das Auge verschwinden können, als durch Abschwächung. Aber man darf eine Bedingung nicht übersehen, die bei unsern Versuchen obgewaltet hat, und unter welcher allein der angegebene Erfolg zu erlangen ist, dass nämlich der Lichtunterschied bei seiner Abschwächung ein ungeändertes Verhältniss zu seinen, in gleichem Verhältniss abgeschwächten Componenten

behalten hat, indem er mit ihnen zugleich auf $1/3$, $1/7$ u s.f. herabgebracht ist. Wir hätten aber den Unterschied noch auf eine andere Weise schwächen können, dadurch dass wir die stärkere Componente durch alleinige Abschwächung der schwächern entgegenführten; dann würde der Unterschied mit seiner absoluten Schwächung zugleich eine Schwächung im Verhältniss zu seinen Componenten erfahren haben, und dann würde man, wie sich durch andere später anzuführende Versuchsweisen in Uebereinstimmung mit der allgemeinen Erfahrung leicht erweisen lässt, in der That die Merklichkeit des Unterschieds sich haben mindern und bei hinreichender Annäherung der Componenten an einander verschwinden sehen.

Hienach schiene der Erfolg unsers Versuches dahin zu deuten, dass es hinsichtlich der Grösse, mit der ein Lichtunterschied in die Empfindung eintritt, viel mehr auf die relative als absolute Grösse des Unterschiedes ankommt, wenn wir unter relativer Grösse des Unterschiedes sein Verhältniss zur Grösse seiner Componenten verstehen, diese relative Grösse blieb sich bei starker Abänderung der absoluten Grösse gleich, und so konnte sich auch die Merklichkeit desselben gleich bleiben.

Liesse sich diess Gesetz genauer constatiren, so wäre damit ein wichtiges Fundamentalgesetz für die Weise, wie der Lichtreiz Empfindung wirkt, gewonnen. Sowohl auf die genauere Constatirung der Gültigkeit als der Gränzen des Gesetzes wird nun dieser Abschnitt theils nach neuen, theils nach schon früher darüber Seitens einiger andern Beobachter vorliegenden bisher kaum beachteten Versuchen näher eingehen, zu denen die von mir selbst angestellten und durch mich veranlassten wesentlich nur als Bestätigungen unter andrer Form treten. Der folgende Abschnitt wird eine, schon im Titel der Abhandlung angezeigte, wichtige Beziehung des Gesetzes erörtern, und einen daher zu entnehmenden wichtigen Einwand gegen die Gültigkeit des Gesetzes erledigen; ein dritter endlich die Ausdehnung des Gesetzes über das Gebiet der Lichtlehre hinaus kurz besprechen.

Die Triftigkeit des Gesetzes bezüglich der Lichtempfindung vorausgesetzt, kann man gleich eine Bestätigung desselben in folgender Folgerung verlangen.

Geschwächte Componenten mit einem in demselben Verhältnisse geschwächten Unterschiede lassen den Unterschied noch mit unverminderter Merklichkeit für die Empfindung bestehen; verstärkte Com-

ponenten mit einem absolut genommen unverminderten Unterschiede können hienach denselben nur noch mit geschwächter Merklichkeit bestehen lassen, indem der relative Unterschied hiemit abnimmt; und diess muss sich in der Erfahrung dadurch beweisen, dass ein Unterschied weniger merklich wird, oder selbst für das Auge verschwindet, wenn man seinen Componenten ein gleiches Plus zufügt.

Zur Bewährung hievon bedarf es keines besonders ausgedachten Versuches, wenn schon auch die Bewährung durch Versuche leicht fällt. Es bietet uns aber dasselbe Beobachtungsfeld, was uns bisher gedient hat, in einer alltäglichen Erfahrung ganz von selbst eine genügende Bewährung dar.

Bei Nacht sieht jeder die Sterne, bei vollem Tageslichte sieht er nicht einmal Sterne wie Sirius und Jupiter. Doch ist der absolute Unterschied der Helligkeit zwischen den Stellen des Himmels, wo die Sterne stehen, und den umgebenden Stellen noch eben so gross als bei Nacht. Es ist nur der Intensität beider ein gleiches Plus durch die Tageshelle zugefügt worden.

Möglicherweise hätte man den Erfolg unsrer Versuche mit den Wolkennüancen so deuten können, durch die dunkeln Gläser sei der Unterschied derselben allerdings in sehr starkem Verhältniss geschwächt worden, aber doch immer absolut noch vorhanden gewesen, und also habe er auch immer noch in Betracht seines absoluten Daseins wahrgenommen werden müssen, ohne dass man nöthig habe, die fortgehende Wahrnehmbarkeit von einer Forterhaltung derselben relativen Grösse abhängig zu machen. Aber man sieht aus vorstehender Erfahrung, dass das absolute Dasein eines Lichtunterschiedes keineswegs hinreicht, ihn wahrnehmbar zu machen; ja dass sogar sehr beträchtliche absolute Lichtunterschiede dem Auge völlig entschwinden, wenn sie eine sehr geringe relative Grösse zeigen. Niemand wird den Helligkeitsunterschied der Gestirne Sirius und Jupiter vom umgebenden Himmel bei Nacht gering halten, und Niemand wird mit geschärftester Aufmerksamkeit diese Gestirne bei Tage entdecken können; so dass die Behauptung auffallend erscheinen kann, der Helligkeitsuunterschied derselben von der Umgebung sei bei Tage noch eben so gross als bei Nacht. In der That aber ist er es photometrisch, indess er für das Auge völlig null ist.

Arago*) macht unter Zugeständniss, dass auch ein physiologischer

*) Mém. scientifiques. Appendice. p. 513.

Grund im Spiele sein könne, das Verschwinden der Sterne bei Tage wesentlich davon abhängig, dass theils die Luftportion, welche in der Richtungslinie zwischen Auge und Stern enthalten sei, ihr Bild zu der des Sternes füge, theils wegen nicht vollkommener Durchsichtigkeit der Hornhaut der übrige Theil der Atmosphäre zerstreutes Licht über das Bild des Sternes verbreite. Aber durch diese Zusätze wird immer nicht der absolute, sondern nur der relative Helligkeitsunterschied der Stelle, wo der Stern steht, von seiner Umgebung abgeändert; und es bedarf also immer noch der ausdrücklichen Zuziehung unseres Gesetzes, um das Verschwinden zu erklären. Zieht man es aber zu, so bedarf es nicht erst der Zerstreuung des Lichtes durch die Hornhaut, auf welche Arago Gewicht zu legen scheint, zur Erklärung. In der That möchte sie wenig hiebei in Betracht kommen; da man durch Vorhalten klarer Gläser, welche es doch der Klarheit der Hornhaut nicht zuvor thun dürften, sonst eben so müsste Lichtunterschiede zum Verschwinden bringen können, was nicht der Fall ist.

Vielleicht ist man geneigt, das Verschwinden von Lichtern im umgebenden Grunde bei nicht zu grossem photometrischen Unterschiede beider auf Lichtpuncte zu beschränken. Aber mit Unrecht. Die weiterhin anzuführenden Versuche mit den Schatten geben die bequemste Gelegenheit dasselbe Phänomen an Lichtflächen von beliebiger Ausdehnung und erheblichen absoluten Unterschieden zu beobachten; aber auch Erfahrungen des täglichen Lebens lassen sich wieder in dieser Beziehung anführen.

Bekanntlich werden die Figuren auf gefirnissten Oelgemälden, auf Daguerreotypen, gemalten Tellern, lakirten Tischen u. dgl. durch spiegelnde Lichter ganz unerkennbar. Nun hängt, wie man weiss, die Intensität des spiegelnd zurückgeworfenen Lichtes nicht von der Färbung oder Dunkelheit des Grundes, von dem es zurückgeworfen wird, ab, sondern bei gleicher Substanz nur von der Glätte desselben und dem Einfallswinkel; fügt also auch dem von den Figuren zerstreut zurückgeworfenen Lichte ein gleiches Plus zu, was die Helligkeitsunterschiede derselben vom Grunde unerkennbar macht.

Das Vorige dürfte schon zu einer Bestätigung des Gesetzes im Allgemeinen genügen. Aber kann es wirklich für genau gelten? Mit Fleiss habe ich gesagt, dass der Unterschied nach der Abschwächung durch die grauen Gläser noch mindestens so merklich als vorher

war; denn Einige unter denen, welche ich den Versuch wiederholen liess, z. B. Prof. Hankel, haben ihn nach der Abschwächung sogar noch etwas deutlicher oder schärfer vortretend als vorher gefunden; und mir selbst ist es manchmal, obwohl nicht immer so vorgekommen, sodass man jedenfalls sicher sein kann, dass die photometrische Schwächung unter den betreffenden Versuchsumständen keine verringerte Merklichkeit des Unterschiedes mitführt, die man etwa erwartet haben möchte; aber auch eine verstärkte Merklichkeit würde immerhin eine Abweichung vom Gesetze sein.

Abgesehen nun, dass hiebei möglicherweise abgeänderte Irradiationsverhältnisse eine Rolle spielen könnten, was ich ohne eingehendere Untersuchung nicht zu entscheiden weiss, ist im Allgemeinen zu bemerken, dass auch eine subjective Täuschung des Urtheils in sofern möglich wäre, als man vielleicht geneigt sein könnte, einen gleich merklichen Unterschied für verstärkt zu halten, weil er es doch in Verhältniss zu der geschwächten Empfindung der Componenten ist. Versuchsweisen sind daher nützlich, welche von der Möglichkeit derartiger Täuschungen unabhängig machen. Hiezu führt zuvörderst folgender Gegenversuch in Verbindung mit dem früheren Versuche.

Ich suche, während ich die Gläser vor den Augen habe, den schwächstmöglichen noch eben erkennbaren Unterschied zweier benachbarten Nüancen am Himmel auf, und nehme dann die Gläser von den Augen weg. Niemals habe ich hiebei einen Unterschied gefunden, den ich nicht auch nach Entfernung der Gläser noch erkannt hätte, wenn nur der erste Moment einer Blendung vorübergegangen, die durch den plötzlichen Uebergang zu einem viel helleren Lichte eintritt*). Wogegen, wenn die photometrische Abschwächung die Merklichkeit wirklich in irgends erheblichem Verhältnisse verstärkt hätte, die Beseitigung dieser Abschwächung den vorher nur eben merklichen Unterschied unmerklich hätte machen müssen.

Es ist wesentlich, zu diesen Versuchen nur ganz geringfügige Unterschiede zu verwenden, welche den Charakter des Ebenmerklichen tragen. Denn, wenn man etwa versucht, ein Urtheil zu fällen, ob grössere Lichtunterschiede mit und ohne Gläser gleich merklich scheinen,

*) Auch bei der ersten Versuchsweise in umgekehrter Richtung sehe ich im ersten Momente, wo ich die Gläser vor die Augen nehme, den Unterschied nicht so deutlich.

findet man, dass das Urtheil sehr unsicher ist; man wird von Verschiedenen und von sich selbst schwankende Aussagen erhalten und dabei durch manche Nebenumstände mitbestimmt werden. Bei unserer Versuchsweise mit ganz geringen Unterschieden aber handelt es sich einfach, ob der Unterschied mit und ohne Gläser noch für die Empfindung *da ist* oder nicht; und es ist vielmehr auf die gleichbleibende Möglichkeit, ihn mit und ohne Gläser *überhaupt* noch zu erkennen, als die gleichbleibende Deutlichkeit desselben, die sich schwerer beurtheilen lässt, und wobei subjective Täuschung leichter möglich ist, zu bauen, indem die gleichbleibende Deutlichkeit selbst so zu sagen objectiv durch die gleichbleibende Möglichkeit bei Combination des Versuches und Gegenversuches bewiesen wird. In der That, wenn der schwächstmögliche Unterschied, der uns noch erkennbar scheint, eben so nach starker absoluter Abschwächung wie nach starker absoluter Verstärkung unter Gleichbleiben seiner relativen Grösse fortgehends erkannt wird, so kann die Merklichkeit desselben überhaupt nicht erheblich auf diese Weise geändert sein.

Unstreitig zwar kann man sich bei mangelnder Unbefangenheit auch über das *Dasein* eines feinen Unterschiedes täuschen; aber sollte durch die allgemeine *Möglichkeit* einer solchen Täuschung unsre Versuchsweise ausgeschlossen werden, so würde überhaupt jede Versuchsweise auch in andern Gebieten, wo es feine Unterschiede aufzufassen gilt, und hiemit fast die ganze Mikroskopie so gut als ausgeschlossen werden. Nur eine Controle durch andere Beobachter muss noch nöthig und durch andere Versuchsweisen nützlich erscheinen. Dabei ist noch zu bemerken, dass die einfache Auffassung des Daseins eines Unterschieds von Lichtnüancen etwas Einfachres ist, und weniger Anlass zu einem Spiel der Einbildungskraft gibt, als wenn es, wie in der Mikroskopie, zugleich Gestalten aufzufassen gilt.

Durch die Combination des Versuches und Gegenversuches in der angegebenen Weise wird jedenfalls die Möglichkeit eines Irrthums betreffs der Genauigkeit des Gesetzes in den Gränzen, in denen sich die Versuche gehalten haben, selbst in sehr enge Gränzen eingeschlossen; doch behaupte ich nicht nur nicht, dass seine Gültigkeit ins Unbegränzte reicht; sondern es ist vielmehr gewiss, dass sie nicht ins Unbegränzte reicht; wenn schon bis jetzt viel mehr die Thatsache, als die genauere Bestimmung der Gränzen vorliegt.

Niemand wird mit blossen Augen die Flecken der Sonne erkennen; indess man sie durch geschwärzte Gläser sehr wohl erkennt. Sollte aber das Gesetz sich bis zu den höchsten Lichtintensitäten erstrecken, so müssten sie mit und ohne Gläser gleich deutlich erkannt werden. Wahrscheinlich findet eine Abweichung vom Gesetze überall schon statt, wenn das Auge sich geblendet fühlt, und ich stelle daher auch nicht in Abrede, dass bei heller Wolkenbeleuchtung sich diess schon bei unsern Versuchen mit den verdunkelnden Gläsern möglicherweise geltend machen und das Auge einen wirklichen kleinen Gewinn an Deutlichkeit bei Wegnahme der Gläser spüren kann, nur lässt der Erfolg der Verbindung von Versuch und Gegenversuch nicht zu, etwas mehr als einen Gewinn von sehr kleiner Ordnung darin zu sehen, der auf diese Weise nicht sicher von mir erkannt werden konnte.

Von andrer Seite aber ist gewiss, dass, wenn man mit der Verdunkelung der Gläser bis zur Gränze geht, man auch die Sonnenflecken nicht mehr dadurch erkennen wird. Ja für jeden Lichtunterschied, wie stark er auch sei, und wo er auch gesucht werde, wird sich ein Dunkelheitsgrad der Gläser finden lassen, wobei er verschwindet, da er nothwendig verschwinden muss, wenn man mit der Verdunkelung so weit geht, dass überhaupt nichts mehr dadurch gesehen wird. Auch zeigt der Versuch, dass in der That schon bei grosser Annäherung an diese Gränze Unterschiede undeutlicher werden oder verschwinden können.

Also hat die Gültigkeit des Gesetzes eben so wohl ihre untere als obere Gränze bezüglich der absoluten Intensität der Componenten, bei der man seine Bestätigung sucht; und, anstatt eine unbeschränkte Gültigkeit des Gesetzes behaupten zu können, lässt sich blos behaupten, dass es in weiten, bisher noch nicht genau bestimmten Gränzen, namentlich aber den selbst ziemlich weiten Gränzen, in denen sich das gewöhnliche Sehen bewegt, in so weit gültig ist, dass eine Abweichung von demselben nicht nachweisbar ist.

Indirect wird sogar durch die Thatsache der Abweichungen vom Gesetze nach oben und unten das Statthaben des Gesetzes in der Mitte bewiesen, insofern jene Abweichungen im entgegengesetzten Sinne statt haben. Bei blendenden Lichtern wird der Unterschied deutlicher durch Abschwächung, bei Annäherung an das Nachtdunkel durch Steigerung der Intensität der Componenten und ihres Unterschiedes in gleichem Verhältnisse. Schon aus mathematischem Gesichtspuncte muss dann der

Uebergang zwischen beiden Fällen durch ein Intervall von merklicher Constanz der Deutlichkeit erfolgen. — Nur liess sich nicht voraussehen, dass das Intervall dieser Constanz so weit reiche, und diese selbst mit solcher Bestimmtheit hervortrete, als es sich durch die Erfahrung herausgestellt hat.

Nicht ohne Interesse ist es, dass uns nach vorigen Versuchsweisen der Himmel in einfachster Weise die Mittel gewährt, zugleich die Thatsache und die Gränzen der Gültigkeit des Gesetzes zu constatiren, und der folgende Abschnitt wird uns dieses erhabene Beobachtungsfeld noch einmal als Schauplatz zugleich der interessantesten und ältesten Bewährung des Gesetzes wiederfinden lassen. Auch scheint mir nach Allem, dass die angeführten Beobachtungsweisen für sich allein schon die Thatsache des Gesetzes so gut beweisen, als alle folgenden; doch hindere ich nicht, dass man sie denselben gegenüber blos als vorläufige betrachte. Ich habe sie vorangestellt, nicht nur weil es die waren, auf die ich selbst zur Prüfung des Gesetzes zuerst verfiel, sondern auch, weil sie ganz besonders bequem und jedem leicht zugänglich sind. Ein halb bedeckter Himmel gewährt meist von selbst eine Auswahl der verschiedensten und in verschiedenster Weise gegen einander und gegen den umgebenden Himmel abgestufter Nüancen. Nur hat man dabei weder die Bestimmung noch gleichförmige Erhaltung noch Abänderung der Lichtschattirungen in seiner Gewalt, und aus diesem Gesichtspuncte empfiehlt sich allerdings die Zuziehung noch anderer Verfahrungsarten, welche das Experiment zur Beobachtung fügen.

Unstreitig nun gibt es sehr verschiedene Wege, Lichtschattirungen von verschiedener Abstufung bis zum eben merklichen Unterschiede gegen einander zu erzeugen; eine besonders einfache und verhältnissmässig leicht der Messung zugängliche Weise aber ist in der Anwendung zweier Schatten gegeben, die man von demselben Gegenstande mittelst zweier Lichtquellen erzeugt, und deren Helligkeitsverhältnisse man durch Abänderung der Entfernungsverhältnisse beider Quellen von dem Schatten beliebig zugleich reguliren und messend vergleichen kann, nachdem man durch Putzen oder Schrauben die beiden Lichter oder Lampen erst auf gleiche Helligkeit gebracht hat, wovon man sich leicht durch Gleichheit der beiden Schatten bei gleichem Abstande überzeugen kann. Wie man aber am Beobachtungsfelde des Himmels statt zweier Wolkennüancen gegen einander auch eine Wolkennüance gegen den

Himmelsgrund betrachten kann, so kann man auch hier auf dem Versuchsfelde der, die Schatten auffangenden, Tafel statt den Unterschied beider Schatten von einander in das Auge zu fassen, den Unterschied des einen beider Schatten vom umgebenden Tafelgrunde ins Auge fassen; und es ist diess im Allgemeinen noch zweckmässiger, da das Lichtverhältniss eines Schattens zu dem denselben ganz umgebenden Grunde noch leichter auffassbar ist, als zu einem, blos von einer Seite nachbarlichen oder berührenden andern Schatten. Bei dieser nachstehends zu befolgenden Versuchsweise kommt des Nähern Folgendes in Rücksicht.

Dadurch, dass man das eine von beiden Lichtern $L$, $L'$, beispielsweise das Licht $L'$, immer weiter von der, die Schatten aufnehmenden, Tafel entfernt, kann man den Schatten, den es wirft, und der noch vom andern Lichte $L$ erleuchtet wird, endlich bis zur Ununterscheidbarkeit vom umgebenden Grunde herabbringen, also unmerklich machen, indem der Unterschied der Beleuchtung des Schattens durch $L$ allein und durch $L$ und $L'$ zusammen endlich zu klein wird, um noch erkennbar zu sein. Ich war in der That höchlich überrascht, als ich den Versuch zuerst anstellte, zu sehen, wie zwei Lichter blos e i n e n Schatten werfen. Beide Lichter brennen noch deutlich; aber mit der schärfsten Aufmerksamkeit kann man, wenn das Licht $L'$ hinreichend entfernt, oder, in Form einer Lampe angewandt, hinreichend niedergeschraubt wird, nicht den geringsten Schatten desselben mehr erkennen; dieser geht ununterscheidbar im Grunde auf. Es ist diess aber eben nur die Uebersetzung des Phänomens, dass die Sterne bei Tage nicht gesehen werden, in den Versuch.

Hat man nun so durch hinreichende Entfernung des Lichts $L'$ von der Tafel den Schatten, den es wirft, so eben zum Verschwinden gebracht, so reicht eine geringe relative Verrückung beider Lichter im rechten Sinne hin, ihn wiedererscheinen zu lassen, eben merklich zu machen, und man hat dann ein geeignetes Object darin, zuvörderst die Versuche mit den verdunkelnden Gläsern daran zu wiederholen, wo sich dann auch derselbe Erfolg wieder herausstellt; d. h. der eben merkliche Schatten verschwindet nicht bei Versuch und Gegenversuch; es sei denn, dass man mit der Verdunklung gar zu weit herabgeht. Derselbe kleine Unterschied aber, welcher durch Betrachtung mit verdunkelnden Gläsern nicht verschwindet, verschwindet sofort durch hinreichend helle gemeinsame Erleuchtung beider Schatten mit einem dritten Lichte oder einer Lampe, wodurch beiden ein gleiches Plus zuwächst. Uebrigens stellt man letz-

tern Erfolg noch einfacher mit blos zwei Lichtern dar, indem man einem Schatten, der durch ein Licht zu einer Seite eines dunkeln Körpers erzeugt wird, ein Licht von der andern Seite entgegen bringt. Ist dieses Licht hinreichend hell, so kann man einen, das eben Merkliche weit übersteigenden, Schatten dadurch zum völligen Verschwinden bringen.

Natürlich muss statt der Abschwächung der Componenten, in unserem Falle des einen Schattens und des umgebenden Grundes durch dunkle Gläser, jede andre Weise der Abschwächung, welche beide in gleichem Verhältniss trifft, zu gleichen Ergebnissen führen. Hiezu nun diente bei den folgenden Versuchen die Versetzung der beiden Lichter in immer grössere, aber gleiches Verhältniss behaltende Entfernungen von der die Schatten aufnehmenden Tafel. Zu verschiedenen Versuchen wurden dabei Lichter von verschiedener Intensität genommen, um das Gesetz auch von dieser Seite durch eine Skala verschiedener Intensitäten zu bewähren; es wurden messende Bestimmungen zugezogen, und die bisherige Richtung des Verfahrens in der Art umgekehrt, dass, statt wie bisher, die gleichbleibende Merklichkeit als Erfolg der Abschwächung der Componenten nach gleichem Verhältniss zu beobachten, vielmehr diese Abschwächung in gleichem Verhältniss als Resultat der hergestellten gleichen Merklichkeit hervorging, wie aus der Beschreibung der Versuche gleich deutlicher erhellen wird. Hiedurch wurden die neuen Versuche um so geeigneter, das Resultat der bisherigen zu controliren.

Da meine eigenen, durch frühere Versuche geschwächten und höchst reizbaren Augen, die selbst zu den bisher erzählten Versuchen nur mit grosser Vorsicht verwandt werden konnten, sich auf die neuen Versuche, wobei es galt, Spuren erscheinenden und verschwindenden Schattens mit angestrengter Sehkraft aufzufassen, durchaus nicht einlassen konnten, so hat mein Schwager Volkmann die Freundlichkeit gehabt, unter Zuziehung einiger Mitbeobachter, diese ganze Versuchsreihe zu übernehmen. Folgendes das Wesentliche der Anstellungsweise und Resultate.

Ein vertical vor einer verticalen weissen Tafel aufgestellter Stab warf auf dieselbe unter der Einwirkung zweier Lichtquellen $L, L'$, zwei Schatten auf die Tafel. Die eine Lichtquelle $L$, eine brennende Stearinkerze, wurde in einem gegebenen Abstande von der Tafel erhalten, und die andre, deren gleiche Lichtintensität mit jener auf doppeltem Wege photometrisch constatirt war, nun durch einen der Mitbeobachter so weit von der Tafel zurückgerückt, bis der von dem Beobachter scharf ins

Auge gefasste Schatten, den sie warf, eben merklich zu sein aufhörte. Hiezu musste bei Volkmann's Augen der Abstand der Kerze $L'$ vom Schatten 10mal so viel betragen, als der Kerze $L$, d.h. der Unterschied der Beleuchtungen, wo der Schatten eben merklich zu sein aufhörte, $\frac{1}{100}$ der absoluten Beleuchtung betragen. Dasselbe Verhältniss der Distanzen und mithin Beleuchtungen, wo dieser Punct eintrat, fand sich aber auch bei ganz andern absoluten Intensitäten der Beleuchtung wieder, welche bemerktermassen theils durch Abänderung der Intensität der Flammen selbst, theils dadurch erhalten wurde, dass die Flamme $L$ in grössere oder geringere Distanz von der Tafel versetzt ward. Immer musste die Distanz der Flamme $L'$ merklich 10mal so viel betragen, um den Schatten auf den Punct des Verschwindens zu bringen. So wurde der Versuch von einer Intensität der Beleuchtung $L$ gleich 0,36 durch Intensitäten = 1, = 2,25, = 7,71 bis 38,79 variirt, wobei als 1 die Beleuchtung durch eine Stearinkerze in 3 Decimeter Abstand von der weissen Tafel gilt, ohne dass das Verhältniss der Distanz der andern Lichtquelle zur Tafel bemerklich oder erheblich anders ausfiel. Nur bei der schwächsten Intensität (0,36) fand ein nennenswerther kleiner Abfall statt, d. h. die Distanz des Lichtes $L'$ musste etwas weniger als das 10fache der Distanz des Lichtes $L$ betragen (nach der Tabelle der Resultate das 9, 6fache), um den Schatten eben verschwinden zu lassen; indem hiermit unstreitig die untere Gränze, welche die Gültigkeit des Gesetzes für das Experiment hat, überschritten zu werden anfieng.

Der Kürze halber habe ich bei dieser Darstellung blos auf den Punct des Verschwindens Bezug genommen. In Wirklichkeit aber wurde um den Punct des Verschwindens herum die Lichtquelle $L'$ abwechselnd hin- und hergerückt, so dass zwischen dem Punct des Verschwindens und Wiedererscheinens des Schattens der Punct der Ebenmerklichkeit möglichst genau erhalten wurde; und da die Verrückung der Lichtquelle $L'$ durch einen Gehülfen nur auf den Ruf des, ganz mit Auge und Aufmerksamkeit auf die Apperception des Schattens gerichteten Beobachters geschah, so erfolgte die definitive Fixation des Abstandes ohne dessen Kenntniss Seitens des Beobachters und konnte also nicht durch eine solche Kenntniss influencirt werden, wodurch das Resultat dieser Versuche um so unzweideutiger wird.

Diese Versuche sind von Volkmann unter Zuziehung von Prof. Knoblauch und Dr. Heidenheim in Halle und Jung aus Berlin angestellt,

und zum Theil auch in meinem eigenen Beisein wiederholt worden. Und bemerkenswerther Weise fand sich bei allen genannten Beobachtern ein nur wenig um $\frac{1}{100}$ der absoluten Beleuchtung schwankender Werth als eben merklicher Unterschied wieder.

Allerdings lässt diess Verfahren keine grosse Schärfe in Einzelversuchen zu, indem man das Licht *L'* innerhalb einer gewissen Weite, die nach Volkmann etwa $\frac{1}{10}$ des Totalabstandes betragen mag, verrücken kann, ohne genau zu wissen, wo man den Punct der Ebenmerklichkeit des Schattens fixiren soll; daher im Allgemeinen für jeden Beobachter das Mittel aus mehreren Versuchen als maassgebend angesehen wurde; doch schwankten die Einzelresultate oft nur sehr wenig um das Mittel, und die Unsicherheit, die nach den Mitteln übrig bleibt, ist sehr gering.

Zur Zeit der Anstellung dieser Versuche hielt ich dieselben für neu und glaubte der Entdecker des schönen Gesetzes zu sein, was sich dadurch herausstellt. Diess ist nicht der Fall, wie ich schon Eingangs ausgesprochen habe. Das Gesetz ist nicht nur im Gebiete der Lichtlehre gelegentlich in Zusammenhang mit andern Untersuchungen durch Bouguer, Arago, Masson, Steinheil, sondern auch, worauf ich im dritten Abschnitte komme, in andern Gebieten insbesondere durch E. H. Weber vor mir ausgesprochen und durch Versuche belegt worden. Inzwischen war meine Unkenntniss wohl zu entschuldigen, da es bisher keine Aufmerksamkeit auf sich gezogen, keiner selbstständigen Betrachtung unterlegen hat und in den Specialabhandlungen, wo es gelegentlich vorkommt, so zu sagen versteckt geblieben ist. Weder in einem der mir bekannten physikalischen noch physiologischen Lehrbücher finde ich seiner gedacht, ungeachtet es in beide gleich sehr gehört, indem es gleich sehr in physikalische und physiologische Verhältnisse eingreift; ja nicht einmal in den photometrischen Lehrbüchern von Lambert und Beer ist dasselbe erwähnt.

Wenn es nun hienach nicht unstatthaft erscheinen konnte, die Aufmerksamkeit auf ein so wichtiges Gesetz durch eine genauere Erläuterung desselben ausdrücklich hinzulenken, so scheinen mir auch die vorigen Versuche nach den früheren wohl noch der Anführung werth, nicht nur weil sie eine Bewährung des Gesetzes unter manchen neuen Formen und Modificationen darbieten, sondern auch, weil dasselbe durch eine aus ganz verschiedenen Gesichtspuncten geführte Untersuchung von einander unabhängiger Beobachter um so sicherer gestellt

wird. Und ich bedaure um so weniger, hierin schon Vorgänger gefunden zu haben, als ein etwaiger Verdacht, dass bei meinen eigenen und den durch mich veranlassten Versuchen keine hinreichende Unbefangenheit obgewaltet habe, vielmehr das Gesetz gefunden worden sei, weil es als Unterlage einer Theorie gesucht worden sei, was, wie ich gestehe, in der That der Fall gewesen ist, bei meinen Vorgängern nicht Platz findet, welche sich nur beiläufig mit dem Gesetze beschäftigt haben, kein besonderes Gewicht darauf legen und keine weiteren Folgerungen daran knüpfen.

Indem ich aber meinerseits Veranlassung habe, grosses Gewicht darauf zu legen, aus einem Gesichtspuncte, den ich später namhaft mache, habe ich auch Gewicht auf die möglichste Sicherstellung desselben zu legen, und gestatte mir, im Interesse dieser Sicherstellung den vorigen Versuchen noch dasjenige hinzuzufügen, was mir von den frühern Bewährungen desselben im Gebiete der Lichtlehre allmälig bekannt worden ist. Bei der seitherigen Vernachlässigung und der Zerstreutheit des in dieser Hinsicht Vorhandenen — in zum Theil abseits liegenden Quellen — dürfte eine solche Zusammenstellung an sich dienlich sein, und wenn schon nicht das Verdienst, aber fast den Werth der Darstellung neuer Versuche haben.

Bouguer hat nach s. Traité d'optique sur la gradation de la lumière par Lacaille 1760. p. 81 den Versuch mit dem verschwindenden Schatten, in ganz ähnlicher Weise als Volkmann angestellt*), und beschreibt denselben unter der Ueberschrift: »Observations faites pour determiner, quelle force il faut qu'ait une lumière pour qu'elle en fasse disparaitre une autre plus faible.«

Zwar gibt er blos das Resultat eines Versuches, bei einem einzigen Abstande beider Lichter, wonach der eine Schatten bei ungefähr $\frac{1}{64}$ Differenz (statt $\frac{1}{100}$ bei Volkmann) verschwindet; sagt aber weiterhin, dieser Grad der Empfindlichkeit müsse je nach dem Auge des Beobachters verschieden sein; er habe jedoch zu finden geglaubt, dass er für sein Auge unabhängig von der Stärke des Lichtes sei.

*) Ich entnehme die Angabe darüber der wörtlichen Wiedergabe seiner Worte durch Masson in den Ann. de Ch. et de Ph. 1845. T. XIV. p. 148; da mir Bouguer's Schrift selbst nicht zu Gebote stand.

Masson, indem er den Bouguer'schen Versuch berichtet, fügt hinzu: „M. Arago, de son côté, a répété et varié les experiences de Bouguer, et il a eu l'obligeance de nous apprendre, qu'il avait expérimenté avec des lumières colorées. Il est, en outre, arrivé à ce résultat important: quelle que soit la limite, à laquelle on parvient par le procédé de Bouguer, on ira encore au delà en faisant mouvoir l'ombre sur le fond éclairé." Arago selbst spricht in seiner populären Astronomie (nach der Herausgabe durch Hankel, Th. I. S. 168) von diesen Versuchen in einem Kapitel, welches die gleiche Ueberschrift, als die Darstellung des Versuches bei Bouguer führt. Doch giebt er nur eine allgemeine Schilderung der Versuchsweise, ohne specielle Versuche anzuführen, oder ausdrücklich von denselben als eigenen zu sprechen; reproducirt vielmehr nur das Bouguer'sche Ergebniss, indem er sagt: „der grossen Mehrzahl der Menschen wird das Verschwinden (des Schattens) eintreten, sobald $AL$ (der Abstand des einen Lichtes) 8mal grösser ist als $AM$ (der Abstand des andern Lichtes), d. h. sobald das Licht $L$ den undurchsichtigen Körper und die benachbarten Theile des Papieres 64mal schwächer erleuchtet, als das Licht $M$. Welches auch die absolute Helligkeit von $M$ und $L$ ist, stets wird der Versuch auf dasselbe Resultat führen."

In Betreff des Einflusses der Bewegung des Schattens, welcher durch eine Bewegung des schattengebenden Körpers erzeugt wird, bemerkt er, dass eine langsame Bewegung keinen andern Erfolg als Ruhe habe, indess eine schnelle ihn leichter erkennbar mache, so „dass eine Bewegung von einer gewissen Schnelligkeit Helligkeitsunterschiede bemerklich macht, welche das Auge im Zustande der Ruhe nicht wahrnimmt, nämlich Helligkeitsunterschiede unter $\frac{1}{64}$."

Man sieht, dass sich Arago hier ganz entschieden über das Statthaben des Gesetzes ausspricht. Doch nimmt er weder in seiner Astronomie bei Besprechung der Beziehung zwischen Sterngrössen und photometrischen Sternhelligkeiten, wo das Gesetz nach dem folgenden Abschnitt wesentlich in Rücksicht kommt, noch anderwärts bei Erklärung des Verschwindens der Sterne am Tage, wie wir oben gesehen, auf das Gesetz Bezug, was eben so wie die Ueberschrift seiner Darstellung des Gesetzes, worin er Bouguer folgt, ein Beweis sein dürfte, dass ihm die Bedeutung desselben nicht ganz klar gewesen ist.

Auch in seinen photometrischen Abhandlungen*) kommt er nicht auf das Gesetz zurück, sondern specificirt blos die Versuche, welche den Einfluss der Bewegung auf die Sichtbarkeit des Unterschiedes beweisen.

Bei diesen Versuchen bestanden die Componenten nicht aus zwei Schatten, sondern wurden nach einem Verfahren, was sich auch bei künftiger Anstellung von Versuchen über unser Gesetz empfehlen dürfte, so erhalten, dass mit einem Fernrohr, welches inwendig ein Rochonsches Prisma (wodurch ein Doppelbild erzeugt wird) hatte, und vor dessen Objectiv ein Nicolsches Prisma angebracht war, durch dessen Drehung das eine Bild in beliebigem und messbarem Verhältniss gegen das andere abgeschwächt werden kann, nach einer in schwarzer Pappe angebrachten Oeffnung, welche sich auf dem bedeckten Himmel projicirte, visirt ward, wo sich dann aus der Lage der Hauptschnitte des Nicolschen und des Rochonschen Prisma gegen einander die relative Intensität der beiden durch letzteres erzeugten Bilder bestimmen lässt. Durch geradlinige Bewegung des Rochonschen Prisma im Fernrohr in der Richtung vom Ocular nach dem Objectiv wurde das schwächere Bild in Bewegung gesetzt, so dass es von der Lage, wo sein Rand durch die Mitte des stärkeren ging, in gemessener Zeit zu derjenigen überging, wo sein Rand sich mit dessen Rande berührte.

In drei Versuchsreihen, welche unter Zuziehung mehrerer Beobachter auf diese Weise angestellt wurden, fand bei einer Geschwindigkeit der Bewegung des Bildes von 12 Winkelminuten in der Zeitsecunde das Verschwinden des schwächeren über dem stärkeren superponirten Bildes für das Auge statt, wenn die Intensität des schwächeren folgenden Bruchwerth des stärkeren betrug:

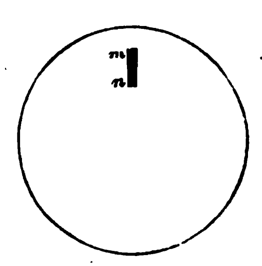
| | In der Ruhe. | Bei Bewegung. |
|---|---|---|
| I. | $\frac{1}{39}$ | $\frac{1}{58}$ |
| II. | $\frac{1}{51}$ | $\frac{1}{87}$ |
| III. | $\frac{1}{71}$ | $\frac{1}{131}$ |

In Betreff des grossen Unterschiedes, welchen die absoluten Zahlen dieser drei Versuchsreihen zeigen, bemerkt Arago blos: „Je ne chercherai pas ici à expliquer, comment la sensibilité de l'oeil correspondant à l'état de repos a été si différente dans ces trois séries d'expé-

*) Mémoires sur la photométrie. p. 256.

riences. C'est là un phénomène physiologique, sur lequel il y aura à revenir." Der Unterschied kann nicht von der Verschiedenheit der Beobachter abgehangen haben, da Arago sagt: Vorstehendes seien die „résultats à très-peu concordants, obtenus par M. Laugier, par M. Goujon et par M. Charles Mathieu;" eben so wenig von einer Verschiedenheit der absoluten Intensität, welchem theils die ausdrückliche Anerkennung unseres Gesetzes in der populären Astronomie widerspricht, theils die allgemeine Angabe, die er für sämmtliche Versuche beifügt: „Ajoutons, comme renseignement propre à faire juger de l'obscurité du champ, que l'image faible, lorsqu'elle se projetait en dehors de l'image forte, a disparu quand son intensité était de $\frac{1}{7100}$."

Masson*) ist auf seine Versuche zur Bewährung des Gesetzes beiläufig bei einer ausgedehnten Untersuchung über elektrische Photometrie gekommen. Sein Verfahren ist sinnreich und einfach und seine Angaben lassen die Bewährung viel schärfer und vollständiger hervortreten, als die Angaben Bouguer's und Arago's. Im Wesentlichen war es dieses: Eine weisse Scheibe von ungefähr 6 Centimeter Durchmesser, auf der ein Sector, beispielsweise $\frac{1}{60}$ der Kreisfläche betragend, zu einem gewissen Theile *mn* geschwärzt war, in dieser Weise




wurde in rasche Drehung versetzt, so dass vermöge der Nachdauer des Gesichtseindruckes sich der schwarze Theil zu einem Ringe oder Kranze auf der weissen Scheibe ausdehnte, der nach dem bekannten, hiebei obwaltenden, Gesetze über die Helligkeitsverhältnisse rasch bewegter Körper um $\frac{1}{60}$ dunkler war als der weisse Scheibengrund. Ein Auge, was noch im Stande ist, den Kranz vom Grunde zu unterscheiden, wird hienach im Stande sein, einen Unterschied, der nicht über $\frac{1}{60}$ der Intensität beträgt, noch wahrzunehmen. Masson liess nun eine ganze Reihe solcher Scheiben anfertigen, bei welchen das Verhältniss der

*) Ann. de Chim. et de Phys. 1845. T. XIV. p. 150.

Winkelgrösse des Sectors zur Kreisfläche respectiv $\frac{1}{50}$, $\frac{1}{60}$, $\frac{1}{70}$ und so fortschreitend bis $\frac{1}{120}$ betrug, wodurch er in den Stand gesetzt war, Gränzen zu bestimmen, zwischen welche die Gränze der Empfindlichkeit fiel. Zu übereinstimmenden Ergebnissen mit dieser Methode führte folgende, welche, verglichen mit der vorigen, zugleich das Interesse hat, zu zeigen, dass instantanes Licht sich mit bleibendem Lichte in Betreff des Gesetzes gleich verhält.

Bekanntlich, wenn man eine abwechselnd in weisse und schwarze Sectoren getheilte, vom Tageslicht oder von einer Lampe erleuchtete Kreisscheibe rasch dreht, erscheint sie von gleichförmigem Grau. Erleuchtet man sie statt dessen mit dem instantanen elektrischen Funken, so erblickt man alle Sectoren völlig unterschieden. Wendet man beide Beleuchtungsarten zugleich an, so kommt es auf das Verhältniss der Intensitäten an, ob man gleichförmiges Grau sieht oder die Sectoren unterscheidet; Ersteres, wenn das elektrische Licht zu schwach ist, Letzteres, wenn es hinreichend stark ist. Für die Augen verschiedener Menschen ist nach Masson das Verhältniss beider Beleuchtungsintensitäten, bei welchem das gleichförmige Grau eintritt, verschieden, indess es für das Auge desselben Beobachters sich gleich bleibt. Die Sectoren verschwinden und das gleichförmige Grau tritt ein, wenn die instantane Erleuchtung der weissen Sectoren durch das elektrische Licht (die schwarzen werfen kein erhebliches Licht zurück) denselben kein hinreichendes Uebergewicht mehr über die gleichförmig graue Färbung, die ohne das elektrische Licht eintreten würde, giebt, dass sie vom Auge unterschieden werden kann; und je nach der verhältnissmässigen Breite der schwarzen und weissen Sectoren, womit sich das Grau ändert, wird demnach hiezu bei derselben fixen Beleuchtung eine verschieden starke elektrische Erleuchtung erfordert. Vermag das Auge nach der vorigen Versuchsweise noch $\frac{1}{100}$ zu unterscheiden, so wird bei Gleichheit der weissen und schwarzen Sectoren die Erleuchtung der weissen Sectoren durch das elektrische Licht $\frac{1}{200}$ ihrer Erleuchtung durch das bleibende Licht betragen müssen, indem diese Erleuchtung durch die Drehung der Scheibe zu einem Grau von der halben photometrischen Helligkeit abgeschwächt wird. Die Versuche nach dieser Methode sind von Masson zu andern Zwecken, als unser Gesetz zu bewähren, in grosser Abänderung angestellt, dabei aber die Uebereinstimmung ihrer Ergebnisse mit denen der vorigen Methode constatirt worden.

Das Nähere seiner Resultate giebt Masson, zuerst bezüglich de ersten Beobachtungsmethode, nachher sich zur zweiten wendend, wie folgt an*):

„En essayant différentes vues, j'ai trouvé, que pour celles que l'on considère comme faibles, la sensibilité a varié de $\frac{1}{50}$ à $\frac{1}{70}$. Elle a été de $\frac{1}{80}$ à $\frac{1}{100}$ pour les vues ordinaires, et pour les bonnes vues de $\frac{1}{100}$ à $\frac{1}{120}$ et au delà. J'ai rencontré deux personnes apercevant fort distinctement la couronne produite sur un disque donnant le $\frac{1}{130}$."

„En faisant varier l'intensité de l'éclairement, j'ai trouvé que, quand il était suffisant, pour qu'on pût facilement lire dans un in-octavo, la sensibilité ne variait pas pour un même individu. Ainsi, comme Bouguer l'avait reconnu, la sensibilité de l'oeil est indépendante de l'intensité de la lumière. J'ai fait varier de plusieurs manières la puissance du rayon lumineux réfléchi par le disque. J'ai pris la lumière d'une carcel placée à diverses distances du disque, l'éclairément par un temps sombre et couvert; j'ai opérée à la lumière diffuse après le coucher du soleil; j'ai employé la lumière solaire réfléchie par un héliostat, et quelquefois j'ai rendu le faisceau divergent au moyen d'une lentille. La distance de l'oeil au disque est sans influence sur la sensibilité, pourvu qu'on n'atteigne pas une certaine limite déterminée par l'angle soutenu par la couronne."

„Les résultats n'ont pas été modifiés, quand j'ai changé le rapport entre le diamètre du disque et la largeur de la couronne. J'ai employé des disques, dans lesquels la surface parcourue par le secteur noir était le tiers ou le quart de celle du cercle. J'ai placé la partie noire au bord du disque, au centre, et entre le centre et la circonference. Enfin j'ai disposé sur un même cercle plusieurs portions noires appartenant à des secteurs ayant avec le cercle des rapports différents, et j'ai employé le disque no. 5**). Dans tous les cas, la limite de la sensibilité est restée invariable."

„En éclairant le disque mobile par des lumières colorées, j'ai pu déterminer si la sensibilité de l'oeil variait avec la nature des rayons lumineux. Sauf quelques restrictions dont je vais parler, j'ai trouvé que la limite de sensibilité est indépendante de la couleur. Ainsi, je vois aussi distinctement la couronne au $\frac{1}{100}$, soit que j'éclaire le disque par la lumière naturelle, soit que j'emploie des rayons colorés."

„J'ai produit des lumières de diverses couleurs en faisant passer au travers de verres colorés les rayons du soleil ou ceux d'une lampe de Carcel. Je me suis servi des couleurs d'un spectre, et enfin de l'appareil photométrique de M. Arago."

„Les verres que je dois à l'obligeance de M. Bontemps ont tous été essayés au spectre. Excepté le verre rouge, qui ne laissait passer que l'extrémité rouge

*) Der Umstand, dass, so viel mir bekannt, die Masson'sche Arbeit in kein deutsches wissenschaftliches Journal übergegangen ist, wird die etwas längere wörtliche Mittheilung rechtfertigen.

**) Diese Scheibe enthält einen unterbrochenen schwarzen Sectortheil.

du spectre, tous les autres laissaient passer toutes les couleurs en quantités variables. Quelques-uns, le rouge par exemple, absorbaient une telle quantité de lumière, qu'on voyait difficilement la couronne.''

,,Dans les essais précédents, l'observateur ayant l'oeil fixé sur le disque pendant un temps plus ou moins long, nous ne pouvons affirmer que les limites de sensibilité, ainsi déterminés, resteront les mêmes quand l'éclairément sera instantane. Je me suis assuré par le moyen suivant que, dans ce dernier cas la limite de sensibilité éprouvait peu de variations.''

,,Après avoir éclairé les secteurs du photomètre*) par une lampe Carcel, j'ai placé une lumière électrique à la distance limite, puis j'ai fait varier, soit la distance de l'étincelle, soit celle de la lampe, de manière à rendre très-sensibles les secteurs. J'ai opéré pour diverses intensités d'éclairément. En comparant ainsi la variation de distance nécessaire pour produire l'apparence des secteurs à la distance absolue des lumières, j'ai trouvé, et cela résulte aussi des expériences que je citerai plus loin, qu'on pouvait prendre pour limite de sensibilité dans mes expériences photométriques les nombres obtenus pour les lumières fixes.''

,,En soumettant à mes expériences plusieurs individus, j'ai constaté un fait de la plus haute importance pour la photométrie absolue, je veux dire pour la comparaison des lumières fixes à une lumière instantanée prise pour unité. J'ai trouvé que deux personnes, qui avaient la même sensibilité, donnaient, après avoir acquis suffisamment l'habitude des expériences, les mêmes nombres au photométre électrique.''

,,J'ai substitué aux papiers blancs éclairés par des lumières colorées, des papiers colorés éclairés par de la lumière naturelle. La limite de sensibilité m'a toujours paru plus petite dans ce dernier cas, et un peu variable avec la couleur des papiers. Je ne pense pas cependant qu'on doivé regarder ce fait comme une exception à la règle que j'ai établie. Il est en effet à peu près impossible de se procurer des papiers uniformément colorés; la lumière qu'ils reflechissent est toujours très faible, et le noir qu'on dépose à leur surface adhère difficilement et réflechit lui-même une quantité de lumière blanche qui varie dans des limites assez étendues rélativement à lumière refléchie par les disques colorés. Cependant, pour des papiers rouges et bleus, je suis arrivé très-sensiblement à la limite obtenue par les autres moyens.''

,,Ayant rémarqué qu'à la limite de la couronne décrite par la partie noire du secteur, il y avait toujours un certain contraste qui, rendant la couronne plus apparente sur ses bords, aidait à sa vision, j'ai terminé la partie noire du secteur par une bordure frangée no. 6 et 7. fig. 7'' (s. Original).

,,Il résulte aussi des expériences, que j'ai faites sur plusieurs individus,

---

*) Masson bezieht sich hier auf eine in seiner Originalabhandlung beschriebene photometrische Einrichtung, bestehend in einer vom elektrischen Funken zu erleuchtenden, in weisse und schwarze Sectoren getheilten, rasch gedrehten Kreisscheibe. Vergl. S. 474.

que la sensibilité de leur organe restant la même pour toutes les couleurs, ils éprouvaint, en fixant le disque éclairé par le rouge, une fatigue, un malaise qui indiquaient chez eux une espèce de répugnance pour cette couleur. Il serait curieux d'examiner si cet effet n'est pas produit sur quelques yeux par une couleur autre que le rouge.“

Ich komme endlich zu Steinheil's Versuchen. Dieser fand in seiner berühmten Abhandlung über das Prismen-Photometer*) Veranlassung zu untersuchen, ob der Irrthum, den man in der Schätzung der Gleichheit von Lichtintensitäten begeht, je nach der Grösse der Intensitäten verschieden gross sei, und giebt (p. 14 seiner Abhandlung) das Resultat der darüber angestellten Beobachtungen kurz dahin an: „Sie zeigen, dass man mit grosser Genauigkeit den Punct erkennt, in welchem zwei Flächen gleich hell sind. Die Unsicherheit jeder einzelnen Schätzung der Art beträgt nicht über $\frac{1}{38}$ der gesammten Helligkeit; diese mag gross oder klein sein.“

Dieser Ausspruch includirt den Ausspruch unseres Gesetzes. Denn die Unsicherheit in der Schätzung der Gleichheit zweier Lichtintensitäten hängt begreiflich von der Grösse des noch erkennbaren Unterschiedes ab, und wenn bei verschiedenen Intensitäten um einen gleich grossen Verhältnisstheil im Mittel einer Mehrzahl von Versuchen geirrt wird, so muss auch die Gränze der Merklichkeit eines Unterschiedes bei einem gleich grossen Verhältnisstheile dieser Intensitäten liegen.

Die absolute Angabe $\frac{1}{38}$ kann der frühern von $\frac{1}{64}$ bis $\frac{1}{120}$ gegenüber auffallen, und es bleibt fraglich, ob sie von einer Verschiedenheit der Augen oder der Methode abhängt; aber das trifft das Gesetz nicht, um was es hier zu thun ist; und schon Arago's Versuche haben zum Theil einen sehr niedern Nenner gegeben. Dabei ist zu bemerken, dass der Bruch $\frac{1}{38}$, welcher die Unsicherheit nach Steinheil misst, dem eben merklichen Unterschiede, welchen die Brüche $\frac{1}{64}$ bis $\frac{1}{120}$ nach den andern Beobachtern bezeichnen, zwar als proportional, aber nicht als damit übereinstimmend anzusehen ist; obwohl diese Bemerkung die Grösse und Richtung des Unterschiedes zwischen den Ergebnissen nicht erklärt. Steinheil's Versuche (p. 75 ff. seiner Abhandlung), in so weit sie für die Bewährung unseres Gesetzes als vergleichbar in Betracht kommen, beziehen sich allerdings nur auf eine Skala dreier Intensitäten, die sich

*) Elemente der Helligkeits-Messungen am Sternenhimmel von Steinheil, in den Abhandl. der mathemat. phys. Kl. der kön. bair. Akad. 1837.

wie 1,000, 1,672 und 2,887 verhalten; haben also keine grosse Ausdehnung; doch sind sie sehr schätzbar und wichtig, nicht nur, weil sie von einem der ausgezeichnetsten, in Anwendung photometrischer Massmittel geübten, Beobachter herrühren; sondern auch, weil sie auf einem ganz andern Bewährungsprincip ruhen, als die bisherigen, und also um so mehr bezeugen, dass das Gesetz jede Art Prüfung besteht.

Das Wesentliche der Methode ist dieses: eine Lichtintensität von constanter Grösse ist gegeben. Dieses sucht man nach dem Urtheile der Empfindung einer andern, der Abänderung fähigen, gleich zu machen. Man misst alle Intensitäten, die man so nach einander der Normalintensität gleich geschätzt hat, nach ihrem photometrischen Werthe; nimmt daraus das Mittel, nimmt von diesem Mittel die Abweichungen der einzelnen gleichgeschätzten Intensitäten, und nimmt das Mittel dieser Abweichungen, welches nun ein Massstab für die durchschnittliche Grösse unter das Erkennbare fallender Lichtunterschiede giebt. Steinheil wendet zwar statt dieser mittleren Abweichung die ihr proportionale, den Massstab der Unsicherheit gewährende, wahrscheinliche Abweichung an, welche aus den Quadraten der Abweichungen vom Mittel berechnet wird, was aber für uns principiell auf dasselbe herauskommt, und misst unmittelbar nicht die Intensitäten, sondern Grössen, deren Quadraten die Intensitäten proportional sind, was aber ebenfalls im Principe nichts ändert. Das Genauere ist dieses*).

Das Gesichtsfeld eines geeignet eingerichteten Ocularapparates ist in der Art halbirt, dass es sein Licht von derselben erleuchteten Fläche her einerseits direct durch ein grosses Objectiv, andrerseits indirect durch ein kleines Objectiv unter Zuziehung von Reflexionsprisma und Spiegel empfängt, und dass durch Blendungen vor dem grossen und Schieber vor dem kleinen Objectiv der Lichtzutritt zu beiden Seiten des Gesichtsfeldes in messbarer Weise beschränkt und dadurch verschiedene Erleuchtungsverhältnisse derselben erzeugt werden können.

Nun wurden auf einer Seite des Gesichtsfeldes in 3 successiven Beobachtungsreihen **) I, II, III, durch drei vor das grosse Objectiv angebrachte kreisrunde Blendungen von folgendem Durchmesser

I. 19‴,940
II. 15,350
III. 11,777

*) Die Berechnungen im Folgenden sind nach den Steinheil'schen Datis selbstständig von mir geführt, um sie dem hier vorliegenden Zwecke anzupassen.

**) Eine vierte zählt hier nicht mit, weil das Verfahren nicht vergleichbar mit den andern war, s. unten.

Bilder derselben erleuchteten Fläche erzeugt, deren photometrische Helligkeiten den Quadraten dieser Durchmesser proportional sind, und in jeder dieser 3 Reihen in wiederholter Beobachtung die gleiche Helligkeit des Bildes auf der andern Seite des Gesichtsfeldes durch die vor der kleinen Objectivlinse angebrachten Schieber herzustellen gesucht. Der diametrale Durchmesser der quadratischen Schieberöffnung, bei welcher die Gleichheit erreicht schien, ward mit Hülfe einer mikrometrischen Schraubenvorrichtung gemessen, aus jeder der 3 Reihen der Mittelwerth dieser Durchmesser und der Abweichungen der einzelnen Werthe von dem Mittelwerthe genommen. Diese zeigten sich den Diametern der Schieberöffnungen und Blendungen, welche einander selbst proportional sind, merklich proportional, woraus dann leicht zu folgern ist, dass die Abweichungen der Lichtintensitäten, welche den Schieberöffnungen zugehören, von der mittlern nicht minder den Intensitäten proportional sind*).

Die Zahlendata sind diese: Seien $B$ die Durchmesser der Blendungen, $D$ die Durchmesser der Schieberöffnungen, bei welchen Gleichheit der Lichtintensität mit dem durch die Blendungen gehenden Lichte gefunden wurde, im Mittel von $m$ Versuchen, $i$ die Quadrate von $D$, welche als Mass der mittleren Lichtintensität gelten können; $\Sigma\Delta$ die Summe der Abweichungen, welche in $m$ Versuchen vom Mittelwerthe $D$ beobachtet wurden, $\Sigma\Delta^2$ die Summe der Quadrate der Abweichungen. Man hatte:

| Reihe | $B$ | $D$ | $i = D^2$ | $\Sigma\Delta$ | $\Sigma\Delta^2$ | $m$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| I. | 19''',940 | 160,70 | 25825 | 60,4 | 228,06 | 24 |
| II. | 15,350 | 122,31 | 14960 | 34,24 | 92,74 | 20 |
| III. | 11,777 | 94,59 | 8947 | 29,42 | 57,35 | 20 |

Zieht man hieraus den Mittelwerth der Fehler $E = \frac{\Sigma\Delta}{m}$, und den wahrscheinlichen Fehler $r = 0{,}67449 \sqrt{\frac{\Sigma\Delta^2}{m-1}}$ und nennt $E_1$ und $r_1$ das, was sie nach Voraussetzung genauer Proportionalität mit $D$ sein müssten, so hat man

| Reihe | $E$ | $E_1$ | $r$ | $r_1$ |
|---|---|---|---|---|
| I. | 2,517 | 2,426 | 2,107 | 2,009 |
| II. | 1,712 | 1,846 | 1,480 | 1,529 |
| III. | 1,471 | 1,428 | 1,134 | 1,183 |
| | 5,700 | 5,700 | 4,721 | 4,721 |

Die nach Voraussetzung unseres Gesetzes berechneten Werthe $E_1$, $r_1$ stimmen nahe genug mit den beobachteten $E$ und $r$ in Rücksicht, dass die geringe Beobachtungszahl $m$ kein grösseres Zutreffen erwarten lässt. Denn der wahr-

*) Sind nämlich $D$ und $D\,(1 + a)$ der mittlere und ein davon abweichender Diameter, so sind die zugehörigen Intensitäten $D^2$ und $D^2\,(1 + a)^2 = D^2\,(1 + 2a + a^2)$, wo man $a^2$ wegen seiner Kleinheit vernachlässigen kann. Wenn also die Abweichung vom Diameter $D$ gleich $aD$ ist, so ist die von der Intensität $D^2$ gleich $2\,aD^2$, mithin nicht minder der Intensität proportional, nur doppelt so gross im Verhältniss dazu.

scheinliche Fehler einer Bestimmung von $E$ und $r$ ist nach bekannten Sätzen ungefähr $\frac{1}{2\sqrt{m}}$ des betreffenden Werthes, welchem die Differenzen zwischen Rechnung und Beobachtung nirgends gleich kommen.

Im Mittel findet sich nach Vorigem

$$\frac{E}{D} = 0{,}01510;\ \frac{r}{D} = 0{,}01250$$

und da diese Verhältnisse zu verdoppeln sind, wenn man von $D$ zur Intensität $D^2$ oder $i$ übergeht*), so weicht man nach obigen Versuchen im Mittel um $0{,}0302 = \frac{1}{33{,}1}$ der mittlern Intensität von dieser beim Versuche der Gleichschätzung mit einer andern ab, und begeht einen wahrscheinlichen Fehler, welcher $0{,}0250 = \frac{1}{40}$ dieser Intensität beträgt.

Wenn Steinheil statt letzter Zahl $\frac{1}{40}$ vielmehr $\frac{1}{28}$ giebt, so ruht diese kleine Abweichung auf zwei Umständen. Einmal hat er $r$ nach der Formel $0{,}67449\sqrt{\frac{\Sigma\Delta^2}{m}}$ berechnet, wie aus den von ihm gegebenen Werthen erhellt, welcher Formel man jedoch heutzutage bekanntlich die obige vorzieht. Hienach würde $r$ vielmehr etwas kleiner als bei uns ausfallen. Andrerseits aber hat er zur Bestimmung von $r$ noch eine vierte Reihe zugezogen, von welcher er jedoch selbst bemerkt (p. 80), dass sie desshalb ein grösseres $r$ gegeben, weil dabei nicht die Einstellung auf Gleichheit der wahrgenommenen Helligkeit, sondern abwechselnd im Zeichen auf kleine Unterschiede geschahe. Sie gab für sich:

| $B$ | $D$ | $i$ | $\Sigma\Delta$ | $\Sigma\Delta^2$ | $m$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 7''',071 | 57,11 | 326,16 | 35,98 | 61,71 | 30 |

Die vorstehenden Versuche Masson's und Steinheil's enthalten für sich allein eine so vollständige Bewährung des Gesetzes, dass ich, wenn sie mir früher bekannt geworden, unstreitig keine andere Mühe, als die der Prüfung durch seine Folgerungen angewandt haben würde; nachdem aber meine und Volkmann's Versuche, unabhängig von den frühern angestellt, mit denselben vollständig im Ergebniss zusammentreffen, kann man um so mehr dadurch unser Gesetz im Gebiete der Lichtempfindung nicht nur als wohl begründet, sondern auch als verhältnissmässig scharf begründet und in weiten Gränzen gültig ansehen.

Auch Masson aber weist, wie wir, auf eine untere Gränze der Gültigkeit des Gesetzes hin, indem er sie nur von dem Puncte an in Anspruch nimmt, wo die Erleuchtung gestattet, gewöhnliche Druckschrift zu lesen. Bei jedem Versuche der Bewährung des Gesetzes wird man also darauf zu achten haben, den Versuch nicht bis zu gar zu grosser

*) Vergleiche die Anmerk. S. 479.

Verdunkelung zu treiben, wo eine Abweichung vom Gesetze sich nothwendig geltend machen muss. Einer obern Gränze der Gültigkeit des Gesetzes gedenkt Masson nicht; und bei den starken Lichtvariationen, die er anwandte, ist diess jedenfalls ein Beweis, dass sie hoch liegt, ungeachtet sie unstreitig anzuerkennen ist. Und es würde erwünscht sein, genauere Bestimmungen darüber mittelst Anwendung blendender Lichter zu haben, zu denen ich freilich meine Augen nicht würde hergeben können, und die überhaupt grosse Vorsicht erfordern möchten. Im folgenden Abschnitte führe ich eine etwas unbestimmte Angabe J. Herschel's an, welche gegen die Gültigkeit des Gesetzes sprechen würde, wenn sie nicht auf die obere Gränze des Gesetzes bezogen werden dürfte.

Die untere Gränze anlangend, so kann man sie aber eigentlich nicht einmal als Gränze betrachten und was für den ersten Anblick als Abweichung vom Gesetze erscheint, ist genauer betrachtet eine Folgerung des Gesetzes. Um diess zu zeigen, sind einige Vorerörterungen nöthig.

Das äussere Licht wirkt nicht unmittelbar Empfindung, sondern vermöge irgend welcher inneren Erregung unserer Nerven. Ist eine solche ohne äussern Lichtreiz vorhanden, so muss sie auch mit der von Aussen erweckten als gleichgeltend für die Empfindung in Betracht gezogen werden. Nun unterscheidet sich das Gesichtsorgan von andern Sinnesorganen bekanntlich dadurch, dass man, während man mit dem Ohre auch bei darauf gerichteter Aufmerksamkeit keine Gehörsempfindung, mit der Nase keine Geruchsempfindung hat, u. s. w., wenn nicht ein äusseres Anregungsmittel vorhanden ist, dagegen im Auge bei darauf gerichteter Aufmerksamkeit sich stets einer Gesichtsempfindung auch ohne äussere Anregung bewusst wird. Denn das schwarze Gesichtsfeld, was man im geschlossenen Auge und bei völligem Nachtdunkel hat, ist immer noch Sache der Gesichtsempfindung, und wird auch von den namhaftesten Physiologen als solche anerkannt. Es ist in der That nicht mit der Stille, die man im Ohre hat, als welche ein wirkliches Nichts der Gehörsempfindung ist, sondern mit einem ganz schwachen Ohrenbrausen, woran viele Personen, u. a. ich selbst, habituell leiden, zu vergleichen; ist so zu sagen eine für das Auge normale Hallucination. N i c h t s sieht man mit dem Finger, mit dem Hinterkopfe, mit einem bis in die Centraltheile gelähmten Sehorgan; da verschwindet auch das schwarze Sehfeld, obwohl solche Fälle nach den von mir eingezogenen

Erkundigungen sehr selten und nur partiell und auch dann meist nur vorübergehend vorzukommen scheinen, indem eine vollständige Lähmung der Centraltheile des Gesichtsorganes wahrscheinlich nicht ohne Zerstörung allgemeiner Lebensbedingungen vorkommen kann.

Auch kann das Augenschwarz durch alle mögliche Stufen der Erhellung aus rein innern Gründen in das hellste Licht übergehen, und repräsentirt in jeder Beziehung selbst noch einen schwachen photometrischen Lichtgrad, der in der Reihe der übrigen, mögen sie innerlich oder äusserlich hervorgerufen sein, mit denselben vergleichbar eintritt.

In dieser Hinsicht ist nicht nur von Interesse, sondern selbst für die Begründung dieser ganzen Betrachtung und der unbeschränkten Gültigkeit unseres Gesetzes nach unten, von Wichtigkeit, dass man durch ganz analoge Versuche, als die bisher zur Bewährung des Gesetzes angestellten, und unter Voraussetzung dieser unbeschränkten Gültigkeit den photometrischen Werth des Augenschwarz im Verhältniss zur Intensität einer gegebenen äussern Beleuchtung wirklich selbst photometrisch bestimmen kann. Hiezu hat man nämlich nur im Nachtdunkel ein einziges Licht so weit von einem schattengebenden Körper zu entfernen, bis der, nur allein noch vom Augenschwarz erfüllte, Schatten von dem, durch das Augenschwarz und die äussere Erleuchtung zugleich erhellten Grunde nur eben nicht mehr unterscheidbar ist. Legt man den von Volkmann gefundenen Bruchwerth $\frac{1}{100}$ unter, so beträgt bei dieser Entfernung die Erleuchtung, welche das Licht dem Augenschwarz zufügt, $\frac{1}{100}$ der Intensität des Augenschwarz.

Dieser Versuch ist wirklich, wenn auch bisher erst sehr beiläufig, angestellt worden. Für Volkmann's Augen verschwand der Schatten auf einem Grunde von schwarzem Sammet, als das Licht, eine gewöhnliche brennende Stearinkerze in einem langen dunkeln, durch einige Zimmer noch verlängerten, Gange bis auf 87 Fuss davon zurückgerückt war. Sofern nun bei dieser Entfernung die Erleuchtung, die das Licht dem Augenschwarz zufügte, $\frac{1}{100}$ der Erleuchtung durch das Augenschwarz war, würde sie bei $\frac{1}{10}$ jener Entfernung, d. i. bei 8,7 Fuss Entfernung derselben gleich gewesen sein. Der Versuch sagt also: dass eine schwarze Tafel durch eine gewöhnliche Stearinkerze, die in ungefähr 9 Fussen Entfernung davon brennt, eine eben so starke Erleuchtung empfängt, als durch das Augenschwarz allein ohne äussere Beleuchtung, und mit-

hin die photometrische Intensität der letzten Erleuchtung der ersten gleich ist.

Vielleicht mag man einen solchen Helligkeitswerth des Augenschwarz noch auffallend und viel zu gross finden, sofern er der Erleuchtung einer Fläche durch eine gewöhnliche Kerze in nahe 9 Fuss Abstand äquivalent sein soll. Aber man muss nicht übersehen, dass es die Erleuchtung einer schwarzen Fläche ist, womit die Gleichwerthigkeit behauptet, weil durch den Versuch bewiesen wird. Es würde aber eine absolut schwarze Fläche selbst durch die nächststehende noch so intensive Flamme gar nicht erleuchtet werden, indem sie alles Licht verschluckte, und nur der Umstand, dass es keinen absolut schwarzen Körper giebt, lässt noch von einem geringen Erleuchtungsgrade eines schwarzen Grundes überhaupt sprechen. Daher warf der schwarze Grund immerhin etwas, aber doch nur sehr wenig, Licht in der Umgebung des Schattens zurück, womit die Helligkeit des Augenschwarz sehr wohl in der Art commensurabel sein konnte, wie es sich durch den Versuch herausgestellt hat.

Ich habe hier nur das Ergebniss für Volkmann's Augen bei dem sorgfältigsten Versuche, den er bisher angestellt, angeführt; zwei andre Personen, welche er zu dem Versuche zuzog, erkannten den Schatten noch bei jener Distanz von 87 Fussen, über welche der Versuch nach der Beschaffenheit der Localität nicht getrieben werden konnte, was beweist, dass entweder die Helligkeit ihres Augenschwarz oder ihre Empfindlichkeit eine andere war. Volkmann beabsichtigt, diesen Versuchen noch genauere Bestimmtheit, weitere Ausführung und Folge zu geben. Vorläufig genügt das von ihm erhaltene Resultat zu zeigen, dass die photometrische Intensität des Augenschwarz weder eine an sich unmessbare, noch unmessbar kleine ist; und diess ist es, worauf es hier zunächst nur ankommt.

Wenn ich von der Möglichkeit spreche, dass das Augenschwarz bei verschiedenen Personen eine verschiedene Helligkeit habe, so ist diess nicht ganz aus der Luft gegriffen, da es sogar bei derselben Person an verschiedenen Stellen der Netzhaut eine verschiedene Helligkeit annehmen kann. Der Beweis dafür ist leicht zu führen. Hat man eine weisse Scheibe auf schwarzem Papiere scharf und anhaltend betrachtet, so zeigt sich nachher selbst im geschlossenen und mit den Händen verdeckten Augen ein vertieft schwarzes Nachbild der Scheibe in einem

relativ dagegen hellern Grunde. Also vertieft sich das Augenschwarz durch Ermüdung des Auges und erhellt sich relativ durch Ruhe. Vielleicht ist es also auch, wenn man Morgens erwacht, von andrer Tiefe, als wenn man Abends einschläft; obwohl man nicht sicher voraussagen kann, dass es erstenfalls minder tief, als letztenfalls sei; da nicht blos die Ermüdung des Auges durch den während des Tages einwirkenden Lichtreiz, sondern auch das Nachklingen der lange fortgesetzten Wirkung desselben in Betracht zu ziehen sein möchte.

Ist man nun nach all dem vollkommen berechtigt, von einem dem äussern Lichte äquivalenten innern Lichte des Auges zu sprechen, so kann auch, um auf den Ausgangspunct zurückzukommen, dessen Dasein bei den Versuchen zur Bestätigung unseres Gesetzes nicht ausser Rechnung gelassen, nicht einem Nichts der Intensität gleich gesetzt werden. Fraglos, wenn in manchen Augenkrankheiten das Auge sich mit Flammen füllt, dass dadurch äusserlich sichtbare nicht unbeträchtliche Unterschiede verdeckt werden, aber denselben Erfolg hat in nur viel geringerem Grade und daher spürbar nur bei sehr geringen Intensitäten und Intensitätsunterschieden, die normale leise Erleuchtung durch das Augenschwarz. Sie fügt den Componenten des Unterschiedes ein gleiches Plus zu, was so lange vernachlässigt werden kann, als die Componenten stark in Verhältniss dazu sind, nicht mehr aber, wenn man mit der Verdunkelung derselben sehr weit geht. Dieses gleiche Plus wird durch verdunkelnde Gläser nicht mit abgeschwächt, und bleibt zuletzt allein übrig, wenn man mit der Verdunkelung bis zur Gränze geht, womit dann beide, nur noch durch diess Schwarz repräsentirte Componenten gleich geworden sind.

Bei dieser untern Gränze verschwindet nothwendig der Unterschied für das Auge völlig; aber schon, wenn man sich ihr nähert, muss der Unterschied undeutlicher werden, indem durch die Hinzufügung des gleichen Plus der relative Unterschied, an dessen Gleichheit die Gleichheit der Empfindung geknüpft ist, gemindert wird. Der Versuch kann also die Gültigkeit des Gesetzes direct nur so lange beweisen, als der Eindruck des innern Lichts gegen den des äussern vernachlässigt werden kann, oder als die Dunkelheit der äussern Componenten sich der des Augenschwarz nicht nähert, wo vielmehr durch das Gesetz selbst die

scheinbare Abweichung vom Gesetze gefordert wird, welche durch die Erfahrung geboten wird.

Nach Allem hat man nur die Wahl, entweder eine wirkliche Abweichung vom Gesetze nach unten anzunehmen, oder das innere Augenlicht zu acceptiren. Und wenn einige Physiologen sich hiegegen sträuben (wie es z. B. in dem schätzbaren Lehrbuche der Physiologie von Funke geschieht), vielmehr im Augenschwarz nur den Ausdruck der Ruhe des Auges finden wollen, so möchte ich zu bedenken geben, ob nicht mit den andern oben angeführten Gründen das Gesetz selbst als Grund für die Gestattung jenes innern Augenlichts anzusehen, da man von Gesetzen nicht ohne Noth Exceptionen zu machen hat. Ein Andres ist es mit der obern Gränze der Gültigkeit des Gesetzes, wo in dem Umstande, dass das Organ zu leiden anfängt, ein Grund zur Exception gefunden werden kann, der nach unten nicht statt findet.

Im Uebrigen wäre möglich, dass auch die Abweichung vom Gesetze nach oben in sofern nur eine scheinbare wäre, als der Lichtreiz bei einer solchen Stärke, wo das Organ zu leiden anfängt, keine seiner lebendigen Kraft proportionale lebendige Kraft der innern Bewegungen, an welche sich die Empfindung knüpft, mehr auslöste, und das Gesetz doch für die Beziehung dieser innern Bewegungen, in welche überall der Lichtreiz bei gründlicher Auffassung zu übersetzen ist, zur Empfindung richtig bliebe. Unstreitig können diese innern Bewegungen nicht über eine gewisse Gränze hinaus gesteigert werden, ohne das Organ zu zerstören, und die Möglichkeit ihrer weitern Steigerung selbst aufzuheben. Auch zwei ungleich starke Reize, die diese Gränze der Erregung überschreiten, werden es doch nur bis zu einem gleichen Maximum der Empfindung zu bringen im Stande sein, welches der grösstmöglichen Stärke der ihnen unterliegenden Bewegungen entspricht, und hiemit ergiebt sich eine obere Gränze des Gesetzes für die Bewährung durch den Versuch gewissermassen als eine nothwendige; aber schon die Annäherung an diese Gränze scheint eine Abweichung vom Gesetze mitzuführen. Freilich ist die Proportionalität der lebendigen Kraft der durch den Reiz ausgelösten Bewegungen mit der des Reizes in mittlern Gränzen selbst nur eine Hypothese, die es wichtig sein würde, zu bewähren, um eine Uebertragung des Gesetzes von Aussen nach Innen möglich zu machen; inzwischen liegt uns für jetzt kein sicherer Weg dazu vor, und wir lassen sie also hier dahingestellt. Be-

treffs der Beziehung des Reizes zur Empfindung bleibt immer das Gesetz mit seinen beiden Gränzen für den Versuch bestehen, wie es sich auch in Betreff der innern Verhältnisse stelle.

Es scheint am nächsten zu liegen, die obere Abweichung vom Gesetze einfach darauf zu schreiben, dass das Auge durch Abstumpfung gegen den Lichtreiz zugleich unempfindlicher gegen Lichtunterschiede wird. Ich halte es aber für sehr fraglich, ob diess die richtige Erklärung sei, indem mir scheint, dass nach dieser Erklärung das Gesetz sich überhaupt nicht so weit bewähren könnte, als es der Fall; denn schon durch etwas anhaltendes Betrachten einer weissen Scheibe auf schwarzem Papier im gewöhnlichen Tageslichte entsteht ein dunkles Nachbild, welches die Abstumpfung der Netzhaut an dieser Stelle beweist; indess sich doch unser Gesetz bei allen Versuchen, wo es sich um ähnliche Helligkeiten handelt, wohl bestätigt. Ich vermuthe hienach, dass, wenn das Auge für beide Componenten in gleichem Verhältnisse abgestumpft wird, diess nur denselben Erfolg habe, als wenn die Componenten äusserlich in gleichem Verhältnisse abgeschwächt werden, wo die Merklichkeit des Unterschiedes nichts desto weniger dieselbe bleibt. Es wäre freilich sehr wichtig, diese Vermuthung, denn eine solche ist es nur, genau zu bestätigen, indem hiemit ein anderweites psychophysisches Grundgesetz von grosser Tragweite gewonnen wäre; und ich würde mir gestätten, die Aufmerksamkeit derer, die ihren Augen noch etwas in Versuchen dieser Art zumuthen dürfen, auf die Prüfung dieses Gegenstandes hinzulenken, wenn ich nicht anderseits nur zu viel Grund hätte, vor Versuchen der Art, die unwillkührlich zu weit führen können, zu warnen.

Für den ersten Anblick scheint der Umstand, dass man nach plötzlichem Uebertritt aus dem vollen Tageslichte in eine dämmerige Kammer im ersten Augenblicke gar nichts unterscheidet, allmälig aber die Gegenstände besser und besser unterscheiden lernt, direct zu beweisen, dass die Abstumpfung durch den Lichtreiz zugleich für Unterschiede des Reizes statt findet. Aber die gleiche Erscheinung findet in umgekehrter Richtung statt. Wer nach längerm Aufenthalt im Dunkeln plötzlich in das Helle tritt, vermag anfangs eben so wenig die Gegenstände zu unterscheiden und lernt es erst allmälig; wäre Abstumpfung der Grund, so müsste er im ersten Augenblick beim Eintritt in das Helle am deutlichsten und allmälig immer schlechter unterscheiden. Hienach scheint

Abstumpfung überhaupt nicht wesentlich bei diesen Phänomenen zu sein.

Unstreitig verdienen sie erst noch ein sorgfältiges experimentales Studium, ehe man über den Grund derselben wird ins Klare kommen. Vorläufig scheint mir Folgendes nicht unwahrscheinlich. Wer aus dem Hellen schnell in das Dunkel tritt, bringt mit der geschwächten Erregbarkeit für jeden neuen Lichtreiz zugleich einen Nachklang der einmal vorhandenen Lichterregung in das Dunkel mit, der eine Erhellung des Augenschwarz bedingt, und schwache Unterschiede nach dem Principe des Verlöschens der Sterne im Tageslichte übertäubt. Umgekehrt, wenn Jemand aus dem Dunkeln in das Helle tritt, braucht der Lichteindruck eine gewisse Zeit, sich bis zu voller Stärke geltend zu machen; und wenn es wahrscheinlich ist — denn etwas Sichres ist mir darüber nicht bekannt, — dass ein intensiver Nachklang des Lichtes im Auge verhältnissmässig schneller sinkt, als ein schwacher, so ist eben so wahrscheinlich, dass der Eindruck eines intensiven Lichtes sich anfangs verhältnissmässig zu seiner definitiven Grösse weniger geltend macht, als der eines schwachen; womit der Unterschied desselben vom schwachen anfangs minder bemerklich sein muss, als später.

Hienach würde das in Frage kommende Phänomen nach seinen beiden Seiten nur unter die allgemeine Kategorie der Phänomene gehören, welche einerseits von der Nachdauer des Lichteindrucks im Auge, anderseits der zur Entwicklung desselben nöthigen Zeit abhängen. Schon bei kurzen Versuchen mit Lichtern, welche das Sehfeld partiell einnehmen, machen sich solche in augenfälliger Weise geltend, und so kann es an sich nicht unerwartet erscheinen, dass die lange anhaltende Einwirkung von Licht oder Dunkel im ganzen Sehfelde auch Erfolge der Art von Erheblichkeit und einer gewissen Nachhaltigkeit nach sich zieht. Doch behält diese Erklärung bis auf Weiteres noch etwas Unmassgebliches.

Im Laufe einer langen Versuchsreihe über die Empfindlichkeit für Gewichtsunterschiede, die ich anderweit mittheilen werde, habe ich durch eine grosse Zahl vergleichender Versuche entschieden constatirt, dass die stärkste Ermüdung der Arme durch Heben starker Gewichte die Empfindlichkeit für Gewichts*unterschiede* nicht vermindert, sondern entweder etwas erhöht, oder, was ich für wahrscheinlicher halte, ohne es noch entschieden behaupten zu können, an sich unver-

ändert lässt; indem die beobachtete Erhöhung weder gross noch constant genug war, um nicht möglicherweise von Zufälligkeiten oder von einer Nebenwirkung abzuhängen*). Meine Versuche darüber sind noch nicht abgeschlossen. Nur würde es, abgesehen von dem Zweifel, der in angegebener Hinsicht noch besteht, nicht wohl statthaft sein, von dem, was in dieser Hinsicht im Gebiete der Schwere gilt, einen Schluss auf das, was im Gebiete des Lichtes gilt, zu machen. Der durch Gewichte ermüdete Arm fühlt die Last von Gewichten stärker, das durch Licht ermüdete Auge fühlt den Lichtreiz schwächer; und es könnte sich dieser Gegensatz in der Empfindung der absoluten Reizgrössen allerdings auch auf die Empfindung ihrer Unterschiede übertragen.

Eine allgemeinere Bemerkung mag hiebei Platz finden. Die noch so unklare Lehre von der Reizbarkeit würde vielleicht einiges Licht mehr gewinnen, wenn man überhaupt mehr als bisher jene beiden Arten der Empfindlichkeit, die für Reizunterschiede und für absolute Reizgrössen, unterschiede, und besonders nach ihren Gesetzen und Abhängigkeitsverhältnissen untersuchte.

Das Beispiel der Lichtempfindung hat gezeigt, dass man die Frage wohl aufwerfen kann, ob die eine überhaupt eine Function der andern sei; eine allgemeine Entscheidung darüber wäre höchst wichtig, indess man bisher die Frage selbst noch nicht erhoben, ja die Unterscheidung, woran sie sich knüpft, nicht mit Klarheit gemacht hat.

Hienach kehren wir zur Betrachtung unseres Gesetzes zurück.

Die bisherigen Bewährungen unseres Gesetzes bezogen sich auf sehr kleine Unterschiede, und ich habe schon bemerkt, dass eine directe Bewährung des Gesetzes für grössere Unterschiede Schwierigkeiten in der Unsicherheit des Urtheiles über die Gleichheit grösserer Unterschiede findet. Doch gibt es eine sehr schöne und merkwürdige Bewährung des Gesetzes für grössere Unterschiede, deren Betrachtung dem zweiten Abschnitte dieser Abhandlung vorbehalten bleibt. Zunächst will ich, ohne viel Gewicht darauf zu legen, eines Versuches gedenken, der, ohne streng beweisend zu sein, doch ganz gut mit der

---

*) Hiegegen befördert Ermüdung entschieden die Neigung, das zu zweit aufgehobene von zwei verglichenen Gewichten für schwerer als das zuerst aufgehobene zu halten; ein constanter Fehler, der sich jedoch durch Entgegensetzung eliminiren lässt, so dass das oben angegebene Resultat nicht davon afficirt ist.

Voraussetzung der Gültigkeit des Gesetzes für etwas grössere als nur eben merkliche Unterschiede stimmt.

Man bedecke das eine Auge rasch mit der Hand, während man nach einer irgendwie beleuchteten Fläche sieht. Es wird sich im Momente des Verdeckens eine Art leichter Schatten über die Fläche legen, welcher daher rührt, dass das Licht, dessen Wirkung sich vermöge des Zusammenwirkens der identischen Netzhautstellen in beiden Augen verstärkt, jezt von dem Auge abgehalten wird. Dieser Schatten ist gleich der Differenz der Helligkeiten, die der Gebrauch zweier Augen und die der Gebrauch eines Auges gewährt, welche Differenz begreiflich im Verhältniss der Helligkeit der betrachteten Fläche steht, wodurch der Fall unter unser Gesetz tritt. Nun kann man Flächen von der verschiedensten Helligkeit (nur aus angegebenem Grunde nicht gar zu dunkel) nehmen, z. B. in das Feuer, den hellen Himmel, auf eine Stubenwand, Abends auf den hellen Milchglasschirm der Studirlampe, das Papier vor sich u. s. w. blicken, man wird immer denselben schwachen Schatten sich über die Fläche legen sehen. Mag man sich nun auch nicht getrauen, die vollkommene Gleichheit der leichten Schattenempfindung in allen diesen Fällen mit völliger Entschiedenheit zu verbürgen, so ist jedenfalls gewiss, dass bei so ungeheuren Unterschieden, als beim Blick in das Feuer und auf eine Wand in der Grösse der absoluten Helligkeitsdifferenz statt finden, die kleine Unsicherheit, ob der Schatten auch genau gleich dunkel scheine, nicht in Betracht kommt.

Inzwischen ist fraglich, in wiefern man die grössere Helligkeit, welche das Sehen mit zwei Augen gewährt, der grösseren Helligkeit, welche die stärkere Erleuchtung des einen gewährt, äquivalent setzen kann. Gewiss ist, dass sie nicht einer doppelten Beleuchtung gleich zu setzen. In der That habe ich gefunden, dass, wenn ich Abends von zwei gleichen und in gleichem Abstande von der Wand stehenden Lichtern, welche die Stube erhellten, eins auslöschte oder mit einem umgekehrten Topf bedeckte, was bequem ist, den Versuch oft hinter einander zu wiederholen, die Helligkeit der Stubenwand sehr erheblich mehr vermindert erschien, als wenn ich ein Auge schloss, während beide Lichter brannten. Prof. Ruete, mit welchem zusammen ich diesen Versuch wiederholte, erklärte sich entschieden in demselben Sinne. Manche Personen wollen sogar nicht glauben, dass die Helligkeit durch Schluss des einen Auges überhaupt vermindert werde, indem sie jenen

leichten Schatten übersehen. Ich will also auch bei dem Zweifel über die Deutung des Zusammenwirkens beider Augen bei der Lichtempfindung auf den Versuch mit der Augenbeschattung nicht viel bauen, wenn er schon unstreitig in unser Gesetz hineintritt, und eine Erwähnung bei dieser Gelegenheit verdiente.

Die Wichtigkeit, welche ich dem Gesetze beilege, ruht in mehreren Umständen. Es hat sich gezeigt, dass wir zur Orientirung im Gebiete alltäglicher Erscheinungen desselben wesentlich bedürfen. Es lässt sich ferner leicht zeigen, dass dasselbe bei photometrischen Messungen mehrfach in Betracht kommt. So sind zwei Sterne, die auf verschieden hellem Himmelsgrunde gleich hell, d. i. gleich abweichend in der Helligkeit vom Grunde erscheinen, nicht gleich hell; und das Verhältniss ihrer wahren Helligkeiten ist nur mit Rücksicht auf unser Gesetz zu bestimmen.

Doch diese Puncte sind nur von untergeordneter Bedeutung gegen den Gesichtspunct, dass wir in unserm Gesetze das erste feste erfahrungsmässige Fundamentalgesetz für eine Lehre gewonnen haben, die sich bisher blos in Speculationen bewegt hat, die Lehre der Beziehungen nämlich zwischen Körper und Seele; indem es ein quantitatives Verhältniss zwischen den Zuwüchsen des Licht-Reizes und der Empfindung feststellt. Gleiche Empfindungszuwüchse entstehen danach durch gleiche relative Reizzuwüchse. Die Wichtigkeit dieses Gesetzes wird sich durch seine Verallgemeinerung im dritten Abschnitt steigern; und eine weitere Steigerung dieser Wichtigkeit lässt sich aus dem Gesichtspuncte voraussehen, dass die functionelle Beziehung zwischen Reiz und Empfindung sich der Natur der Sache nach in eine solche zwischen der durch den Reiz innerlich ausgelösten Bewegung, an welcher die Empfindung hängt, und dieser selbst übersetzt; so dass wir hoffen dürfen, in dem Gesetze die Brücke zur Erkenntniss dieser innern Beziehung zu finden; wozu freilich erst noch gehört, dass die functionelle Beziehung zwischen dem Reiz und der dadurch innerlich ausgelösten Bewegung selbst erst genauer erkannt werde, was doch der Erforschung mindere Schwierigkeiten darbieten dürfte, als wenn es die directe Erkenntniss jener innern Beziehung gölte, und vielleicht nur der Prüfung der einfachsten Hypothese durch die Gesammtheit der Erfahrungen bedarf.

Ohne hierauf warten zu müssen, beweist das Gesetz seine allgemeine Wichtigkeit für das psychophysische Gebiet dadurch, dass es nach einer, auf Grund jenes Verhältnisses von Empfindungszuwüchsen und

Reizzuwüchsen aufgestellten Differenzialformel und daraus abgeleiteten Integralformel gestattet, den Reiz so zu sagen als Elle an die Empfindung anzulegen, so dass man, so weit seine Gültigkeit reicht, nicht mehr darauf beschränkt ist, wie bisher, zu sagen, dass eine Empfindung stärker als die andre, sondern wie vielmal so stark als die andre sie sei. Man wird auf jenem Wege unter Mitrücksicht auf das Erfahrungsdatum, dass jeder Reiz nicht minder als jeder Reizunterschied schon bei einem endlichen Werthe seiner Grösse unmerklich wird, auf eine functionelle Beziehung zwischen Reiz und Empfindung geführt, welche wesentlich in die hineintritt, die schon früher von Euler für die Beziehung der Schwingungszahlen zu den Tonhöhen aufgestellt und von Herbart und Drobisch neu ins Auge gefasst worden ist; eine Uebereinstimmung, die nothwendig ist, da unser im Gebiet intensiver Reize bewährtes Gesetz sich im Gebiete der Schwingungszahlen bezüglich der Tonhöhen nicht minder bewährt, ja hier nicht erst besonderer Versuche zur Bewährung bedarf, da es eine unmittelbare Aussage der Empfindung ist, dass gleichen Verhältnissen der Schwingungszahlen, womit gleiche relative Unterschiede derselben gegeben sind, gleiche Unterschiede der Tonhöhen entsprechen.

Auf die genauere Entwicklung dieses Princips des psychischen Masses, welches übrigens noch der Verallgemeinerung über die Gränzen unseres Gesetzes hinaus fähig ist, werde ich jedoch hier nicht eingehen, indem ich diess meinen demnächst zu veröffentlichenden „Elementen der Psychophysik" vorbehalte; um mich hier des Weiteren blos mit dem Gesetze selbst zu beschäftigen. Man kann aber eine vorläufige Erläuterung dieses Massprincipes darin finden, dass ich gegen den Schluss des folgenden Abschnittes kurz angebe, wie sich die Schätzung der Sterngrössen demselben unterordnen lassen würde. Nun hat diess, einigen mathematischen Autoritäten, deren Namen einer Gewähr gleich gilt, von mir vorgelegte psychische Massprincip in seiner Stützung auf unser Gesetz keinem Einwurf unterlegen, sofern nur das Gesetz selbst begründet sei; wohl aber ward von einer dieser, von mir hochgeachteten, Autoritäten ein Einwand gegen diese Begründung aus der Weise, wie die Schätzung der Sterngrössen thatsächlich sich gestellt hat, entnommen, und hiemit auch unser Massprincip in Frage gestellt, als gestützt auf ein Gesetz, welchem diese Schätzungsweise nicht entspricht. Die Beziehung dieser Schätzung zu unserm Gesetze, die

genauere Betrachtung des Einwandes und die Hebung desselben, die vielmehr in eine schöne Bestätigung unseres Gesetzes ausschlagen wird, bilden den Hauptgegenstand des folgenden Abschnittes.

## ZWEITER ABSCHNITT.

Die Schätzung der Sterngrössen ist seit Alters (Hipparch) bekanntlich nicht nach ihrem photometrischen Lichtwerthe, sondern nach dem Eindrucke, den dieselben auf das Auge machen, geschehen, in solcher Weise, dass die Astronomen die Sterne 1., 2., 3. Grösse durch gleiche scheinbare Helligkeitsunterschiede aus einander zu halten gesucht haben, dabei aber die Nummern der Sterngrössen abnehmen lassen, während die scheinbaren Helligkeiten zunehmen.

Nach unserem Gesetze nun kann der empfundene Helligkeitsunterschied zwischen den auf einander folgenden Grössenclassen nur gleich sein, sofern das photometrische Verhältniss zwischen denselben gleich ist, oder der arithmetischen Reihe der Sterngrössen eine geometrische der Sternintensitäten zugehört, um mit Sternintensität kurz den photometrischen Werth eines Sternes zu bezeichnen. Die Frage, ob die Reihe der Sterngrössen und Sternintensitäten wirklich dieses Verhältniss zu einander zeigen, kann daher in der That als eine Frage, ob sich unser Gesetz bestätigt, gefasst werden.

Nun aber zeigen sie nach den Angaben, welche darüber in einem Werke, das als das Resumé der Resultate der gründlichsten Forschungen im Felde der Natur anzusehen, und wenn irgend eines berechtigt ist, als Autorität angerufen zu werden, d. i. in v. Humboldt's Kosmos, nicht dieses, sondern ein damit unvereinbares, Verhältniss, und zwar dieses auf Grund von Untersuchungen und nach darauf gestützter eigener Ansicht eines Astronomen ersten Ranges, dem wir überhaupt die massgebendsten Untersuchungen über diesen Gegenstand verdanken, d. i. John Herschel's. v. Humboldt sagt (Kosmos III. S. 136):

„Dabei hat sich denn das allerdings merkwürdige Resultat gefunden, dass unsere gewöhnlichen Sterngrössen (1, 2, 3...) ungefähr so abnehmen, wie wenn man einen Stern erster Grösse nach und nach in die Entfernungen 1, 2, 3 brächte, wodurch seine Helligkeit nach photo-

metrischem Gesetz die Werthe $1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16} \ldots$ erlangen würde (Capreise p. 371, 372; Outlines p. 521, 822); um aber die Uebereinstimmung noch grösser zu machen, sind unsere bisherigen Sterngrössen nur um etwa eine halbe Grösse (genauer 0,41) zu erhöhen, so dass ein Stern 2,00 Grösse künftig 2,41 ter Grösse genannt wird, ein Stern 2,5ter Grösse künftig 2,91 Grösse u. s. f."

Und wie man sich aus den angezogenen Werken Herschel's überzeugen kann, ist diess die eigene Auffassung Herschel's.

Hienach aber entspricht den auf einander folgenden Grössenclassen keine geometrische Reihe der Intensitäten, was fodern würde, dass jede durch Multiplication mit derselben Zahl aus der vorhergehenden hervorginge, sondern eine quadratische Potenzenreihe der Brüche $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4} \ldots$, deren Nenner durch die Nummern der auf einander folgenden Grössenclassen gegeben werden. Sollte die Reihe eine geometrische sein, so müsste sie unter möglichster Annäherung in einfachen Zahlen an die obigen Zahlen, statt

$$1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16} \ldots$$

vielmehr sein

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16} \ldots,$$

wo der Exponent $\frac{1}{2}$ ist.

Die Möglichkeit, dass von hier aus ein Einwand gegen das Gesetz erwachsen könne, war mir schon vor Erhebung desselben entgegengetreten, und was ich zunächst darauf zu erwiedern vermochte, bevor ich mir noch die Herschel'sche Originaluntersuchung verschaffen konnte, deren Einsicht eine vollständigere Erledigung möglich gemacht hat, war Folgendes, was mir auch jetzt noch bei Beurtheilung der Sachlage des Gegenstandes Rücksichtsnahme zu verdienen scheint.

Die Controle unseres Gesetzes durch die Schätzung der Sterngrössen erscheint von vorn herein aus mehr als einem Gesichtspuncte precär, so dass im Falle eines Conflicts des Gesetzes mit der Schätzung der Sterngrössen die Controle wohl eher im umgekehrten Sinne zu suchen wäre. In der That kann unser Gesetz durch die im vorigen Abschnitte angeführten Versuche verschiedener Beobachter, die keiner erheblichen Unsicherheit in den Gränzen, in denen sich das Sehen gewöhnlich bewegt, Raum lassen, als wohl constatirt angesehen werden. Nur das Bedenken bleibt übrig, dass es doch nicht ausdrücklich für helle Lichtpuncte und *grössere als eben merkliche* Differenzen constatirt

ist; und ich will diess Bedenken um so weniger abschwächen, als es sich durch den Erfolg der folgenden Untersuchung von selbst niederschlägt. Abgesehen davon aber ergiebt sich aus jenem Gesetze mit mathematischer Nothwendigkeit die Reihung der Sterngrössen nach geometrischer Progression der Intensitäten, wenn sie ungleich viel für die Helligkeitsempfindung differiren sollen. Wogegen die directe Bestimmung der Sterngrössen nach gleich empfundenen Helligkeitsunterschieden überhaupt nach Massgabe unsicherer wird, als die Unterschiede grösser werden.

Einen directen Beweis dafür, dass man der Schätzung der Sterngrössen durch die Astronomen jedenfalls im Einzelnen nicht zu viel zutrauen darf, liefert die Tabelle, welche J. Herschel (Capreise S. 334 und 337) zur Vergleichung der angenommenen Sterngrössen mit der Reihenfolge der Lichtstärke gegeben hat, wie sie aus seiner Methode der Sternreihung (method of sequences) hervorgegangen ist, eine Methode, die nach der Weise, wie sie ausgeführt worden (s. unten), keine bedeutenden Irrthümer über die Reihenfolge der Lichtstärke zulässt (vergl. in dieser Hinsicht Capreise S. 305. 327).

Hier folgt ein Auszug aus diesen Tabellen. Darin sind die Sterne nach der Reihenfolge der Lichtstärke angeführt, die sie jener Methode zufolge wirklich haben, indess die beistehenden Zahlen die angenommenen Grössenummern derselben geben *). Sollten nun diese in richtiger Folge bestimmt sein, so müssten sie in continuirlicher Folge zunehmen, wie die Helligkeit, nach der die Tabelle von der grössten anhebend geordnet ist, abnimmt, aber man findet grosse Unregelmässigkeiten darin. Es ist nur zu bemerken, dass der Auszug vorzugsweise auf die Hervorhebung solcher Unregelmässigkeiten gerichtet gewesen, also nicht als charakteristisch für die ganze Skala der Schätzungen anzusehen ist.

| | | |
|---|---|---|
| Sirius 1. | α Hydrae 2. | κ Centauri 3. |
| β Crucis 2. | δ Canis 3,4 | q Carinae 5. |
| Regulus 1. | γ Leonis 2. | γ Phoenicis 5. |
| α Gruis 2. | λ Argus 3,4. | δ Lupi 5. |
| γ Crucis 2,3. | ι Argus 2. | ζ Lupi 4. |
| ζ Orionis 3. | δ Corvi 3. | ω Hydri 5. |
| β Argus 2. | ι Corvi 4. | δ Ceti 4. |
| ε Sagittarii 3. | α Arae 3. | ζ Hydri 5. |
| Θ Scorpii 5. | N Velorum 5. | |

Zum Theil mögen allerdings die (in vorstehender Tabelle sicht-

*) Sie sind aus dem Katalog von 2881 Sternen entnommen, den die Astronomical Society im J. 1827 veröffentlicht hat.

baren) starken Abweichungen recipirter Sterngrössen von der richtigen Folge der Helligkeit daher rühren, dass die Helligkeit derselben im Laufe der Zeiten Veränderungen erlitten hat, ohne dass man ihnen dessbalb eine andre Stelle gegen früher bei der Katalogisirung gegeben hat, was auch John Herschel vermuthet (Capreise S. 305); indess wird begreiflich dadurch das Fussen auf der Folge der Sterngrössen beim Vergleich derselben mit den photometrischen Werthen um nichts sicherer. „Nothing indeed, sagt Herschel, — can be more inconvenient and misleading, than to find in our catalogues magnitudes assigned to stars, so far above or below the truth, that a single glance at the heavens suffice to expose the error.“ (Capreise S. 305).

Was die Schätzungen der Grössenclassen im Ganzen anlangt, so findet Struve durch eine methodische Vergleichung, dass die Bestimmungen über die Sterngrössen, die in seinem Katalog der Dorpat'schen Beobachtungen und in seinen Mensuris micrometricis gegeben sind, mit den Argelander'schen bis zur fünften Classe merklich übereinstimmen, dass aber die Grösse 6 nach Argelander gleich der Grösse 5,84 nach den Mens. micr. und der Grösse 6,65 nach Bessel gleich zu achten, und dass sich überhaupt folgende Grössen in den mikrometrischen Messungen (*M*) und nach Bessel (*B*) entsprechen*):

| *M* | | *B* |
|---|---|---|
| 6,00 | = | 6,82 |
| 7,00 | = | 7,64 |
| 8,00 | = | 8,49 |
| 9,00 | = | 9,04 |

Und v. Humboldt bemerkt (Kosmos III. S. 100), dass die Benennung der teleskopischen Grössen theilweis sehr unbestimmt sei, da Struve bisweilen zur 12. und 13. Grösse zähle, was J. Herschel 18 bis 20 nennt

Zu dieser Unsicherheit der seitherigen Schätzung der Sterngrössen tritt nun eine mindestens eben so grosse Unsicherheit in der seitherigen photometrischen Bestimmung der Sternintensitäten, worüber sich u. a. v. Humboldt in seinem Kosmos III. S. 102 erklärt. In der That weichen die von verschiedenen Beobachtern bestimmten Sternintensitäten vielfach ausnehmend von einander ab.

*) Fechners Centralbl. 1853. S. 467, nach Struve stellar. fix. pos. med. p. CXXXXVI.

So verhielt sich gegen Arctur = 100,0 Antares wie
23,4 nach Steinheil
34,0 ,, Seidel
43,7 ,, Struve
56,2 ,, J. Herschel.

Gegen Capella = 100,0 Spica wie
44,9 nach Struve
59,4 ,, J. Herschel
59,8 ,, Seidel
97,0 ,, Steinheil u. s. f.

Nun leuchtet ein, dass zwei Grössen, Sterngrössen und Sternintensitäten, welche beide an grosser Unsicherheit in der Bestimmung leiden, ein um so unsichreres Resultat geben müssen, wenn man sie in Verhältniss zu einander betrachten will.

Unstreitig lägen im Vorigen Gründe genug, in einer etwaigen Abweichung der Resultate, welche die Vergleichung der Grössen- und Intensitäten-Reihe von den Foderungen unseres Gesetzes zeigen möchte, kein entscheidendes Argument gegen dasselbe begründet zu finden; dagegen kann es nur zu Gunsten desselben sein, wenn sich trotz jener Gründe der Unsicherheit eine approximative Uebereinstimmung damit findet. Denn, wenn überhaupt eine in Zahlwerthen ausdrückbare Beziehung zwischen Lichtempfindung und photometrischer Intensität naturgesetzlich begründet ist, behält die richtige Auffassung dieser Beziehung vor jeder falschen einen Vorrang der Wahrscheinlichkeit, indem sie eben nur insofern die richtige ist, als sie einen solchen begründet; nur dass da wo blos Wahrscheinlichkeit besteht, auch Abweichungen im Einzelnen, und blos Approximationen im Mittel zu erwarten sind. Die Uebung eines astronomischen Auges, die stete Rückkehr desselben immer zu denselben Objecten, das Interesse einer Orientirung durch eine Reihung der Sterngrössen mittelst gleich aus einander gehaltener Unterschiede, welches die Aufmerksamkeit verschärfen musste, muss aber auch die Wahrscheinlichkeit einer Annäherung an das Richtige steigern, und die zwar nicht vollständige aber nahe Uebereinstimmung in der Schätzung mindestens der nicht teleskopischen Grössenclassen durch die verschiedenen Astronomen verstärkt das Gewicht, was man dieser Schätzung beizulegen hat. Denn hat auch unstreitig das alte Herkommen einen Hauptantheil an jener Uebereinstimmung, so würde sie sich doch nicht haben halten können, wenn sie dem natürlichen Mass-

stabe der Empfindung widerspräche. Und so wird das Gewicht dieser Schätzung doch auch nicht zu gering anzuschlagen sein.

Was die Unsicherheit in der Intensitätsbestimmung der Sterne anlangt, so ist sie überhaupt am grössten bei den hellsten Sternen und den schwächsten Sternen; und wenn sich sehr starke Abweichungen zwischen den durch verschiedene Beobachter gegebenen Bestimmungen im Einzelnen finden, so ist diess noch kein entscheidender Grund, mittlern Intensitätsbestimmungen für ganze Grössenclassen überhaupt das Zutrauen zu versagen, auf welche es doch definitiv hier nur ankommt.

Es wird sich nun zeigen, dass die Approximation der Ergebnisse von Herschel's Untersuchung an unser Gesetz vermöge einer glücklichen Ueberwindung der hauptsächlichsten Ursachen der Unsicherheit, die wir angeführt haben, in der That viel weiter reicht, als man nach dem Vorausgeschickten hätte erwarten mögen, und dass der Widerspruch von Herschel's eigner Auffassung hiegegen eine leichte und zweifelsfreie Aufklärung zulässt. Und ich gestehe, dass es mir eine um so erfreulichere Ueberraschung war, diess bei näherer Untersuchung zu finden, als ich anfangs glaubte, schon genug gethan zu haben, wenn ich nur in eben angegebener Weise den entscheidenden Widerspruch der Sterngrössen gegen das Gesetz bei Seite geschoben. Ausserdem wird das, was aus den Herschel'schen Untersuchungen hervorgeht, noch seine Verstärkung erhalten durch das, was aus schon früheren, nur minder ausführlichen Untersuchungen Steinheil's folgt, ja durch diesen schon in Uebereinstimmung mit unserm Gesetze ausgesprochen vorlag.

Auf die nähere Untersuchung dieses ganzen Gegenstandes gehe ich jetzt ein, und halte mich bei dem Widerspruche, in dem ich mich in dieser Hinsicht gegen so grosse Autoritäten finde, bei dem Interesse, was der Gegenstand an sich und der Wichtigkeit, die er für die Frage unseres Gesetzes hat, bei dem Mangel endlich einer schon hinreichenden Discussion desselben, verpflichtet, alles das möglichst vollständig vorzulegen, was Jeden in den Stand setzen kann, sich ein eigenes Urtheil über den Gegenstand zu bilden, und die von mir gezogenen Resultate durch eigene Rechnung zu controliren.

Photometrische Bestimmungen über die Sternintensitäten sind von William Herschel*), John Herschel, Steinheil, Struve d. A., Laugier.

*) William Herschel in Philos. transact. 1796 und 1799; auch in Bode's Jahrb. f. 1809 und 1810. — John Herschel in Results of astronomical Observations

Seidel, Secchi nach verschiedenen Methoden geschehen, von denen sich jedoch die der beiden letzten fast nur auf Sterne 1. Grösse, die von Laugier blos auf 15 Sterne verschiedener Grösse beziehen und die von W. Herschel nach einer unvollkommenen Methode gemacht sind; wonach nur die Bestimmungen von J. Herschel, Steinheil und Struve für eine umfassendere Vergleichung der Sterngrössen mit den Sternintensitäten in Betracht kommen können. Insofern es sich aber um eine Controle unseres Gesetzes handelt, sind von diesen nur die von J. Herschel und von Steinheil in Rücksicht zu ziehen, da Struve einen sehr indirecten Weg photometrischer Bestimmung eingeschlagen hat, welcher vielmehr der Controle durch directere Methoden bedarf, als dass er eine solche gewähren könnte.

Was nun die Untersuchungen von Herschel und Steinheil anlangt, so ruhen die des ersteren auf einer ausgedehntern Grundlage mehr eingehender Beobachtungen (an 68 Sternen 1. bis 3,78. Grösse), und sind absichtlich auf den Zweck einer Ermittelung der Beziehung zwischen Grössen und Intensitäten gerichtet gewesen; indess die von Steinheil nach seiner eignen Erklärung nur vorläufig, hauptsächlich als Erläuterungsbeispiele der Anwendung seiner prismenphotometrischen Methode (nach Beobachtug an 30 Sternen 1. bis zwischen 7. und 8. Grösse) aufgestellt sind. Da nun hienach J. Herschel's Untersuchungen als die massgebenderen gegolten haben, und der scheinbare Einwand gegen unser Gesetz sich blos daher erheben konnte, werden wir es auch hier zuerst mit der Discussion derselben zu thun haben.

Was die Stern grössen anlangt, so ist J. Herschel im Allgemeinen bei den bisher angenommenen Grössenclassen stehen geblieben;

---

made during the years 1834. 5. 6. 7. 8. at the cape of good hope by J. F. W. Herschel. London. 1847. (Im Text von mir kurz als Capreise citirt) p. 353. Einiges Allgemeine auch in s. Outlines p. 519. Auszugsweise in v. Humboldt's Kosmos III. 136. — Steinheil, Elemente der Helligkeitsmessungen am Sternenhimmel, gekrönte Preissch., in den Abhandl. der kön. bair. Akad. der Wiss. 1837. — Struve, Etudes d'Astronom. stellaire und Stellarum fixarum inprimis duplicium et multiplicium positiones mediae. Petropol. 1852. (Auszug in Fechner's Centralbl. 1853. Nr. 25.). — Seidel, in den Abhandl. der kön. bair. Akad. 1852. Bnd. VI. 539 und Fortsetzung in München. gel. Anz. 1853. Nr. 29 und 30 (Auszug aus beiden Abhandl. in Fechner's Centralbl. 1853. Nr. 49). — Laugier in Arago's Mémoires sur la photométrie p. 265; kurz in dessen populärer Astronomie (herausg. von Hankel) Th. I. S. 312. Die nicht sehr ausgedehnter Resultate von Secchi kenne ich nur aus der Anführung in Karstens Fortsch. 1852. S. 272.

wie sie im Katalog der Astronom. Soc. verzeichnet sind; und hat nur die einzelnen Sterne nach seiner (Capreise p. 304 ff. beschriebenen) Method of Sequences diesen Classen in richtigerer, d. h. mit der Reihenfolge der Intensitäten übereinstimmenderer Weise als bisher eingeordnet; so dass sie die im Allgemeinen angenommene seit Alters übliche Schätzung der Sterngrössen nun auch im Einzelnen richtig repräsentiren. Nach seiner Bemerkung (Capreise p. 327) konnte der Irrthum in der richtigen Schätzung kaum irgendwo $\frac{1}{10}$ einer Sterngrösse betragen. Insofern er nun seine photometrischen Einzelbestimmungen mit diesen richtigeren Einzelbestimmungen in Beziehung setzt, reducirt sich eine Seite der Unsicherheit des Vergleichs, die wir vorher im Allgemeinen geltend machten.

„In this method, stars visible at one time, and favourably, or rather not unfavourably situated for comparison, are arranged in sequences by the mere judgment of the unaided eye, and these sequences treated according to a certain peculiar and regular system (to be explained presently), are employed to obtain in are unbroken series, a graduating scale of steps, from the brightest down to the faintest stars visible to the eye. Numerical values are then subsequently assigned, and, as the scale in this case is entirely arbitrary, and no photometric relations but those of more and less bright are used, these numbers may be so assigned as to conform on a general average to any usage or nomenclature which may be fixed upon or taken as the general average of astronomers. Waving all discussion of the greater or less propriety of magnitudes assigned by this or that observer, I have thought it best, on the whole to adopt as my standard of astronomical nomenclature, the catalogue of the Astronomical Society of 2881 stars published in 1827, being well aware that the magnitudes there assigned are those of different epochs and of different observers (but all of eminence) and that in individual cases many and considerable errors exist. The mode in which I have eliminated those errors, and secured a true coincidence between the results of my observations and the magnitudes in the catalogue in question, taken as a whole, will be explained in due course, and will, I believe, be found quite free from objection." (Capreise p. 305.)

Was die photometrischen Bestimmungen anlangt, so wurden sie mittelst seines Astrometers gewonnen, indem er (Capreise p. 355; Outlines p. 324) die wirklichen Sterne mit einem künstlichen verglich, der ein durch eine Linse von kurzer Brennweite erzeugtes kleines Mondbild ist, und dessen Entfernung vom Auge messbar geändert wird, bis es dem wirklichen Sterne gleich erscheint. Das Mondlicht ward vor der Bildung des künstlichen Sterns durch totale Reflexion von der Basis eines Prisma so abgelenkt, dass der künstliche Stern nahe in derselben

Richtung gegen einen dunkeln Hintergrund, als der natürliche am Himmel, gesehen ward. Die Intensität des künstlichen Sterns ward als im umgekehrten Verhältniss des Quadrats des Abstandes vom Auge angenommen.

Es wurden blos Intensitäten von derselben Beobachtungsnacht direct verglichen, und die Resultate der verschiedenen Nächte dann auf geeignete Weise auf einander reducirt und combinirt, wie ausführlich (Capreise p. 363) von Herschel aus einander gesetzt worden ist.

Die Beobachtungen sowohl bezüglich der Reihung der Sterne nach der Method of Sequences als zur Bestimmung der Intensitäten wurden am Cap der guten Hoffnung angestellt, wo die Klarheit des Himmels viel günstigere Bedingungen stellt, als unter unsern Breiten; und zwar stets nur bei vollkommen (perfectly) heitern Nächten. Zwar wurden nicht alle Sterne in gleicher Höhe beobachtet, doch, sagt Herschel (p. 306) „ward Sorge getragen, niedere Höhen zu vermeiden, und die ausnehmende Klarheit der Atmosphäre am Cap gestattete, bis 60° oder 70° vom Zenith nach allen Richtungen zu gehen, ohne dass ein wesentlicher Irrthum von daher zu besorgen war." Es wurden überhaupt blos Sterne in nicht weniger als 60° bis 70° und nicht mehr als 102° 43′ von dem, nie vollen, Monde beobachtet.

So viel von der allgemeinen Sachlage der Herschel'schen Untersuchung. Kehren wir hienach zur Gegenüberstellung der, auf Grund derselben von ihm vorgezogenen, quadratischen Potenzenreihe und der durch unser Gesetz gefoderten geometrischen Reihe der Intensitäten der auf einander folgenden Grössenclassen zurück:

$$1,\ \tfrac{1}{4},\ \tfrac{1}{9},\ \tfrac{1}{16}$$

$$\tfrac{1}{2},\ \tfrac{1}{4},\ \tfrac{1}{8},\ \tfrac{1}{16}.$$

Wie man sieht, ist die Abweichung zwischen beiden bei der ersten Grössenclasse am stärksten, sofern die Intensität nach letzter Reihe nur $\frac{1}{2}$ von derjenigen beträgt, welche die erste Reihe der 1. Grössenclasse zuweist; wogegen die Abweichung $\frac{1}{8}$ von $\frac{1}{9}$, welche bei der dritten Grössenclasse statt findet, in Betracht der Schwierigkeiten der genauen Bestimmung der Intensitäten und des Zugeständnisses, dass auch die Potenzenreihe nur eine ungefähre sei, nicht in erheblichen Anschlag kommen kann. Bei der 2. und 4. Grössenclasse stimmen beide Reihen genau zusammen, und über die 4. Grössenclasse hinaus erstrecken sich Herschel's photometrische Messungen nicht. Also wird es zunächst und

hauptsächlich nur gelten, den Widerspruch, der sich Seitens der ersten Grössenclasse darbietet, zu heben. In dieser Hinsicht ist Folgendes zu bemerken.

1) Die Intensität, welche Herschel der 1. Grössenclasse in Verhältniss zu den andern zugeschrieben und bei der Bildung der Potenzenreihe zu Grunde gelegt hat, ist keineswegs diejenige, welche den Sternen 1. Grösse im Mitel zukommt, sondern welche einem der allerhellsten, α Centauri, zukommt, den Herschel willkührlich und absichtlich als Repräsentant der Sterne 1. Classe gewählt hat, um mit der Reihe der Sterngrössen eine quadratische Potenzenreihe der Intensitäten in Beziehung zu setzen, für welche er (wie aus Capreise p. 372, Outlines p. 521 hervorgeht) eine Vorliebe aus dem Gesichtspuncte hatte, dass dann die Skala der Sterngrössen zugleich als Skala der Entfernungen der Sterne dienen kann. Unter den von Herschel photometrisch bestimmten 15 Sternen 1. Grösse nimmt α Centauri die dritte Stelle ein*). Bei der grossen Abweichung der Intensitäten der Sterne 1. Classe unter einander muss es aber überhaupt immer möglich sein, wenn man die Auswahl eines derselben als Repräsentanten der 1. Classe willkührlich trifft, diese mit irgend einer beliebigen Voraussetzung quadriren zu machen.

Nach Herschel's eigenen Bestimmungen ist der hellste unter den von ihm photometrisch bestimmten 15 Sternen 1. Grösse 15½mal so intensiv als der schwächste (Sirius 4,053, Fomalhaut 0,262). Seidel findet unter den 12 von ihm bestimmten Sternen 1. Grösse den hellsten 16,1mal so stark als den schwächsten (Sirius 4,57; Pollux 0,284). Zwischen diesen Extremen kommen die verschiedensten Zwischenwerthe vor.

2) Herschel bemerkt ausdrücklich (Outlines p. 523) dass als ein „typical specimen" der Sterne 1. Grösse, als ein Stern „of an average first magnitude" in der gewöhnlichen Skala (the vulgar or conventional scale of magnitude) α Orionis oder Beteigeuze „in its usual or normal state" angesehen werden könne**). Nicht minder giebt er in den Tabellen (Capreise p. 334. 371), wo er die bisher angenommenen Sterngrössen nach seiner Method of Sequences interpolirt und geregelt wiedergiebt, dem α Orionis jene typische Bedeutung als eines mittlern

*) Sirius 4,052; Canopus 1,994; α Centauri 1,000; Arctur 0,726; Rigel 0,654 etc.

**) Es sind nämlich Fluctuationen der Helligkeit an diesem Sterne beobachtet worden.

Sternes 1. Grösse im Sinne der bisher angenommenen Sterngrössen. Er bezeichnet ihn ausdrücklich mit 1, indess er unter den übrigen 14 Sternen 1. Grösse, die er mit Zuziehung von Grössenbruchtheilen verzeichnet hat, 8 eine grössere, 6 eine kleinere Grössennummer, 8 eine kleinere, 6 eine grössere Intensität giebt.

Hienach leuchtet ein, dass, wenn man einen mittlern oder typischen Werth für die Sterne 1. Grösse ohne theoretische Voraussetzung, nur im Sinne der bisherigen Grössenansicht dieser Sterne verlangt, man nach Herschel's eigenen, auf diese bisherige Grössenansicht basirten, Datis nicht $\alpha$ Centauri, sondern $\alpha$ Orionis zu Grunde zu legen hat.

3) Der photometrische Werth von $\alpha$ Orionis verhält sich zu dem von $\alpha$ Centauri nach Herschel's eigener Bestimmung (Capreise p. 367) wie 0,484 : 1. Substituiren wir also in seiner obigen Intensitätenreihe 0,484 für 1, so erhalten wir

$$0{,}484,\ \tfrac{1}{4},\ \tfrac{1}{9},\ \tfrac{1}{16}.$$

Nun weicht 0,484 so wenig von 0,5 oder $\frac{1}{2}$ ab, dass man in Betracht der Schwierigkeit der photometrischen Bestimmung den Unterschied vernachlässigen kann. Hiemit aber hat man eine solche Approximation an die geometrische Reihe, als sie nur immer nach Sachlage der Umstände verlangt werden kann.

4) In der That zeigt sich nur noch die kleine Abweichung 0,484 von 0,5, und $\frac{1}{9}$ von $\frac{1}{8}$, welche der Vollkommenheit der geometrischen Reihe Eintrag thun. Nun ist aber, wie auch v. Humboldt anführt, das Zutreffen der quadratischen Potenzenreihe mit der Reihe der Sternintensitäten nach Herschel selbst keinesweges ein vollständiges; also die Zahl $\frac{1}{9}$ selbst nicht als genau massgebend anzusehen.

Herschel spricht (Capreise p. 355) von „innumerable causes, wich influence in an extraordinary degree (hardly credible without trial), our judgment in such comparisons", und fügt (Capreise p. 371) der Zusammenstellung der beobachteten Intensitäten mit den nach Voraussetzung der quadratischen Potenzenreihe berechneten Intensitäten, welche den Sterngrössen zugehören, Folgendes hinzu: „In judging of the general amount of coincidence between the two series here presented, it is by no means desired to under-estimate or unduly palliate the rather considerable and numerous cases of discordance which occur. Out of sixty-three stars compared, inferior to Lyon in brightheness (for of the cases above that limit no fair judgement can be formed), there are no less than eighteen in which the disagreement of the assigned values exceeds one-fifth of a magnitude, a quantity, respective which the judgement of a practised eye cannot be deceived. Nevertheless, it ought to be remembered that these extreme differences are, in

all probability, the sums of errors in opposite directions, of the values afforded by the two methods. And it must farther be remarked, that in a majority of those cases the photometric determination rests on a single night's observation, and not unfrequently on a single equalization. The worst case of all, that of $v$ Argus, is of this description, and ought undoubtely to be rejected as altogether erroneous, and would have been so had not all selection been avoided. In others (such as those of $\alpha$ Gruis and $\alpha$ Trianguli) it seems extremly probable, that a difference of colour between the light of the star and that of the moon has affected the photometric comparisons, leaving them, however, consistent inter se. Lastly, of we look to the cases of agreement rather than to those of discordance, we shall find no less than forty out of sixty-three in question, in which the results agree within one eight of a magnitude."

Unstreitig wird das Vorige hinreichen, die Verträglichkeit der Herschel'schen Bestimmungen mit unserem Gesetze in allgemeiner Weise darzuthun. Indessen schien es mir von Interesse, nachdem sich diess einmal herausgestellt hatte:

1) diess noch genauer unter Rückgang auf die Originaldata nachzuweisen, und den Grad der Uebereinstimmung näher zu ermitteln;

2) hiemit zugleich die Regel für die Berechnung der Sterngrössen aus den photometrischen Werthen oder umgekehrt im Sinne der geometrischen Reihe der letztern festzustellen.

Hiezu habe ich die 60 Sterne von $\alpha$ Orionis als Mittelstern 1. Grösse, bis $\alpha$ Circini (von der Grösse 3,78) als letzten der Sterne, welche Herschel sowohl photometrisch als mittelst der Method of Sequences der Skala der gewöhnlichen Sterngrössen unter Zuziehung von Bruchtheilen genau eingeordnet hat, in Rechnung genommen. Man findet sie in der nachher mitzutheilenden grösseren Tabelle S. 508 mit ihren Intensitäts- und Grössenwerthen nach Beobachtung und Rechnung verzeichnet. Zwar hat Herschel auch noch 8 dem $\alpha$ Orionis an Helligkeit vorausgehende Sterne 1. Grösse photometrisch bestimmt; aber, wie er selbst bemerkt, wegen ihrer zu grossen Helligkeit der Grössenskala nicht genau, sondern nur nach einem ganz ungefähren Aperçu einzuordnen vermocht, daher sie zur folgenden Berechnung nicht zugezogen, sondern nur nachträglich noch besonders berücksichtigt sind, und, wie man finden wird, auch noch eine nachträgliche Verstärkung unserer Auffassung gewähren.

Diese Rechnung ist so geführt: ich stelle nach der Voraussetzung, dass eine geometrische Reihe der Sternintensitäten zu der arithmetischen Reihe der auf einander folgenden Grössenclassen besteht, eine Formel auf, welche Beides, Intensitäten und Grössen verknüpft. Diese Formel

enthält zwei Constanten, welche aus den 60 Datis Herschel's über die beziehentliche Intensität und Grösse der genannten 60 Sterne nach der Methode der kleinsten Quadrate unter Zugrundelegung der Form jener Formel numerisch bestimmt werden. Mit den so erhaltenen Werthen der Constanten berechne ich dann nach der Formel rückwärts die Intensitäten aus den Grössen oder Grössen aus den Intensitäten und vergleiche das Resultat der Rechnung mit dem der Beobachtung. Ist die Voraussetzung der geometrischen Intensitätenreihe, auf welche die Formel gestützt ist, falsch, so ist die Berechnung der Constanten aus den Beobachtungen illusorisch, indem solche dann keine wirkliche Constanten dafür hergeben können, und es lässt sich keine Uebereinstimmung zwischen Rechnung und Beobachtung auf diesem Wege erzielen. Aber die wirklich sich ergebende Uebereinstimmung ist sehr befriedigend. Ich stelle eine entsprechende Berechnung unter Zugrundelegung der von Herschel selbst auf die Voraussetzung der quadratischen Potenzenreihe gestützten Formel an; die Uebereinstimmung zeigt sich, ungeachtet der willkührlichen Anpassung der 1. Grössenclasse an die Voraussetzung, minder genügend, indem die Summe der Abweichungen so wie Quadrate der Abweichungen zwischen Beobachtung und Rechnung nach Herschel's Formel noch etwas grösser ist, als nach der von mir aufgestellten.

Diese von mir aufgestellte Formel ist nach Einführung der wie oben berechneten numerischen Werthe der Constanten folgende, je nachdem die Intensität $i$ aus der Grösse $G$ oder umgekehrt berechnet werden soll:

$$G = -\, 2{,}854 \log i - 0{,}0806$$

$$\log i = -\, \frac{G + 0{,}0806}{2{,}854}$$

Dabei ist zu beachten, dass, da $i$ bei allen Sternen ausser den hellsten ein Bruch ist, indem die Intensitätseinheit innerhalb der 1. Grössenclasse liegt, $-\, 2{,}854 \log i$ bei den übrigen positiv wird.

Die Form der Formel gründet sich auf folgende Betrachtung:

Wenn sich Sternintensitäten und Sterngrössen wie geometrische und arithmetische Reihe in Bezug zu einander setzen lassen, so includirt diess, dass gleichen Unterschieden der Sterngrössen gleiche Unterschiede der Logarithmen der Sternintensitäten zugehören. Seien nun $G$, $G'$ zwei verschiedene Sterngrössen, und $i$, $i'$ die zugehörigen Intensitäten, so werden wir, mit Rücksicht, dass die Intensitäten absteigen, wenn die Grössen aufsteigen, dieser Bedingung bei Aufstellung einer Function

zwischen Grössen und Intensitäten in einfachster Weise genügen, wenn wir setzen: $G - G' = k (\log i' - \log i)$, wo $k$ eine Constante. Setzen wir dann, indem wir bei der Differenz von einer fest gegebenen Grösse $G'$ und Intensität $i'$ ausgehen, für $k \log i' + G'$ die Constante $c$, so geht diese Formel über in

$$G = -k \log i + c.$$

Sowohl um die Berechnung der Constanten abzukürzen, als die Vergleichung der Resultate der Rechnung mit der Beobachtung leichter übersichtlich darzustellen, habe ich von den 60 zu einander gehörigen Bestimmungen der Grösse und Intensität, welche Herschel giebt, und die in der unten folgenden Tabelle reproducirt sind, je 10 auf einander folgende Grössen, so wie die zugehörigen Intensitäten zu Mittelwerthen vereinigt, und zwar so, dass aus je 10 auf einander folgenden Grössen das arithmetische, aus den 10 zugehörigen Intensitäten das geometrische Mittel gezogen ward, wie es im Sinne der vorausgesetzten logarithmischen Beziehung zwischen beiden ist. Folgende Tabelle enthält das Resultat dieser Bestimmung, welche man als das ins Kurze gezogene Resumé der Herschel'schen Beobachtungsdata ansehen kann. Es sind darin in der ersten Spalte die äussersten von den 10 Grössenwerthen mit angegeben, aus denen jedes Mittel gezogen ist.

| Extreme von $G$. | Arithmetische Mittelwerthe von $G$. | Zugehörige geometrische Mittelwerthe von $i$. |
|---|---|---|
| 1,00 — 1,73 | 1,387 | 0,3052 |
| 1,84 — 2,26 | 2,046 | 0,1649 |
| 2,29 — 2,58 | 2,417 | 0,1361 |
| 2,59 — 2,85 | 2,738 | 0,1037 |
| 2,86 — 3,08 | 2,982 | 0,0792 |
| 3,20 — 3,78 | 3,482 | 0,0639 |

Mit den so als Ausdruck der Beobachtungen geltenden Mittelwerthen vergleichen sich nun die nach der Formel berechneten Werthe wie folgt: die Berechnung ist in doppelter Weise geführt, unter I so, dass die Grössen $G$ nach den Intensitäten der vorigen Tabelle berechnet und mit den Grössen derselben Tabelle als Beobachtungswerthen verglichen sind; unter II so, dass umgekehrt die Intensitäten $i$ nach den Grössen voriger Tabelle berechnet und mit den Intensitäten derselben Tabelle verglichen sind.

| I Grössen $G$. | | Differenz. | II Intensitäten $i$. | | Differenz. |
|---|---|---|---|---|---|
| Beobachtet. | Berechn. nach $i$. | | Beobachtet. | Berechn. nach $G$. | |
| 1,387 | 1,390 | + 0,003 | 0,3052 | 0,3060 | + 0,0008 |
| 2,046 | 2,153 | + 0,107 | 0,1649 | 0,1798 | + 0,0149 |
| 2,417 | 2,391 | — 0,026 | 0,1361 | 0,1332 | — 0,0029 |
| 2,738 | 2,728 | — 0,010 | 0,1037 | 0,1029 | — 0,0008 |
| 2,982 | 3,063 | + 0,071 | 0,0792 | 0,0845 | + 0,0053 |
| 3,482 | 3,329 | — 0,153 | 0,0632 | 0,0565 | — 0,0074 |

Die Uebereinstimmung der beobachteten mit den berechneten Werthen, sei es, dass wir $G$ oder $i$ als gegeben zum Ausgangspunkt der Berechnung wählen, ist überraschend, auch findet ein solcher Wechsel in den Vorzeichen der Differenzen statt, dass wir der Zufälligkeit derselben um so sicherer sein können. Und wenn die Abweichung bei den letzten Sterngrössen etwas grösser ist, als bei den ersten, so ist nicht ausser Acht zu lassen, was Herschel (Capreise p. 369) bezüglich einer graphischen Darstellung seiner Resultate sagt: „die frühern Grössen (vor $\alpha$ Orionis) sind als ganz willkürlich bei Seite gelassen, und die über die Grösse 3,6 können nicht in Rücksicht kommen. da keine Astrometer-Beobachtungen dafür vorliegen*), welche in der That schon unter der dritten Grösse schwierig und unsicher werden."

Um den genauen Vergleich zwischen der Zusammenstimmung unserer und der Herschel'schen Formel mit den Beobachtungen zu ziehen, bin ich nicht auf vorige Mittelwerthe, sondern auf die in der nachfolgenden Tabelle verzeichneten 60 Einzeldata von $\alpha$ Orionis bis $\alpha$ Circini zurückgegangen, d. h. ich habe die nach der einen und andern Formel aus der beobachteten Intensität berechnete Grösse jedes der 60 Sterne mit der beobachteten Grösse verglichen, und die Summe der Differenzen zwischen Beobachtung und Rechnung, so wie die Summe der Quadrate dieser Differenzen beiderseits genommen. Einen sehr starken Unterschied des Ergebnisses in dieser Hinsicht nach der einen und andern Formel darf man zwar hiebei nicht erwarten, weil sich die der Herschel'schen Formel zu Grunde liegende Potenzenreihe abgesehen von der ersten Grössenclasse nicht weit von der geometrischen Reihe entfernt, und in Betreff der 1. Grössenclasse eine künstliche Uebereine-

*) Doch geht Herschel's Tabelle photometrischer Bestimmungen bis zur Grösse 3,78.

stimmung mit der Formel erzielt ist; doch ist der Unterschied in den Summen der Quadrate der Abweichungen immerhin nicht ganz unerheblich zu Gunsten unserer Formel.

Um Jeden in den Stand zu setzen, diess selbst zu beurtheilen, und nach Umständen durch eigene Rechnung zu controliren, gebe ich, da das Herschel'sche Werk nicht Vielen leicht zugänglich sein dürfte, die Unterlagen dazu in folgender Tabelle. Die Herschel'schen Beobachtungs- und Rechnungsdata darin sind zusammengestellt aus seiner Capreise p. 334. 367. 371, und was die ersten anlangt, so wird man den Raum, den sie einnehmen, um so weniger bedauern, als sie an sich wichtige Data sind, auf die man sich auch sonst zurückgeführt finden kann. Die Tabelle enthält überhaupt:

In Spalte I die Namen der Sterne, welche der Beobachtung und Rechnung unterlegen haben, wobei jedoch zu bemerken, dass die 8 Sterne 1. Grösse über dem Querstrich aus den S. 503 angeführten Gründen weder zur Bestimmung der Constanten der Formel, nach der unsere Werthe der Sterngrössen berechnet sind, noch zur Berechnung der Fehlersummen und Fehlerquadratsummen zugezogen sind, da sie nach Herschel selbst nicht massgebend sein können*), sondern blos die 60 Sterne von $\alpha$ Orionis an unterhalb des Querstriches.

In Spalte II die mittelst des Astrometers beobachteten Intensitäten $i$.

In Spalte III die Sterngrössen $G$, wie sie im Katalog der Astronom. Soc. in ganzen Zahlen angegeben sind**).

In Spalte IV die nach der Method of Sequences bestimmten Sterngrössen $G$.

In Spalte V die von Herschel selbst nach der (Capreise p. 369) von ihm abgeleiteten Formel

$$(G + \sqrt{2} - 1)^2\, i = 1$$

oder

$$(G - 0{,}4142)^2\, i = 1$$

berechneten Werthe der Sterngrössen.

---

*) Speciell äussert sich Herschel hierüber vor seiner Zusammenstellung von Beobachtung und Rechnung (Capreise p. 370): „The magnitudes of the larger stars, from Sirius down to Procyon or Orion, are purely arbitrary, and rest on no other evidence, than a hardly more than conjecture apperçu of the course of the interpolating curve alludet to in Art. 244."

**) Wo Fragezeichen stehen, finde ich keine Bestimmung im Herschel'schen Werke.

In Spalte VI die Differenzen dieser berechneten Werthe $G$ von den beobachteten der Spalte IV.

In Spalte VII die von mir nach der Formel

$$G = - 2{,}8540 \log i - 0{,}0806$$

berechneten Werthe der Sterngrössen.

In Spalte VIII die Differenzen dieser berechneten Werthe von den beobachteten Werthen der Spalte IV.

Tabelle der Herschel'schen Beobachtungsdata zusammengestellt mit den Rechnungsdatis.

| I<br>Name des Sterns. | II<br>Photom. Intensität $= i$; beobacht. | III<br>$G$. nach Katalog. | IV<br>$G$. nach M. of S. beobachtet. | V<br>$G$. ber. von H. | VI<br>Differenz. | VII<br>$G$. ber. von F. | VIII<br>Differenz. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Sirius. . . . . | 1,052 | 1 | 0,10 | 0,08 | — 0,02 | — 1,81 | — 1,91 |
| Canopus . . . | 1,994 | 1 | 0,22 | 0,29 | + 0,07 | — 0,94 | — 1,16 |
| α Centauri . . | 1,000 | 1 | 0,34 | 0,59 | + 0,25 | — 0,08 | — 0,42 |
| Arcturus . . . | 0,726 | 1 | 0,45 | 0,77 | + 0,32 | + 0,32 | — 0,13 |
| Lyra . . . . . | 0,446 | 1 | 0,66 | 1,08 | + 0,42 | + 0,92 | + 0,26 |
| Rigel . . . . . | 0,654 | 1 | 0,76 | 0,82 | + 0,06 | + 0,44 | — 0,32 |
| Procyon . . . | 0,520 | 1 | 0,85 | 0,97 | + 0,12 | + 0,73 | + 0,12 |
| α Eridani . . | 0,441 | 1 | 0,93 | 1,09 | + 0,16 | + 0,93 | 0,00 |
| α Orionis . . | 0,484 | 1 | 1,00 | 1,02 | + 0,02 | 0,82 | — 0,18 |
| β Centauri . . | 0,399 | 1 | 1,14 | 1,17 | + 0,03 | 1,06 | — 0,08 |
| α Crucis . . . | 0,377 | 1 | 1,21 | 1,21 | 0,00 | 1,13 | — 0,08 |
| Antares . . . | 0,404 | 1 | 1,28 | 1,16 | — 0,12 | 1,04 | — 0,24 |
| α Aquilae . . | 0,350 | 1 | 1,35 | 1,28 | — 0,07 | 1,22 | — 0,13 |
| Spica . . . . . | 0,309 | 1 | 1,41 | 1,38 | — 0,03 | 1,38 | — 0,03 |
| Fomalhaut . . | 0,262 | 1 | 1,47 | 1,54 | + 0,07 | 1,58 | + 0,11 |
| β Crucis . . . | 0,255 | 2 | 1,59 | 1,57 | — 0,02 | 1,61 | + 0,02 |
| α Gruis . . . . | 0,169 | 2 | 1,69 | 2,02 | + 0,33 | 2,12 | + 0,43 |
| γ Crucis . . . | 0,195 | 2,3 | 1,73 | 1,85 | + 0,12 | 1,95 | + 0,22 |
| ε Orionis . . . | 0,146 | 2,3 | 1,84 | 2,20 | + 0,36 | 2,30 | + 0,46 |
| ε Canis . . . . | 0,198 | 2,3 | 1,86 | 1,83 | — 0,03 | 1,93 | — 0,07 |
| λ Scorpii . . . | 0,192 | 3 | 1,87 | 1,87 | 0,00 | 1,96 | + 0,09 |
| ζ Orionis . . . | 0,123 | 3 | 2,01 | 2,44 | + 0,43 | 2,52 | + 0,51 |
| β Argus . . . | 0,158 | 2 | 2,03 | 2,10 | + 0,07 | 2,02 | — 0,01 |
| γ Argus . . . | 0,174 | 2 | 2,08 | 1,98 | — 0,10 | 1,94 | — 0,14 |
| γ Orionis . . . | 0,207 | 2 | 2,10 | 1,78 | — 0,32 | 1,82 | — 0,28 |
| ε Argus . . . | 0,152 | 2 | 2,18 | 2,15 | — 0,03 | 2,06 | — 0,12 |
| α Trianguli . . | 0,179 | 2 | 2,23 | 1,95 | — 0,28 | 1,92 | — 0,31 |
| ε Sagittarii . . | 0,141 | 3 | 2,26 | 2,25 | — 0,01 | 2,14 | — 0,12 |
| Θ Scorpii . . . | 0,159 | 5 | 2,29 | 2,09 | — 0,20 | 2,01 | — 0,28 |

| I<br>Name des Sterns. | II<br>Photom. Intensität = *i*; beobacht. | III<br>*G*. nach Katalog. | IV<br>*G*. nach M. of S. beobachtet. | V<br>*G*. ber. von H. | VI<br>Differenz. | VII<br>*G*. ber. von F. | VIII<br>Differenz. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| δ Canis . . . . | 0,152 | 3,4 | 2,32 | 2,15 | — 0,17 | 2,25 | — 0,07 |
| α Pavonis . . | 0,140 | 2 | 2,33 | 2,26 | — 0,07 | 2,36 | + 0,03 |
| β Gruis . . . . | 0,138 | 3 | 2,36 | 2,28 | — 0,08 | 2,37 | + 0,01 |
| σ Sagittarii . . | 0,116 | 3 | 2,41 | 2,52 | + 0,11 | 2,59 | + 0,18 |
| δ Argus . . . . | 0,132 | 3 | 2,42 | 2,34 | — 0,08 | 2,43 | + 0,01 |
| λ Argus . . . . | 0,131 | 3,4 | 2,46 | 2,35 | — 0,11 | 2,44 | + 0,02 |
| β Ceti . . . . . | 0,122 | 2,3 | 2,46 | 2,45 | — 0,01 | 2,53 | + 0,07 |
| Θ Centauri . . | 0,142 | 2 | 2,54 | 2,24 | — 0,30 | 2,34 | — 0,20 |
| β Canis . . . . | 0,134 | 2,3 | 2,58 | 2,32 | — 0,26 | 2,41 | — 0,17 |
| κ Orionis . . . | 0,120 | 3 | 2,59 | 2,37 | — 0,22 | 2,55 | — 0,04 |
| δ Orionis . . . | 0,104 | 2 | 2,61 | 2,69 | + 0,08 | 2,72 | + 0,11 |
| γ Centauri . . | 0,107 | 3 | 2,68 | 2,64 | — 0,04 | 2,69 | + 0,01 |
| ε Scorpii . . . | 0,103 | 3 | 2,71 | 2,70 | — 0,01 | 2,74 | + 0,03 |
| ζ Argus . . . . | 0,101 | 3 | 2,72 | 2,73 | + 0,01 | 2,76 | + 0,04 |
| α Phoenicis . | 0,101 | ? | 2,78 | 2,73 | — 0,05 | 2,76 | + 0,02 |
| ι Argus . . . . | 0,103 | 2 | 2,80 | 2,70 | — 0,10 | 2,74 | — 0,06 |
| α Lupi . . . . | 0,102 | 3 | 2,82 | 2,72 | — 0,10 | 2,86 | + 0,04 |
| ε Centauri . . | 0,105 | 3 | 2,82 | 2,67 | — 0,15 | 2,80 | — 0,02 |
| η Canis . . . . | 0,093 | 3 | 2,85 | 2,86 | + 0,01 | 2,86 | + 0,31 |
| δ Scorpii . . . | 0,098 | 3 | 2,86 | 2,78 | — 0,08 | 2,80 | — 0,06 |
| γ Corvi . . . . | 0.074 | 3 | 2,90 | 3,26 | + 0,36 | 3,15 | + 0,25 |
| κ Argus . . . . | 0,075 | 3 | 2,94 | 3,24 | + 0,30 | 3,14 | + 0,20 |
| β Corvi . . . . | 0,073 | 2,3 | 2,95 | 3,29 | + 0,34 | 3,16 | + 0,21 |
| ξ Centauri . . | 0,085 | 3 | 2,96 | 3,02 | + 0,06 | 2,98 | + 0,02 |
| π Argus . . . | 0,074 | 3,4 | 2,98 | 3,26 | + 0,28 | 3,15 | + 0,17 |
| α Leporis . . | 0,100 | 3,4 | 3,00 | 2,75 | — 0,25 | 2,77 | — 0,23 |
| γ Aquilae . . | 0,092 | 3 | 3,07 | 2,88 | — 0,19 | 2,88 | — 0,19 |
| γ Virginis . . | 0,070 | 3 | 3,08 | 3,37 | + 0,29 | 3,22 | + 0,14 |
| μ Argus . . . | 0,087 | 3 | 3,08 | 2,97 | — 0,11 | 2,95 | — 0,13 |
| δ Capricorni . | 0,088 | ? | 3,20 | 2,96 | — 0,24 | 2,93 | — 0,27 |
| δ Corvi . . . . | 0,060 | 3 | 3,22 | 3,67 | + 0,45 | 3,40 | + 0,18 |
| ι Orionis . . . | 0,073 | ? | 3,37 | 3,29 | — 0,08 | 3,16 | — 0,25 |
| α Muscae . . | 0,084 | 4 | 3,43 | 3,04 | — 0,39 | 2,99 | — 0,44 |
| β Trianguli . . | 0,064 | 3 | 3,46 | 3,54 | + 0,08 | 3,33 | — 0,13 |
| γ Trianguli . | 0,067 | 3 | 3,51 | 3,45 | — 0,06 | 3,27 | — 0,24 |
| υ Argus . . . | 0,045 | 3,4 | 3,53 | 4,30 | + 0,77 | 3,76 | + 0,24 |
| δ Crucis . . . | 0,062 | 3 | 3,57 | 3,60 | + 0,03 | 3,37 | — 0,20 |
| σ Canis . . . . | 0,056 | ? | 3,75 | 3,81 | + 0,06 | 3,49 | — 0,26 |
| α Circini . . . | 0,052 | 4 | 3,78 | 3,97 | + 0,19 | 3,58 | — 0,20 |
| | | | | Summe | ± 9,21 | | ± 9,02 |

Die Fehlersumme nach Herschel's Formel beträgt 9,21; nach der meinigen 9,02; die Fehlerquadratsumme nach erster 2,7129, nach letzter blos 2,2152; welches Letztere doch kein ganz zu verachtender Vorsprung ist.

Wenn auch nicht von besonderem Gewicht so doch von Interesse dürfte man folgende Bemerkung hiebei finden. Die Fehlervertheilung zeigt nach der Berechnung der Werthe mittelst unserer Formel eine grössere Rundung als nach der Herschel'schen in folgendem Sinne: Wie ich anderwärts theoretisch und experimental zeige, erhält man bei einer normalen Fehlervertheilung, welche die wahre Beobachtungsgrösse als Ausgang der Fehler voraussetzt, die Ludolph'sche Zahl $\pi$, wenn man die Summe der Fehlerquadrate mit dem Quadrate der Fehlersumme*) dividirt, und mit der doppelten Fehlerzahl multiplicirt**); sofern sich aber eine absolut normale Fehlervertheilung bei einer endlichen Fehlerzahl nicht erreichen lässt, doch mit um so grösserer Approximation daran, je normaler die Fehlervertheilung ist. Nennen wir nun den approximativen Werth $\mathfrak{P}$, so haben wir nach den Herschel'schen Fehlern

$$\mathfrak{P} = \frac{120.\ 2,7129}{(9,21)^2} = 3,838$$

nach den unsrigen

$$\mathfrak{P} = \frac{120.\ 2,2152}{(9,02)^2} = 3,267$$

wovon erster Werth sehr stark vom Normalwerth $\pi$ abweicht, indess letzterer sehr nahe damit übereinkommt.

Ferner lässt sich nachweisen, dass der zum Quadrat erhobene Quotient aus der Summe der Fehler, welche den mittlern Fehler***) an Grösse übersteigen, in die Totalsumme der Fehler, bei normaler Fehlervertheilung, gleich der Grundzahl der natürlichen Logarithmen 2,718... ist. Herschel's Fehler geben hiefür 2,228, unsre Fehler 2,353, also ebenfalls grössere Approximation.

Hienach dürfte der Vortheil entschieden zu Gunsten unserer Formel sein, und dieser Vortheil um so mehr erhellen, wenn man in Rücksicht zieht, dass unsere Formel auf einer naturgesetzlichen Beziehung zwischen Lichtreiz und Empfindung, die Herschel'sche auf einer künstlichen Anpassung fusst.

Dabei kann es allerdings auffallend erscheinen, wenn Herschel (Outlines p. 522) erklärt: „the conventional magnitudes actually in use

*) Positive und negative Fehler darin nach absolutem Werthe addirt.

**) Der, zunächst für die Abweichungen von einer einfachen Mittelgrösse zu führende Beweis ist einer leichten Ausdehnung auf die Abweichungen von einer Reihe Mittelgrössen fähig, als welche hier die einzelnen Sterngrössen anzusehen.

***) Diesen zu $\sqrt{\frac{\Sigma\Delta^2}{m}}$ genommen, wenn $\Sigma\Delta^2$ die Summe der Fehlerquadrate, und $m$ die Zahl der Fehler; nach Herschel's Fehlerreihe 0,213; nach unsrer 0,192.

among astronomers, so far as their usage is consistent with itself, conforms moreover very much more nearly to this than to the geometrical progression.“ Denn es scheint hienach, dass er selbst die Statthaftigkeit der geometrischen Reihe geprüft und nicht bewährt gefunden habe. Indess kann er hiebei wohl nur auf einer unvollständigen Untersuchung gefusst haben; und es liegt mit Vorigem Jedem die Möglichkeit der eigenen Prüfung des Gegenstandes vor.

Vielleicht kann folgende Erörterung beitragen, diesen Umstand aufzuklären.

Die Voraussetzung, dass der arithmetischen Reihe der Sterngrössen eine geometrische der Sternintensitäten zugehört, und dass demgemäss gleichen Unterschieden der Sterngrössen gleiche Unterschiede der Logarithmen der Intensitäten entsprechen, würde allgemein gesprochen noch unendlich viele andere Formeln für die functionsweise Beziehung derselben zulassen, als die von uns aufgestellte. In der That, wenn $F$ das allgemeine Functionszeichen, so würde jede Formel von der Form $G - G' = F\left(\frac{i'}{i}\right)$ die angegebene Bedingung erfüllen, als z. B. $G - G' = k\,\frac{i'}{i}$ oder $= k \sin \pi\,\frac{i'}{i}$ etc.

Und vielleicht hat Herschel blos die erste dieser beiden Formeln, welche sich zunächst darzubieten scheint, geprüft. Es rechtfertigt sich aber die von uns vorgezogene Form nicht nur durch ihre directe Uebereinstimmung mit der Erfahrung, sondern auch durch den tiefer liegenden Gesichtspunct, dass sie die einzige ist, nach welcher man durch Summirung zweier Grössenunterschiede $G' - G$, $G'' - G'$ einen dem Totalunterschiede $G'' - G$ gleichen Unterschied als Function der Intensitäten erhält; eine Bedingung, deren Erfüllung doch nach der Weise, wie von den Astronomen Grössenbruchtheile zwischen die ganzen Grössenzahlen interpolirt werden, nothwendig zu fodern ist.

In der That kann man sich zuvörderst empirisch überzeugen, dass z. B. die Form

$$G' - G = k\,\frac{i}{i'}$$
$$G'' - G' = k\,\frac{i'}{i''}$$

dieser Bedingung nicht genügt. Denn hienach müsste $(G' - G) + (G'' - G') = G'' - G$, d. i.

$$k\left(\frac{i}{i'} + \frac{i'}{i''}\right) = k\,\frac{i}{i''}$$

sein, was nicht allgemein der Fall sein kann. Nicht minder würde man Ungleichungen für alle andern Functionen, als die von uns gewählte finden. Nach dieser aber hat man

$$G' - G = k \log \frac{i}{i'}$$

$$G'' - G' = k \log \frac{i'}{i''}$$

diess giebt

$$(G' - G) + (G'' - G') = k \left(\log \frac{i}{i'} + \log \frac{i'}{i''}\right)$$

übereinstimmend mit

$$G'' - G = k \log \frac{i}{i''}.$$

Allgemein, wenn

$$F(x) + F(y) = F(xy)$$

sein soll, so kann dieser Gleichung nach einem Beweise, den man in Cauchy's Analyse algèbrique p. 110 ff. und anderwärts findet, nicht anders genügt werden, als dass man setzt

$$F(x) = k \log x$$

$$F(y) = k \log y$$

woraus die Nothwendigkeit unserer Formel leicht zu folgern ist, indem man $\frac{i}{i'}$ für $x$ und $\frac{i'}{i''}$ für $y$ in voriger Bedingungsgleichung substituirt.

Zu derselben Formel gelangt man auch auf dem, schon früher (S. 490) angedeuteten, Wege durch Aufnahme des Ausdruckes unseres Grundgesetzes in eine Differenzialgleichung und Integration.

Hienach sind wir allerdings an die von uns gewählte Form gebunden.

Die 8 Sterne 1. Grösse oberhalb des Querstriches der Tabelle sind bemerktermassen bei unserer Rechnung nicht mit zugezogen. Indessen hatte es immerhin sein Interesse zu sehen, wie nahe Herschel's von ihm selbst als unbestimmt bezeichnete Grössenschätzung derselben (Spalte IV), mit derjenigen zusammentrifft, welche sich nach unsern beiderseitigen Formeln aus der beobachteten Intensität $i$ ergiebt. Hier sieht man nun, dass unsere Formel für die drei obersten Sterne negative Grössen finden lässt, indess Herschel seine Schätzung nur auf positive Bruchwerthe von Grössen eingerichtet hat. Lassen wir demnach diese drei ersten Sterne als incommensurabel für den Vergleich bei Seite, und bestimmen die Summe der Fehlerquadrate für die übrigen 5, so ergiebt sich nach Herschel's Formel 0,3224, nach unserer blos 0,2003; also auch hier ein ganz entschiedenes Uebergewicht zu Gunsten unserer Formel.

Ungeachtet man nun nach diesen Ergebnissen die theoretische Auf-

fassung Herschel's bezüglich des Verhältnisses zwischen Sterngrössen und Sternintensitäten als beseitigt halten dürfte, so tritt dagegen die Erfahrungsseite seiner Untersuchung in um so glänzenderem Lichte hervor, indess sie zugleich unserem Gesetze eine der erfreulichsten Stützen unterbaut. Denn die Uebereinstimmung zwischen Rechnung und Beobachtung, welche sich in den Mittelwerthen S. 506 herausgestellt hat, konnte nicht wohl anders zu Stande kommen, als unter einem Zusammentreffen folgender Puncte:

1) dass die von Alters her bestimmten Sterngrössen, wenn schon nicht im Einzelnen, aber im Durchschnitt, richtig nach gleichen Helligkeitsunterschieden aus einander gehalten sind, das Auge also wirklich vermag, gleiche Helligkeitsunterschiede, selbst wenn sie das eben Merkliche übersteigen, mit annähernder Richtigkeit zu schätzen;

2) dass die Correction, welche Herschel nach der Method of Sequences im Einzelnen an der Reihe dieser seit Alters bestimmten Sterngrössen vorgenommen, und seine astrometrischen Bestimmungen gut sind;

3) dass endlich unser Gesetz besteht.

Es würde mindestens ein sehr unwahrscheinlicher Zufall sein, dass die Uebereinstimmung der Rechnung und Beobachtung auf einem andern Wege entstanden sein sollte.

Nach all' dem muss ein beiläufiger Widerspruch auffallen, der sich in J. Herschel's Angaben gegen unser Gesetz findet, und den wir, als von einem so zuverlässigen Beobachter herrührend, nicht ausser Acht lassen dürfen, wenn schon er in Widerspruch mit dem vorstehend erörterten Resultate steht, was von andrer Seite aus Herschel's Untersuchungen fliesst, und das Resultat aller vorangegangenen Untersuchungen nicht aufheben kann.

Herschel bemerkt nämlich bei Beschreibung seines Astrometers (Capreise p. 357) in einer Anmerkung, es sei nützlich, dabei ein gleichseitiges Prisma zu Hülfe zu nehmen, um durch dessen reflectirende Wirkung die Verbindungslinie zweier zu vergleichenden Sterne dem Horizont parallel zu machen, und fügt hinzu: „Occasionally, too, it may be used to enfeeble the light of nearly equal bright stars, by external reflexion in an equal ratio (by bringing the line joining their reflected images parallel to that joining their direct). In this enfeebled state, shades of inequality become apparent, which

would otherwise escape detection. By increasing or diminishing (equally) the angles of incidence, the reflected images may be more or less enfeebled. A plain metallic mirror may be used for the same purpose."

Anderwärts (Outlines p. 522) erwähnt Herschel selbst als einen möglichen Einwurf gegen die Potenzenreihe 1, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{9}$ etc., dass die geringeren Grössenclassen danach in der Lichtintensität einander sehr nahe treten, was nicht so der Fall ist nach der geometrischen Reihe. In der That verhalten sich nach der Potenzenreihe die Intensitäten z. B. der 9. zur 10. Classe wie $\frac{1}{81}$ zu $\frac{1}{100}$, indess sich die der ersten zur zweiten wie $\frac{1}{1}$ zu $\frac{1}{4}$ verhalten, wogegen nach der geometrischen Reihe das Intensitätsverhältniss der aufeinanderfolgenden Grössenclassen constant ist. Aber, sagt er (Outlines p. 522): „So far, howewer from this being really objectionable, it falls in well with the general tenor of the optical facts...., in as much as the eye (in the absence of disturbing causes) does actually discriminate with greater precision between the relative intensities of feeble lights than of bright ones, so that the fraction $\frac{36}{49}$ for instance, expresses quite as great a step downwards (physiologically speaking) from the sixth magnitude, as $\frac{1}{4}$ does from the first."

Wie es sich nun auch mit diesem Widerspruch verhalte, so scheint mir jedenfalls nach allem Vorstehenden unmöglich, in der von Herschel bemerkten Abweichung mehr als eine Abweichung kleiner Ordnung zu sehen, welche unter gewissen Umständen der Beobachtung eintritt. Wie es scheint, hat er diese Abweichung nur „occasionally" beobachtet, ohne bestimmte Versuche desshalb anzustellen, und nachdem er selbst von „unzähligen Ursachen" spricht, welche „unser Urtheil in kaum glaublicher Weise bei solchen Vergleichen mit bestimmen", darf man gelegentliche Beobachtungen nicht für ausreichend halten, dieselbe bestimmten Versuchen gegenüber, wie sie im vorigen Abschnitte vorgelegen haben, zu begründen. Von der andern Seite aber lässt sich allerdings denken, dass ein in solchen Beobachtungen so viel beschäftigtes und geübtes Auge als das von Herschel zuletzt eine Empfindlichkeit für feine Unterschiede und mithin feine Abweichungen vom Gesetze erlangt, welche für das Mass nur eine ganz geringe Grösse repräsentiren, bei Intensitäten, wo sie für ein ungeübtes Auge noch nicht merklich werden; und dazu nicht unwahrscheinlich, dass Herschel's Angabe sich vorzugsweise auf sehr helle Sterne bezieht, wo die Abweichung von

der obern Gränze des Gesetzes vielleicht überall schon spürbar wird, da Herschel selbst die Schwierigkeit einer genauen Bestimmung der hellsten Sterne hervorhebt, und also hier vorzugsweise das S. 513 angegebene Hülfsmittel angewendet haben mag. Leider lässt sich aus Mangel bestimmterer Angaben nichts hierüber entscheiden. Doch fodert jener, sicher auf etwas Thatsächlichem fussende, Widerspruch um so mehr zu einer genaueren Untersuchung der Gränzen des Gesetzes auf.

Legt man die von mir abgeleitete Formel für die geometrische Reihe der Sternintensitäten zu Grunde, so erhält man als Exponenten derselben, je nachdem man sie aufsteigend oder absteigend nach den Intensitäten verfolgt, den zu $\log \frac{i}{i'} = \frac{1}{2,854} = 0,3501$ oder zu $\log \frac{i'}{i} = -\frac{1}{2,854}$ zugehörigen Zahlwerth, d. i.

2,2409 oder 0,44625,

welcher letztre Werth nicht weit von dem Werthe 0,5 abweicht, den wir früher S. 502 nach einer oberflächlicheren Betrachtung fanden. Hienach entsprechen sich, wenn wir der Grösse 1 die Intensität 1 geben, Grössen und Intensitäten wie folgt:

| $G$ | $i$ |
|---|---|
| 1 | 1,0000 |
| 2 | 0,4463 |
| 3 | 0,1991 |
| 4 | 0.0786 |
| 5 | 0,0397 |
| 6 | 0,0177 |

Unter derselben Voraussetzung geht die Formel für die Beziehung zwischen Grösse und Intensität über in

$$G = -2,8540 \log i + 1.$$

Hienach wenden wir uns zu Steinheil's Untersuchung desselben Gegenstandes.

Steinheil hat seine photometrischen Bestimmungen von 30 Sternen 1. bis zwischen 7. und 8. Grösse mittelst seines bekannten, später auch von Seidel benutzten, Prismenphotometers gewonnen. Nach Auseinandersetzung des Rechnungsprincips characterisirt er diese Bestimmungen wie folgt: „Beispielsweise mögen hiezu einige vorläufige Vergleichungen dienen; ich bemerke jedoch ausdrücklich, dass diese Werthe weder genau genug bestimmt, noch zahlreich genug sind, um ein zuverlässiges Resultat zu liefern; ich benutze sie also blos, um die Rechnung zu erläutern"

Dass nun hienach Steinheil selbst kein grosses Gewicht auf seine Bestimmungen legt, konnte v. Humboldt wohl veranlassen, ihr Resultat dem gegenüber, was Herschel selbst aus seinen doppelt so zahlreichen, ausdrücklich auf die Untersuchung des betreffenden Gegenstandes gerichteten, Bestimmungen zieht, nicht zu berücksichtigen. Doch glaube ich, dass es als Bestätigung des Resultats, zu dem Herschel's Data nach der vorstehenden Untersuchung eigentlich führen, nicht geringe Beachtung verdient. Folgendes das Wesentliche.

Unter Weglassung des Sterns kleinster Grösse (zwischen 7. und 8.) zieht Steinheil aus den übrigen 29 photometrischen Sternwerthen, die er bestimmt hat, 5 mittlere photometrische Normalwerthe und setzt sie in Beziehung zu den zugehörigen mittleren Grössenwerthen. Hienach entsprechen sich folgende mittlere beobachtete Grössen $G$ und folgende mittlere photometrische Lichtscheibendurchmesser $D$, welche quadrirt folgende Intensitäten $i$ geben. Berechnet man dann nach einer der unsrigen analogen Formel, deren 2 Constanten in analoger Weise als oben aus den mittleren Normalwerthen bestimmt sind, die Grössen $G$ nach $D$ oder $i$, so erhält man folgende berechnete Grössen $G$, deren Vergleich mit den beobachteten dienen kann, die Richtigkeit der Voraussetzung, auf welche die Rechnung gegründet ist, zu prüfen. Die Einzelbestimmung für den kleinsten Stern von der Grösse 7. 8. ist, da sie zur Berechnung der Constanten nicht zugezogen ist, in Einklammerung beigefügt.

| $D$. | $i = D^2$. | $G$ (beobachtet.) | $G$ (berechnet.) | Zahl der Einzelbestimmungen. |
|---|---|---|---|---|
| 2,085 | 4,34723 | 1,000 | 0,9751 | 10 |
| 1,2175 | 1,48230 | 1,750 | 1,6330 | 4 |
| 0,885 | 0,78323 | 2,688 | 2,6220 | 8 |
| 0,474 | 0,22468 | 3,750 | 3,8218 | 4 |
| 0,1456 | 0,02119 | 6,333 | 6,0905 | 3 |
| (0,0658) | (0,00433) | (7,500) | (7,6164) | (1) |

Man sieht hier wiederum eine sehr befriedigende Uebereinstimmung zwischen Beobachtung und Rechnung, und Steinheil fügt hinzu: „offenbar würde die Uebereinstimmung grösser ausgefallen sein, wenn die Normalbestimmungen, wie es sich eigentlich gehört hätte, auf einer grossen Zahl von Schätzungen und Messungen beruhten."

Die Form der Formel, welche Steinheil aufgestellt hat, stellt sich etwas anders dar, als die oben von uns aufgestellte, ist aber leicht durch

Transformation darauf zurückführbar, und nimmt dann mit den Constanten, nach denen die obigen Werthe berechnet sind, folgende Gestalt an:

$$G = -4{,}4252 \log D + 2{,}3872$$
$$= -2{,}2126 \log i + 2{,}3872$$

Auf Grund dieser Formeln stellt Steinheil folgende Werthe der aufeinanderfolgenden Grössenclassen $G$ und Intensitäten als zu einander gehörig auf:

| $G$ | $i$ |
|---|---|
| 1 | 181,9 |
| 2 | 64,24 |
| 3 | 22,69 |
| 4 | 8,015 |
| 5 | 2,831 |
| 6 | 1,000 |

Und man erhält nach ihm die Intensität jeder Grössenclasse durch Multiplication der Intensität der nächst kleineren mit 2,831.

Hienach ist in dem für uns wesentlichen Puncte, dass zur arithmetischen Reihe der Sterngrössen eine geometrische der Sternintensitäten gehört, welche durch eine Formel von der angegebenen Form verknüpft sind, das Resultat der Steinheil'schen Untersuchung mit dem, was sich aus den Herschel'schen Datis ergiebt, in voller Einstimmung. Doch kann man dabei noch eine grössere Uebereinstimmung in den Exponenten wünschen, die aus beiden Untersuchungen für die Intensitätenreihe folgen. Steinheil's Data geben, je nachdem man zu grössern Intensitäten aufsteigt, oder von grössern absteigt

2,831 oder 0,3588

Herschel's Data gaben respectiv

2,241 oder 0,4463.

Wenn man inzwischen in Betracht zieht, dass Steinheil's Resultat abgesehen von der 1. Grössenclasse, für welche 10 Data, aber von ausserordentlich verschiedener Intensität der Einzelsterne vorliegen, blos aus 3, 4 bis 8 Datis für jede Grössenclasse ohne Unterscheidung von Grössenbruchwerthen abgeleitet ist, und von Steinheil selbst nicht für ein definitives gegeben wird, so dürfte man sich durch diese Abweichung nicht zu sehr befremdet halten. Auch lässt sie sich durch eine kleine Correction, welche die Steinheil'sche Rechnung noch zulässt, in etwas vermindern, worauf ich eingehe, nachdem ich als Unterlage

des Vorigen und Folgenden die Special-Tabellé der Steinheil'schen Bestimmungen mitgetheilt, in welcher das *D* wie oben den durch das Photometer unmittelbar erhaltenen Lichtscheibendurchmesser bedeutet, durch dessen Quadrirung man die Intensität *i* erhalten kann, die zur Grösse *G* gehört.

Tabelle der Steinheil'schen Beobachtungsdata.

| Name und Bezeichnung der Gestirne. | *D.* | *G.* |
|---|---|---|
| α Canis majoris (Sirius) | 3,15 | 1 |
| α Lyrae (Wega) | 2,82 | 1 |
| α Bootis (Arcturus) | 2,52 | 1 |
| α Can. min. (Procyon) | 2,11 | 1 |
| α Aurigae (Capella) | 1,91 | 1 |
| α Virginis (Spica) | 1,88 | 1 |
| β Orionis (Rigel) | 1,70 | 1 |
| α Orionis (Beteigeuze) | 1,60 | 1 |
| α Leonis min. (Regulus) | 1,58 | 1 |
| α Cygni (Deneb) | 1,58 | 1 |
| α Tauri (Aldebaran) | 1,46 | 1 |
| α Scorpii (Antares) | 1,22 | 1 |
| γ Orionis (Bellatrix) | 1,15 | 2 |
| γ Cassiop | 1,04 | 3 |
| η Ursae maj. | 1,01 | 2.3 |
| α Polaris (Cynosurus) | 1,00 | 2.3 |
| β Polaris (Cocab) | 0,90 | 3 |
| χ Orionis (Saiph) | 0,90 | 3 |
| β Cassiop | 0.86 | 2.3 |
| α Cephei (Alderamin) | 0,85 | 3 |
| α Hydrae (Alphard) | 0,81 | 2 |
| α Cassiop (Schedir) | 0,75 | 3 |
| η Aurigae | 0,57 | 4 |
| ε Aurigae | 0,56 | 4 |
| ϱ Aurigae (Hädus primus) | 0,39 | 4 |
| δ Polaris (Ildun) | 0.37 | 3 |
| Piazzi XVIII$^h$. 227. 24 Urs. min. | 0,201 | 6.7 |
| Piazzi 0$^h$. 177. Urs. min. | 0,130 | 7 |
| Piazzi XX$^h$. 424. 24 Hev. | 0,106 | 5.6 |
| Anon. (Z.) Polaris | 0,0658 | 7.8. |

Steinheil nun gewinnt die oben in der Tabelle S. 316 angegebenen mittleren Normalbestimmungen aus den vorstehenden Einzelbestimmungen dadurch, dass er sowohl aus den Werthen von *D* als *G*, welche zwischen zwei Querstrichen enthalten sind, arithmetische Mittel sieht, und

diese Mittelwerthe zur Berechnung der Constanten nach der Methode der kleinsten Quadrate benutzt. Aber es scheint mir keinem Zweifel zu unterliegen, dass das geometrische Mittel hiebei für die Intensitäten $i$ so wie deren Wurzeln $D$ das richtigere ist. Denn, wenn man für 1 Stern hat:

$$G = -k \log i + c$$

so hat man für ein Mittel aus $n$ Sternen

$$\frac{G + G' + G''\ldots}{n} = -\frac{k}{n}(\log i + \log i' + \log i''\ldots) + c$$

$$= -k \log (ii'i''\ldots)^{\frac{1}{n}} + c$$

woraus das Zusammengehör des arithmetischen Mittels der Grössen und geometrischen der Intensitäten unmittelbar folgt. Und hiemit folgt es auch für die Wurzelwerthe $D$, da $\log i = 2 \log D$.

Wende ich nun statt des arithmetischen Mittels das geometrische der von Steinheil gegebenen $D$-Werthe übrigens unter gleicher Zusammenfassung der Einzelbestimmungen und eben so mit Weglassung der letzten Grösse 7. 8 an, so erhalte ich nach der Methode der kleinsten Quadrate

$$k = 2{,}3168;\ c = 2{,}3114$$

mithin

$$G = -2{,}3168 \log i + 2{,}3114$$

und daraus als Exponenten der geometrischen Reihe je nach Aufsteigen oder Absteigen durch die Intensitäten:

2,7016 oder 0,3705

wonach sich Beobachtung und Rechnung wie folgt zusammenstellen

| $D$ | $i$ | $G$ (Beobachtet.) | $G$ (Berechnet.) | Zahl der Einzelbestimmungen. |
|---|---|---|---|---|
| 2,02363 | 4,0951 | 1,000 | 0,8929 | 10 |
| 1,20810 | 1,4593 | 1,750 | 1,9311 | 4 |
| 0,88111 | 0,77637 | 2,688 | 2,5661 | 8 |
| 0,46327 | 0,21461 | 3,750 | 3,8599 | 4 |
| 0,14044 | 0,019723 | 6,333 | 6,2617 | 3 |
| (0,06850) | (0,0043297) | (7,500) | (7,6625) | (1) |

Unter Weglassung der letzten eingeschalteten Grösse beträgt nach der frühern Rechnung Steinheil's die Fehlersumme 0,5192, die Fehlerquadratsumme 0,08676, nach der jetzigen Rechnung die erste 0,5913, die letzte 0,076287; so dass in Betreff der massgebendern

Fehlerquadrate unsere Rechnung in Vortheil bleibt, während sie in Betreff der einfachen Fehler in Nachtheil ist. Nach Steinheil's Rechnung stellt sich der Wechsel der Fehlerzeichen für die aufeinanderfolgenden 5 Bestimmungen so dar — — — + —; nach unsrer so — + — + —, was den Vortheil unstreitig zu Gunsten unserer Rechnung stellt.

Es bleibt endlich noch übrig, die Struve'sche Untersuchung in Betracht zu ziehen.

Struve legt seiner Vergleichung die Grössenclassen zu Grunde, wie sie in seinen Mensur. microm. bestimmt sind, über deren Beziehung zu andern Bestimmungen man S. 495 vergleichen kann. Seine photometrische Bestimmung ist eine ganz indirecte. Er bestimmt die durchschnittliche Intensität der Sterne jeder Grössenclasse aus der durchschnittlichen Entfernung derselben von uns, indem er sie dem Quadrat dieser Entfernung umgekehrt proportional setzt; die durchschnittliche Entfernung derselben aber aus der Zahl derselben, die am Himmel sichtbar ist, nach dem Princip, dass die entfernteren Sterne in grösserer Zahl gesehen werden müssen, als die näheren, weil sie in Kugelschalen von grösserer Ausdehnung um das Auge als Mittelpunct enthalten sind. Gleichförmige Vertheilung der Sterne vorausgesetzt, wird uns hiernach die Menge der Sterne gegebener Grösse ein Mass der Kugelschalen geben können, die sie einnehmen; zu einer Kugelschale von gegebener Grösse gehört aber ein gegebener Radius; also eine gegebene Entfernung. Nun kann allerdings die Annahme, dass die Sterne gleichförmig durch den Himmel vertheilt sind, nicht als richtig gelten; indess wird sich, wenn man das Gesetz der Vertheilung kennt, eine, nur minder einfache, Distanzberechnung auf die relativen Sternzahlen gegebener Grössenclassen gründen lassen; und unter Mitrücksicht auf ein empirisch ermitteltes Gesetz der Vertheilung, nach welchem die Sternzahlen nach Massgabe der Entfernung vom plan principal der Milchstrasse abnehmen, hat dann Struve die durchschnittliche Entfernung und hienach Intensität oder photometrische Helligkeit der verschiedenen Grössenclassen so bestimmt, wie es die folgende Tabelle*) angiebt, in der die Zahlen der dritten Spalte, durch Quadriren der Zahlen der zweiten gefunden, den Intensitäten umgekehrt proportional sind.

*) Position. med. p. CXXXXVIII.

| Grössen-classe. | $r$ Mittler Stern-Abstand. | $r^2$ Reciproker Werth der photometrischen Intensität. | Verhältnisse zwischen den aufeinanderfolgenden Werthen $r^2$. |
|---|---|---|---|
| 1 | 1,0000 | 1,00 | 3,25 |
| 2 | 1,8031 | 3,25 | 2,35 |
| 3 | 2,7639 | 7,64 | 2,00 |
| 4 | 3,9057 | 15,26 | 1,95 |
| 5 | 5,4545 | 29,75 | |
| 6 | 9,2785 | 86,1 | 2,89 |
| 7 | 15,783 | 249,1 | 2,89 |
| 8 | 23,864 | 569,6 | 2,28 |
| 9 | 33,404 | 1116,0 | 1,96 |

Sollte eine geometrische Reihe zwischen den Intensitäten der aufeinanderfolgenden Grössen statt finden, so müssten die Verhältnisszahlen der letzten Spalte alle gleich sein, was sie nicht sind. Indess ist Folgendes zu bemerken. Der beim Querstrich der Tabelle statt findende Sprung im Verhältniss von 1,95 auf 2,89 zwischen den Sternen fünfter und sechster Classe rührt nach Struve daher, dass die Grössen der Sterne 1. bis 5. Classe mit blossem Auge, die der übrigen teleskopisch geschätzt sind, was sie nicht recht vergleichbar macht. Das Verhältniss 3,25 zwischen den Sternen 1. und 2. Classe hat gar keine Sicherheit, weil die geringe Zahl Sterne 1. Grösse, welche in die Berechnung eingegangen sind (blos 9 der nördlichen Halbkugel) keine auch nur leidlich sichere Distanzberechnung nach dem angegebenen Princip zulässt. Ueber die Grössenbestimmung der teleskopischen Sterne herrscht ferner, wie S. 495 bemerkt, wenig Einstimmung. Die Verhältnisse zwischen 2. und 3., 3. und 4., 4. und 5. Grösse aber, respectiv 2,35; 2,00 und 1,95, die hienach allein als massgebend übrig bleiben dürften, nähern sich wirklich sehr der Gleichheit, und fallen überdies fast genau mit dem Herschel'schen Exponenten 2,241 zusammen; auch kehren ähnliche Exponenten bei der 8. und 9. Classe wieder.

Immerhin ist auffallend, was auch Struve bemerkt, dass die Exponenten sowohl bei den nicht teleskopischen als teleskopischen Sternen im Fortschritte der Classen abnehmen, was unstreitig irgend welche Abweichung von der Triftigkeit in den Grundlagen der Intensitätsberechnung voraussetzt, der auf den Grund zu kommen weder in unserm Vermögen, noch in unserer Aufgabe liegt.

Nach Allem darf man wohl behaupten, dass die Struve'schen Resultate, wenn sie auch nichts Sicheres für die geometrische Reihe der Intensitäten beweisen können, eher zu Gunsten derselben sind, als derselben widersprechen.

Hiegegen widersprechen sie auf das Vollständigste und Directeste der von Herschel vorausgesetzten Beziehung der Sterngrössenzahlen zu den aus den Intensitäten erschlossenen Abständen der Sterne, welche Schlussweise bei der Struve'schen Untersuchung nur in umgekehrter Richtung geltend gemacht wird. Dürfen wir auch die Grössenbestimmungen der teleskopischen Sterne im Allgemeinen nicht für so sicher halten als die der nicht teleskopischen, so werden wir sie doch auch nicht für so unsicher halten dürfen, um den Widerspruch, der sich mit Herschel's Voraussetzung hier ergiebt, dadurch gedeckt zu halten. Die Entfernungen der 7. 8. und 9. Grössenclasse müssten nach J. Herschel sich wie diese Zahlen verhalten; indess sie nach der Struve'schen Tabelle sich wie 15,783 : 23,864 : 33,404 d. i. ungefähr wie 2 : 3 : 4 verhalten.

Die vorige Untersuchung war längst vollendet, als mir folgende Notiz in einer Abhandlung von Babinet über Kometenmasse in den Compt. rend. 1857. p. 358 zu Gesichte kam.

„Il y a entre la cinquième grandeur et la onzième six ordres de grandeur, et, d'après le fractionnement qui règle ces divers ordres, on peut admettre qu'une étoile qui est d'un seul degré de grandeur au dessus d'une autre étoile, est deux fois et demie plus lumineuse que cette dernière. On peut voir, dans les publications de l'observatoire d'Oxford, une bonne compilation de l'excellent astronome M. Johnson sur ce sujet, et, tout récemment, il a paru un travail de M. Pogson sur les évaluations des grandeurs. On tire de là que l'étoile de cinquième grandeur est environ deux cent cinquante fois plus brillante que l'étoile de onzième grandeur."

Ich habe mir die Abhandlungen von Johnson und Pogson nicht verschaffen können, aber es ist erfreulich zu sehen, wie gut diese, auf ihre Abhandlungen begründete Notiz in das Resultat der vorigen Untersuchung hineintritt; was übrigens natürlich ist, wenn, wie wahrscheinlich, Johnson und Pogson ebenfalls hauptsächlich auf Herschel und Steinheil fussen. Denn: 1) wird von Babinet die geometrische Reihe der Intensitäten für die successiven Sterngrössen als positiv begründet durch diese Abhandlungen vorausgesetzt; 2) ist der Exponent 2,5 das fast

genaue Mittel der beiden Exponenten 2,241 und 2,831, deren erster aus Herschel's Beobachtungen folgt, und deren zweiten Steinheil aus den seinigen abgeleitet hat.

Auch hier war es also mein Schicksal, zu spät mit meiner Untersuchung zu kommen, um eine Priorität derselben in Anspruch nehmen zu können; doch sicher nicht zu spät, um durch die Uebereinstimmung des Resultats unabhängig geführter Untersuchungen die Sicherheit desselben zu verstärken.

Darf man nach allem Vorigen die geometrische Intensitätenreihe der Sterngrössen für begründet halten, so drängt sich die Betrachtung auf, dass die umgekehrte Richtung, in welcher Grössen und Intensitäten der Sterne gegen einander vorschreiten, für die Festhaltung der Beziehung zwischen beiden etwas sehr Unbequemes hat. Die Tabelle der Herschel'schen Data S. 508 hat in Spalte VII gezeigt, dass die hellsten Sterne, welche die Mittelgrösse 1 beträchtlich überschreiten, danach sogar negative Grössenwerthe erlangen, was sich auch ohne Berechnung mittelst der allgemeinen Betrachtung übersehen lässt, dass, wenn man der Aufsteigung der Intensitäten in geometrischer Progression ein Rückschreiten der Sterngrössen in arithmetischer Progression entsprechen lässt, man nothwendig hiemit endlich Null rückwärts überschreiten und ins Negative gelangen muss. Der Nullwerth der Grösse tritt nach unserer Formel ein, wenn wir die bei der Grösse 1 statt findende Intensität mit dem Exponenten 2,2409 multipliciren, und die Grösse — 1, wenn wir sie mit $(2,2409)^2 = 5,0216$ multipliciren. Da nun nach der Tabelle, unter Zugrundelegung der Beobachtungswerthe, die Intensität = 0,484 bei der Grösse 1 ist, so würde die Grösse 0 bei der Intensität 0,484. 2,2409 = 1,084 in der Tabelle zu suchen sein, welchem $\alpha$ Centauri nahe kommt. Wonach derselbe Stern, den Herschel als Repräsentanten der Sterne 1. Grösse vorgeschlagen, vielmehr der Stern der nullten Grösse werden würde. Der Stern von der Grösse — 1 würde bei der Intensität 2,4306 der Tabelle zu suchen sein, also zwischen Sirius und Canopus.

Unstreitig nun kann es nicht angemessen erscheinen und sieht etwas nach verkehrter Welt aus, die hellsten Sterne mit negativen Nummern zu bezeichnen. Und abgesehen von der Art Heiligkeit, welche die bisherige Reihung der Sterngrössen durch ihr Alter erlangt hat, und welche ich nicht anfechten will, würde es sicher viel passender sein, die Sternnummern mit den Intensitäten aufsteigen zu lassen, und die Einheiten

von Grösse und Intensität so zu wählen, dass die für ihre Beziehung geltende, dann so zu schreibende, Formel

$$G - G' = k\,(\log i - \log i')$$

sich möglichst vereinfacht und die Beziehung zwischen Grösse und Intensität selbst den einfachsten Ausspruch zulässt. Meines Erachtens hätte man den Nullwerth der Grösse bei derjenigen Grösse zu setzen, welche nicht mehr mit blossen Augen erkannt wird, aber bei der geringsten Verstärkung der Helligkeit erkannt werden würde, des Nähern bei der Grösse eines Sterns, welcher in einem möglichst klaren, möglichst finstern Normalhimmel, an einer Normalstelle, etwa im Zenith, sich für ein normales Auge eben in der Nachtdunkelheit verliert. Dieser Grössenwerth dürfte ungefähr mit den Sternen 7. Grösse nach heutiger Bestimmung zusammenfallen*). Auch könnte man geradezu die Helligkeit des Augenschwarz als Nullpunct setzen**), was von der vorigen Bestimmungsweise nicht erheblich abweichen würde. Die teleskopischen Sterne würden solchergestalt negative, die mit blossem Auge sichtbaren positive Grössenwerthe annehmen; und die negativen Werthe für jene insofern ganz an ihrer Stelle sein, als sie die Entfernung von dem Puncte der natürlichen Sichtbarkeit unterhalb eben so wie die positiven die Erhebung darüber bezeichneten. Als die Intensitäteneinheit würde dann naturgemäss der Lichtgrad, den das normale Nachtdunkel, respectiv das Augenschwarz noch hat, anzunehmen sein; und hienach würde blos noch die Bestimmung der Grössen**einheit** als Differenz der Grösse 1 von der Grösse Null willkührlich sein; aber auch diese Willkühr durch die Bedingung der möglichst einfachen Beziehung zwischen $G$ und $i$ aufgehoben werden. Nachdem man nämlich durch die bisherigen Annahmen von $G' = 0$ und $\log i' = 0$ zur Formel

$$G = k \log i$$

*) Arago sagt in seiner populären Astronomie I. p. 305: „Zur sechsten Grösse rechneten die Alten die schwächsten noch dem Auge erkennbaren Sterne; gegenwärtig zählt man dagegen mehrere, ohne Anwendung von Instrumenten sichtbare, Sterne zur 7. Classe. Die 7. Classe ist also in der That die Gränzscheide zwischen den mit blossen Augen sichtbaren und den teleskopischen Sternen.“ Andrer Orten finde ich schlechthin die Sterne 6. Grösse als die Gränze der mit blossen Augen sichtbaren bezeichnet.

**) Hiebei muss man sich der früher S. 481 ff. gepflogenen Erörterungen erinnern, wonach dem Augenschwarz und mithin vollkommenen Nachtdunkel noch ein bestimmter photometrischer Werth zukommt.

gelangt ist, würde die Einheit von $G$ so zu bestimmen sein, dass der Ausdruck der Grösse $G$ mit dem Ausdrucke des Logarithmus der Intensität unmittelbar zusammenfiele, und man also hätte

$$G = \log i$$

was dadurch zu erreichen, dass man die Einheit der Grösse bei einem Werthe von $i$ annimmt, welcher der Grundzahl der angewandten Logarithmen entspricht, indem dann die Formel den Werth 1 für $k$ giebt. Da nun der Nullwerth der Grösse bei dem Einheitswerth der Intensität und dieser bei dem Nachtdunkel angenommen ist, so würde der Einheitswerth der Grösse bei einer Intensität statt finden, welche unter Anwendung gewöhnlicher Logarithmen das 10fache, unter Anwendung natürlicher Logarithmen das 2,71828fache der Intensität des normalen Nachtdunkels oder eines sich eben darin verlierenden Sterns beträgt, und es würden zugleich 10 und 2,71828... die respectiven Exponenten der Intensitätsreihen sein, welche eines und andern Falls der Reihe der aufeinanderfolgenden ganzen Grössen zugehörten, wovon letzter Werth zwischen den Herschel'schen und Steinheil'schen, wenn schon dem letzten näher, fällt. Hieraus ergiebt sich das merkwürdige Resultat, dass die Intervalle der Sterngrössen durch eine Art natürlichen Instinct selbst ihrer absoluten Grösse nach ungefähr oder genau, was sich selbst nicht genau entscheiden lässt, so bestimmt sind, wie es nach der natürlichsten oder rationellsten mathematischen Feststellung nur immer geschehen könnte, so dass unser neues System der Sterngrössen wesentlich nur den Ausgangspunct und die Richtung der Reihe aber nicht die Grösse der Intervalle ändern würde, falls man anders natürliche Logarithmen dabei anwenden will.

Inzwischen ist die Prüfung dieser Vorschläge den Astronomen zu überlassen, und wahrscheinlich werden es Vorschläge bleiben.

Auf dieselbe Weise, als hier die Grössen- d.i. Helligkeits-Empfindung eines Sternes als Differenz von einer Nullempfindung oder richtiger bestimmten Empfindung (sofern auch das Nachtdunkel noch empfunden wird), durch eine functionelle Beziehung zur Intensität des Sterns ausgedrückt wird, wird sich die Grössendifferenz jeder Empfindung von einer Nullempfindung oder bestimmten Empfindung durch eine entsprechende functionelle Beziehung zur Intensität des Reizes ausdrücken lassen, in so weit nur dasselbe Gesetz gilt, auf welches die Function sich stützt. Gehen wir dabei von einer Nullempfindung

aus, welche anderweit geltend zu machenden Erfahrungen zufolge überall nicht bei einem Nullwerthe sondern endlichen Werthe der Reizeinwirkung (den ich den Schwellenwerth nenne) statt findet, so wird eine doppelt so grosse Differenz von der Nullempfindung mit einem doppelt so grossen Werthe der Empfindung selbst zusammenfallen; und hiemit ein wirkliches Mass der Empfindung erlangt sein. In den negativen Empfindungswerthen aber, welche Reizwerthen entsprechen, die niedriger als der Schwellenwerth des Reizes sind, wird man, entsprechend wie bei den teleskopischen Sterngrössen nach unserm obigen System, ein Mass für die Entfernung von dem Grade der Reizwirkung haben, wo eine Empfindung merklich zu werden beginnt, oder, wie ich mich kurz ausdrücke, für die Tiefe ihres Unbewusstseins.

Diese Andeutungen einer weitergreifenden psychophysischen Theorie, deren Ausarbeitung zu den ganzen vorigen Untersuchungen erst geführt hat, müssen hier genügen. In Betreff der Entwickelung selbst verweise ich auf meine Elemente der Psychophysik.

Nur einiger der interessantesten Folgerungen dieses Empfindungsmasses in seiner Anwendung auf die Verhältnisse zwischen Grösse und Intensität der Gestirne mag hier noch gedacht werden, aus deren Darlegung zugleich erhellen dürfte, dass sich auf Grund dieses Masses Rechnungen mit Empfindungsgrössen ausführen lassen, die etwas mehr als blosse Rechnungsbeispiele sind, vielmehr beitragen können, uns im Gebiete der Wirklichkeit zu orientiren.

Nach Vorigem kann man in der Grössendifferenz eines Sterns von derjenigen Grösse, wo er für das Auge verschwindet, ein Mass des Helligkeitseindruckes finden, den er auf das Auge macht, und diesen unter Voraussetzung der natürlichsten Einheiten durch die Formel

$$G = \log i$$

bestimmt finden. Nennen wir im Folgenden Helligkeit $G$ kurz diesen Helligkeitseindruck, um ihn von der Intensität $i$ zu unterscheiden, als deren Function er durch vorige Formel dargestellt wird. Sind mehrere Sterne, oder wie in Mond und Sonne mehrere unterscheidbare leuchtende Puncte desselben Gestirnes gegeben, so erhalten wir durch Summirung ihrer Helligkeiten eine gewisse Helligkeitssumme. Nun lässt sich aus unserer Formel leicht Folgendes beweisen:

1) Wenn sich die Intensität eines sehr hellen Sterns verdoppelt, so nimmt die Helligkeit in keinem merklichen Verhältnisse zu, denn da-

mit geht $\log i$ über in $\log 2\,i = \log i + \log 2$ und wenn $i$ sehr gross ist, so verschwindet $\log 2$ gegen $\log i$. Allgemein nimmt die Helligkeit der Sterne nach einer Verallgemeinerung dieser Betrachtung in viel geringerem Verhältnisse als ihre Intensität zu. Wirklich scheinen z. B. die Sterne erster Grösse unvergleichlich weniger unter einander für das Auge zu differiren, als man nach ihren starken photometrischen Unterschieden (vergl. S. 501) erwarten sollte.

2) Wenn sich die Intensität eines als Punct erscheinenden sehr intensiven Sterns auf zwei Puncte gleich vertheilt, so verdoppelt sich merklich die Helligkeitssumme, welche dadurch erhalten wird; denn wir erhalten so statt $\log i$ den Werth $2 \log \frac{i}{2} = 2 (\log i - \log 2)$; wo bei grossem $i$ wiederum $\log 2$ gegen $\log i$ verschwindet. Allgemein wächst die Helligkeitssumme einer starken Intensität durch Vertheilung derselben, wenn solche nicht zu weit geht. Hienach würden Sonne und Mond bei respectiver Zusammenziehung in einen leuchtenden Punct zwar noch dieselbe photometrische Erleuchtung der Erde, aber bei directer Betrachtung nicht mehr dieselbe Helligkeitssumme gewähren.

3) Wenn hiegegen eine schwache Intensität von einem Puncte auf mehrere Puncte vertheilt oder die Vertheilung einer starken Intensität zu weit getrieben wird, so erfolgt Abnahme der Helligkeit im Ganzen und endlich sinkt sie ganz ins Unmerkliche. In der That geht die Helligkeit durch Vertheilung der Intensität $i$ auf die $n$-fache Zahl Puncte allgemein über in

$$n \log \frac{i}{n} = n (\log i - \log n).$$

Wenn nun die Vertheilungszahl $n$ gross wird, so wird diese Grösse null, und endlich negativ; d. h. die Helligkeit wird teleskopisch. In der That bewährt sich dieser Fall in den teleskopischen Sternen, sie sind ganz unsichtbar für das blosse Auge; aber wir brauchten ihre Intensität blos auf einen Punct gehäuft zu denken, so würden sie sichtbar werden.

4) Da die Helligkeitssumme durch Vertheilung einer starken Intensität bis zu gewissen Gränzen zunimmt, darüber hinaus aber abnimmt, so muss es einen Maximumpunct geben, wo sie die grösstmögliche ist, der Art, dass sowohl Vertheilung als Concentration Verlust der Helligkeit im Ganzen mitführt. Dieser Punct findet statt bei einer Intensität $i$, welche das $e$-fache derjenigen ist, bei welcher die Helligkeit für das Auge verschwindet, wenn $e$ die Grundzahl der natürlichen Logarithmen; so dass hienach zum oben bemerkten mathematischen Gesichtspuncte

noch ein tiefer liegender psychophysischer tritt, welcher uns veranlassen kann, an diese Intensität vorzugsweise die Einheit der Sterngrösse oder Helligkeit zu knüpfen.

Man kommt auf diess bemerkenswerthe Resultat dadurch, das man den obigen Ausdruck $n \log \frac{i}{n}$ in Bezug auf $n$ differenzirt und das Differenzial null setzt. Man erhält nämlich solchergestalt, unter Voraussetzung der Anwendung natürlicher Logarithmen in unserer Formel

$$n = \frac{i}{e}$$

welche Gleichung uns sagt, dass jede gegebene Intensität $i$ auf den Maximumwerth der Helligkeit $G$ gebracht werden kann, wenn man sie in dem Verhältnisse vertheilt, was sie zu $e$ hat, wobei man sich erinnern muss, dass als Einheit der Intensität diejenige gilt, bei welcher $G$ verschwindet. Hat nun $i$ den Werth $e$, so wird $n = 1$, d. i. die gegebene Intensität ist beizubehalten, um die Maximumhelligkeit zu erlangen. Diesseits und jenseits dieses Punctes entsprechen sich dann je zwei Vertheilungsgrade der Intensität von gleicher Helligkeit, auf deren leichte Bestimmung ich hier nicht eingehe.

Als Helligkeit der Sterne hat hier ihre Helligkeitsdifferenz von dem Puncte, wo sie im Nachtdunkel verschwinden, gegolten, welches aber keine absolute Helligkeit ist, sofern nach früheren Erörterungen das Nachtdunkel selbst noch seine Helligkeit hat, auf welche sich die der Sterne so zu sagen zusatzweis aufträgt. Es hindert aber nichts, das, was für die Differenz einer Helligkeit gegen eine andre gilt, nach entsprechender Herleitung auf eine Differenz von der Nullhelligkeit oder absolute Helligkeit zu übertragen, mit Rücksicht auf die mehrfach geltend gemachte anderwärts genauer zu belegende allgemeine Thatsache, dass die Nullempfindung nicht bei einem Nullgrade sondern bei einem endlichen Reizgrade eintritt, was die Anwendbarkeit der Formeln auf diesen Fall gestattet. Es lässt sich nun Einiges für die Vermuthung anführen, dass die Intensität des tiefsten Nachtdunkels, welche mit der des Augenschwarz übereinstimmt, selbst dem absoluten Maximumwerth der Helligkeit, der sich überhaupt mit einem gegebenen äussern oder innern Lichtreize erzielen lässt, entspricht, und eine Vertiefung des Augenschwarz nur bis zur Gränze dieses Maximum möglich ist, von wo an es, falls die innere Erregung unter den Normalgrad fallen sollte, in die Art Undeutlichkeit des Sehens über-

ginge, wie sie auch an den Gränzen des Sehfeldes im geschlossenen Auge statt findet. In der That sehen wir sonst die Einrichtungen in unserm Organismus so getroffen, dass mit möglichst wenig Kraftaufwand die grösstmöglichen Leistungen erzielt werden; und wüsste man nicht, an welchen besondern Gränzwerth man ein Maximum der Vertiefung des Augenschwarz knüpfen sollte, wenn nicht an diesen. Ins Unbestimmte aber kann die Vertiefung des Augenschwarz mit Erlöschen der inneren Erregung nicht fortgehen, weil nicht das tiefste Schwarz, sondern das Nichtssehen die Gränze der Lichtempfindung sein kann.

Natürlich reichen diese allgemeinen Betrachtungen nicht hin, die Vermuthung sicher zu stellen; aber doch unstreitig, die Aufmerksamkeit darauf zu lenken, und zu weiterer Prüfung aufzufodern, in Betracht der wichtigen Gesichtspuncte, die sich daran knüpfen. Wir würden nämlich, falls sie sich bestätigen sollte, einen neuen Grund darin finden, die Intensität des Augenschwarz oder vollkommenen Nachtdunkels als die natürlichste Einheit der Intensität anzusehen; und könnten ausserdem das Paradoxon aussprechen, dass das schwärzeste Nachtdunkel die grösste Helligkeit gewährt, welches richtig ausgelegt den richtigen Sinn hätte, dass, sowohl wenn der innere Lichtreiz, von dem das Augenschwarz abhängt, mehr concentrirt als wenn er mehr vertheilt würde, an Lichtempfindung oder Helligkeit im Ganzen verloren würde.

Jedoch es mag sein, dass das Interesse dieses Gegenstandes uns schon etwas weiter als hier schicklich, in das Feld einer bis jetzt nicht sicher zu begründenden Vermuthung geführt hat.

Die an der Lichtempfindung erläuterte Vertheilungsformel lässt noch allgemeinere Anwendungen auf das Gebiet der Empfindungen, nicht nur in Betreff der Vertheilungsverhältnisse nach Raum, sondern auch Zeit, zu, worauf ich hier nicht weiter eingehe.

---

## DRITTER ABSCHNITT.

Ich habe angegeben, dass unser, bis hieher im Gebiete der Lichtlehre verfolgtes, Gesetz doch nicht auf dieses Gebiet beschränkt ist. In der That ist das Gesetz in diesem Gebiete nur der besondre Fall eines, wie es scheint im Gebiete der Sinnesempfindungen allgemein gültigen, wenn schon überall auch seine Gränzen darbietenden, Gesetzes. Es ist jedoch nicht meine Absicht, diese seine weitere Ausdehnung auf Grund früherer und neuerer, fremder und eigener, Erfahrungen, die mir darüber zu Gebote stehen, hier noch weiter zu verfolgen. Es wird diess in meinen „Elementen" geschehen, und mein Hauptzweck wird für jetzt erreicht sein, wenn ich durch diese Abhandlung die Aufmerksamkeit auf die Wichtigkeit des Gegenstandes zu lenken vermocht habe. Hier werde ich mich mit einer kurzen historischen Uebersicht begnügen.

Eine allgemeine, jedem leicht zugängliche Erfahrung hat längst in jedem Sinnesgebiete gelehrt, dass ein gegebener Zuwachs zu einem starken Reize einen geringern Empfindungszuwachs mitführt, als zu einem schwachen, wofern der Reiz nur überhaupt eine gewisse Gränze (die Schwelle) überstiegen hat, von wo an die Empfindung erst bemerklich zu werden anfängt. So vernimmt man bei grossem Lärm den Zuwachs des Lärms durch eine einzelne Menschenstimme nicht, den man bei geringem oder fehlendem Geräusche deutlich vernimmt. So ist derselbe Gewichtszuwachs, welcher bei kleinem Gewichte sehr deutlich gespürt wird, bei grossem unmerklich, u. s. w. Diese Erfahrungen sind im Sinne unsers Gesetzes und können als Folgerungen desselben angesehen werden, insofern es schon begründet ist, aber genügen nicht, den genauen Ausspruch desselben zu begründen, dass der Reizzuwachs gerade im Verhältniss des Reizes wachsen muss, um immer gleich merklich für die Empfindung zu bleiben.

Nur im Gebiete der Tonhöhen konnte die Triftigkeit dieses genaueren Ausspruches ohne Weiteres verbürgt werden, sofern es die unmittelbare Aussage der Empfindung ist, dass ein Tonintervall, d. i. der Unterschied zweier Tonhöhen sich gleich bleibt, wenn das zugehörige Verhältniss, und mithin wenn der zugehörige relative Unterschied

der Schwingungszahlen sich gleich bleibt. Auch habe ich schon bemerkt, dass Euler, und nach ihm Herbart und Drobisch hierauf fussend wesentlich dieselbe (logarithmische) Function für die Beziehung zwischen Schwingungszahl und Empfindung der Tonhöhe (oder vielmehr Unterschiede derselben) aufgestellt haben, die ich allgemeiner für das Empfindungsgebiet in Anspruch nehme.

Aber diese unmittelbar deutliche Aussage der Empfindung findet sich über die Tonhöhe hinaus nicht wieder, und es lag keine Berechtigung vor, das, was für die Höhe gilt, auf die Stärke, und was für das Gebiet der Töne gilt, auf das Gebiet andrer Empfindungen zu übertragen. Bouguer, und nach ihm Arago, Masson und Steinheil dürften nun die ersten sein, welche die Gültigkeit des Gesetzes für die Stärke der Empfindung dargethan haben, jedoch blos in einem einzigen Gebiete, dem der Lichtlehre. Dahingegen hat es E. H. Weber*) unabhängig von den vorigen Untersuchungen zuerst in einer gewissen Allgemeinheit, d. h. bezüglich der Empfindungs-Unterschiede von Tonhöhen, Gewichten, Linearmassen ausgesprochen, und durch eigene und fremde Versuche belegt; und es verdient Bemerkung, dass diess Beispiele von den drei Hauptclassen oder drei Hauptseiten der Empfindung sind, die es überhaupt zu unterscheiden gilt, Höhe, Intensität, Extension. Auch hat er das Interesse des Gesetzes schon aus allgemeinem Gesichtspuncte hervorgehoben. Ich nenne daher das Gesetz in meinen Elementen kurz das Weber'sche.

Ich selbst wurde zuerst durch Betrachtungen allgemeiner Art auf das Gesetz als mögliche Unterlage des psychischen Masses geführt und suchte, ohne das früher bezüglich darauf schon Gefundene zu kennen, dasselbe auf meine eigene Hand, mit der werthvollen Unterstützung durch Volkmann, im Gebiete der Lichtunterschiede, Gewichtsunterschiede und des Augenmasses zu bewähren. Die Versuche bezüglich der erstern habe ich hier mitgetheilt, die bezüglich der letzteren werde ich in den Elementen mittheilen. Ausserdem hat Volkmann Bewährungen für die Unterschiede der Tonstärken hinzugefügt, auf die ich eben da komme. Diese Versuche haben eine weitere Ausbildung der bisher bekannten Massmethoden der Empfindlichkeit mitgeführt, wodurch das Gesetz, welches die Unterlage für das Mass der Empfindung zu ge-

*) Der Tastsinn und das Gemeingefühl S. 559.

währen hat, erst zu constatiren ist, die ich in meinen Elementen unter dem Namen der Methode der eben merklichen Unterschiede, der richtigen und falschen Fälle und mittlern Fehler beschreiben werde.

Die Methode der eben merklichen Unterschiede erläutert sich durch die Weise, wie zumeist das Weber'sche Gesetz für die Lichtempfindung constatirt wurde; die Methode der mittlern Fehler durch die Steinheil'sche Verfahrungsweise S. 478. Die Methode der richtigen und falschen Fälle ist auf die Lichtempfindung bisher noch nicht angewandt worden, aber im Gebiete des Augenmasses von Hegelmayer, im Gebiete der Tonempfindungen von Renz und Wolf. Diesen drei Methoden des Masses der Empfindlichkeit für Unterschiede entsprechen drei Methoden des absoluten Empfindlichkeitsmasses, worunter ich die mit der Methode der mittlern Fehler in näherer Beziehung stehende die Methode der Aequivalente nenne. Nach sehr ausgedehnten eigenen und Volkmanns Versuchen im Gebiete des Augenmasses und Tastmasses nach der Methode der mittlern Fehler und der Aequivalente, im Gebiete des Gewichtsmasses nach der Methode der richtigen und falschen Fälle, und nach der dadurch veranlassten Entwickelung der Rechnungsseite dieser Methoden, werde ich im Stande sein, dieselben mit mancher erheblichen Vervollständigung dem Gebrauche darzubieten.

---

# NEUE BEITRÄGE

ZUR

# KENNTNISS DER EMBRYOBILDUNG

DER

# PHANEROGAMEN

VON

WILHELM HOFMEISTER.

---

## I.

## DIKOTYLEDONEN MIT URSPRÜNGLICH EINZELLIGEM, NUR DURCH ZELLENTHEILUNG WACHSENDEM ENDOSPERM.

Die keiner phanerogamen Pflanze völlig fehlende, die Entwickelung des Embryo begleitende Zellenbildung im befruchteten Embryosacke, welche im Raume desselben in vielen Fällen einen umfangreichen Körper aus geschlossenem Zellgewebe erzeugt, in den hinein der heranwachsende Embryo dringt; — und die auch da, wo sie am spärlichsten auftritt, in dem vorübergehenden Erscheinen einzelner freier Zellen oder doch Zellenkerne in der Flüssigkeit des Embryosackes zum Wenigsten in einzelnen Individuen der betreffenden Pflanzen sich äussert*): — diese Zellbildung erscheint bei den Pflanzen einiger Verwandtschaftskreise in einer eigenthümlichen Modification. Es bildet sich im eben befruchteten Embryosacke eine einzige, verhältnissmässig grosse Zelle, welche einen beträchtlichen Theil des Raumes desselben vollständig ausfüllt, in der Art, dass gleich beim ersten Sichtbarwerden dieser Zelle ihre Seitenwände der Innenwand des Sackes dicht anliegen. Diese Zelle theilt sich durch eine Scheidewand in zwei Tochterzellen; ein Vorgang der in den Theilzellen stetig sich wiederholt, bis die volle Zellenzahl des Endosperms erreicht ist. Die so sich verhaltenden Pflanzen gehören folgenden Familien an:

Loranthaceen, Santalaceen, Aristolochieen, Asarineen, Cytineen, Balanophoreen; —

Orobancheen, Scrophularineen, Bignoniaceen, Acanthaceen, Labiaten, Verbenaceen, Selagineen, Globulariaceen, Lentibularieen, Gesneriaceen, Hydrophylleen, Plantagineen; —

Ericaceen, Epacrideen, Pyrolaceen (mit Einschluss der Monotropeen), Droseraceen; —

Campanulaceen, Loasaceen, Bartonieen.

---

*) So bei Tropaeolum, Trapa, Najas, Zostera, Ruppia, Canna, Orchideen.

Der ganze Innenraum des Embryosacks verhält sich als Anfangszelle des Endosperms bei den Asarineen, Aristolochiaceen, Balanophoreen, Pyrolaceen, Monotropeen; die erste Theilung des Sackes erfolgt durch eine ihn in zwei ziemlich gleiche Hälften scheidende Wand, deren jede einen Zellenkern einschliesst, und deren jede mindestens noch einmal Tochterzellen bildet. — Dagegen nimmt die Anfangszelle des Endosperms das obere Ende des Embryosacks ein; — es erscheint der eben befruchtete Embryosack durch eine Querwand in zwei Hälften geschieden, deren obere durch eine Reihe von Zweitheilungen zum Endosperm sich umwandelt, während in der unteren keine solche Zellentheilung stattfindet, bei Viscum, Thesium, Lathraea, Rhinanthus, Mazus, Melampyrum, Globularia. — Sie füllt die Mittelgegend des Embryosacks aus bei Veronica, den Labiaten, Nemophila, Pedicularis, Plantago, Campanula, Loasa; — das untere Ende desselben bei Loranthus, Acanthus, Catalpa, Hebenstreitia, Verbena, Vaccinium. Die angedeuteten Unterschiede in der Entwickelungsweise des Endosperms lassen sich schärfer und richtiger ausdrücken, wenn man — wie dies auch die consequente Anwendung der bekannten Regeln der Zellbildung verlangt, — in allen Fällen den ganzen Embryosack als Mutterzelle des Endosperms betrachtet; seine zwei ersten Theilhälften schon als erste Endospermzellen auffasst, und dann die Intensität der weiteren Vermehrung der Endospermzellen in den verschiedenen Gegenden des Embryosacks bezeichnet. Unter diesen Voraussetzungen ordnen sich die Thatsachen in folgender Weise.

A. Die Endospermzellen vermehren sich sämmtlich; die Intensität der Vermehrung nimmt von beiden Enden des Embryosacks gegen dessen Mitte hin allmälig ab.

Aristolochia, Balanophoreen, Pyrola, Drosera, Bartonia (bei letzterer abgesehen vom scheitelständigen Auswuchs des Embryosacks, der hier schon vor der Befruchtung durch eine Querwand vom ursprünglichen Raume geschieden wird).

B. Die eine der beiden ersten Tochterzellen des Embryosacks vermehrt sich gar nicht; alle Zellenvermehrung findet nur in deren Schwesterzelle statt.

$\alpha$. Nur die untere der beiden Tochterzellen vermehrt sich

Loranthus, Lepidoceras, Catalpa, Acanthus.

$\beta$. Nur die obere theilt sich fernerhin.

1. Ihre Vermehrung ist allseitig gleichmässig in dem Sinne wie unter a:

Viscum. Thesium. Asarum.

2. Die den Scheitel des Embryosacks ausfüllenden Tochterzellen halten weit früher in der Vermehrung inne, als die übrigen.

a. Der Theilungen der äussersten, die Keimbläschen einschliessenden Scheitelzelle sind nur eine, oder 1 × 1:

Lathraea. Mazus. Veronica hederaefolia und triphyllos. Rhinanthus. Melampyrum. Plantago. Globularia.

b. Die äusserste Scheitelzelle bleibt ganz und gar ohne Theilung durch Längswände:

Pedicularis. Veronica hederaefolia und Buxbaumii. Nemophila. Acanthus. Catalpa. Lamium. Prostanthera. Hebenstreitia. Campanulaceen. Loasa.

So scharf auch diese Eigenthümlichkeit des Entwickelungsganges des Endosperms bei den genannten Pflanzen hervortritt, so schwierig ist es doch, die Gränze zwischen den Phanerogamen mit nur durch Zelltheilung wachsendem Endosperm, und denen deren Endosperm durch freie Zellbildung angelegt wird, mit Genauigkeit zu ziehen.

Auch bei einigen Pflanzen aus anderen Familien kommt ein einzelliger Zustand des Endosperms vor. Das obere Ende des Embryosacks erscheint sehr bald nach der Befruchtung durch eine Querwand von dessen übrigem Raume abgeschieden; und nur in jenem oberen, auch die Keimbläschen einschliessenden Theile findet die weitere Bildung von Tochterzellen statt. So ist es unter den Dikotyledonen bei Nymphaea, Nuphar, Ceratophyllum, unter den Monokotyledonen bei Anthurium longifolium. Aber ein wesentlicher Unterschied zwischen den vorgenannten und diesen letzteren findet darin statt, dass hier das bleibende Endosperm durch eine, innerhalb der oberen Theilhälfte des Embryosaks eintretende freie Zellenbildung angelegt wird. Es bilden sich in seiner einzigen Mutterzelle gleichzeitig mehr als zwei freie Zellenkerne. Um dieselben entstehen Zellen, welche bei ihrem ersten Erscheinen die Mutterzelle noch nicht völlig ausfüllen. Dies ist sehr deutlich bei Anthurium; schwer erkennbar bei Nuphar, insofern die Zahl frei entstehender Zellkerne in der Regel drei nicht übersteigt.

Den Pflanzen, deren Endosperm durch fortgesetzte Zweitheilung einer einzigen Mutterzelle entsteht, ist es gemeinsam, dass der Embryo-

sack besonders lebhafte Wachsthumserscheinungen, und eine hohe Entwickelung seiner Membran zeigt. Schon vor der Befruchtung äussert der Embryosack ein ungewöhnliches Längenwachsthum bei den meisten der hierher gehörigen. Nach erfolgter Befruchtung treibt er häufig seitliche, oder grundständige, in einzelnen Fällen selbst gipfelständige Aussackungen, blinddarmartige Anhänge, welche zerstörend in die benachbarten Gewebe weit eindringen. Seine Haut ist überall derb, besonders stark verdickt namentlich in der Scheitelgegend. In jeder Beziehung verhält sich der Embryosack hier selbstständiger, in seinen Lebenserscheinungen minder gebunden an die der angränzenden Gewebe, als bei anderen Phanerogamen.

Die weit überwiegende Mehrzahl der ächten Parasiten gehört zu dieser grossen Gruppe*). Sie begreift nur dikotyledone Gewächse; unter diesen nächst den ächten Parasiten vorwiegend solche, deren Vegetation durch einen sehr humusreichen Boden bedingt wird (z. B. die nicht parasitischen Rhinanthaceen und Scrophularineen, die Monotropeen, Pyrolaceen, Ericaceen, Asarineen, u. s. w.).

Die Anordnung, Grösse und Festigkeit der Wände der Endospermzellen der Pflanzen aus diesen Familien machen sie zu besonders geeigneten Gegenständen der Erörterung, ob die Endospermbildung auch beim Unterbleiben der Befruchtung, in Embryosäcken, in welchen kein Embryo aus dem Keimbläschen sich entwickelt, eintreten könne. Aus dem Ergebniss der zahlreichen Untersuchungen folgt die entschiedene Verneinung dieser Frage.

*) Auszunehmen ist nur Cuscuta, deren Endosperm durch freie Zellbildung spät, erst geraume Zeit nach der Befruchtung, entsteht.

# I.

## Loranthaceen.

### Loranthus europaeus L. *).

Taf. I—IV.

Die Blüthenknospen des Loranthus europaeus werden in dem, der Blüthe um ein Jahr vorausgehenden, Frühlinge angelegt. Mitte Juni erscheint der junge (weibliche) Blüthenstand als ein schlanker Spross, der vier bis acht Paare decussirter, kurzer, fleischiger Bracteen trägt. In der Achsel jeder Bractee steht eine abgeplattet warzenförmige Zellgewebsmasse, nahezu von Form eines umgekehrten gestutzten Kegels (T. I. F. 1). Sie ist die Anlage einer Blüthe.

Einen Monat später haben auf der Scheitelfläche dieser Zellgewebsmasse zwei dreigliedrige Kreise von mit einander alternirenden Blattorganen sich erhoben: nach der Mitte der Blüthe zu übergeneigte kurze dicke Platten aus Zellgewebe von dreiseitigem Umriss (T. I. F. 2, 2b). Sie sind die Perigonialblätter. — Der Rand der Scheitelfläche der Knospe hat sich zu einem gleichhohen Ringwulste entwickelt, und stellt so den sogenannten Calyculus dar.

Auf Längsdurchschnitten solcher Knospen erkennt man, dass innerhalb der zwei dreigliedrigen Kreise von Perigonialblättern noch zwei, ebenfalls dreigliedrige, je mit dem nächstvorentstandenen äusseren abwechselnde Kreise von Blattorganen entstanden sind (T. 1. F. 3). Sie sind die Anlagen der Staubfäden. Die Rückenfläche jedes derselben verwächst auf eine geraume Strecke mit der Vorderfläche des von ihm nach aussen stehenden Perigonialblattes. — In der Mitte der Blüthenknospe steht das fortentwickelungsfähige Ende ihrer Achse, von Form eines sehr flachen Kegels. Auf dieser Stufe der Ausbildung der Blüthenknospe tritt die Winterruhe ein.

---

*) Ich verdanke das Material zur Untersuchung der Blüthen- und Embryoentwickelung dieser interessanten Pflanze Herrn Professor Fenzl, welcher die Güte hatte, während des Frühlings und Sommers 1852 von etwa 10 zu 10 Tagen frisch abgeschnittene Zweige beider Geschlechter derselben von Wien aus mir zu übersenden.

Ende Aprils des nächsten Frühlings hat um das Centrum der Blüthenknospe ein fünfter Kreis von drei Blattorganen sich erhoben, die Carpelle. Sie stehen aufrecht; sind geraume Zeit nach ihrem Auftreten völlig frei von einander, von Form gleichseitiger Dreiecke (T. I. F. 4, 6). Der Mittelpunkt der Blüthe erscheint jetzt als eine tiefe Einsenkung zwischen ihnen. Die Anordnung der Zellen dieses zu noch weiterer Entwickelung bestimmten Endes der Blüthenachse erinnert, auf Längsdurchschnitten gesehen, an die der Terminalknospe von Ophioglossum*). Senkrecht unter ihm, in geringer Tiefe, besteht eine meniskenförmige Stelle des Gewebes der Blüthenachse aus besonders kleinen würfeligen Zellen mit engen lufterfüllten Intercellularräumen. Dieses Gewebe, welches auf Längsdurchschnitten bei durchfallendem Licht als dunkler Halbmond sehr auffällig hervortritt, entspricht in seiner Zusammensetzung (und, wie die Folge zeigen wird, in seiner Lage) der Chalaza eines Eychens (T. I. F. 4, *ch*). Es bleibt im heranreifenden Samen sehr lange kenntlich.

Gegen Mitte Mai erscheint das Ende der Blüthenachse aufs Neue zu einem flachen Kegel umgewandelt (T. I. F. 7 u. 8). Die drei Carpellen, mit ihren Seitenrändern inzwischen völlig verwachsen, stellen einen die Mitte der Knospe ausfüllenden, bis zur Höhe der Staubfadenrudimente reichenden gestutzten Kegel dar, auf dessen Scheitelfläche ein axiler, auf das Ende der Blüthenachse zuführender, enger Kanal, der Griffelkanal, sich öffnet.

Von jetzt ab entwickeln sich die Blüthentheile sehr rasch in die Länge. Schon in der letzten Hälfte des Mai reicht die Spitze des Griffels bis in die Innenwölbung des Scheitels der Knospe. Sein Wachsthum geschieht zunächst durch apicale, später durch intercalare Zellvermehrung, die in der breiten Basis des Griffels ihren Hauptsitz hat. Die Zellvermehrung in den Perigonialblättern ist ausschliesslich intercalar, auf die Gegend dicht über ihrem Grunde beschränkt. Die Rudimente der Staubfäden werden dadurch hoch empor gehoben (T. I. F. 12, *s*). Auch in der Blüthenachse dicht unterhalb der Einfügung der Perigonial- und Carpellarblätter findet eine noch lebhaftere intercalare Vermehrung der Zellen statt, durch welche die bis dahin halbkugelige Gewebsmasse langgestreckte Eyform erhält, und — der gewöhnlichen Entwickelungs-

*) Vergleiche in Bd. V. (math. phys. Cl. Bd. III.) dieser Abhandlungen T. XI. F. 17b.

weise unterständiger Fruchtknoten gemäss, — das Ende der Blüthenachse tief zwischen ihre rasch emporwachsenden peripherischen Theile versenkt wird.

Während dieser Vorgänge verwächst das flach kegelförmige Ende der Blüthenachse — das einzige, aufrechte nackte Ey des Loranthus — vollständig mit den Innenwänden der Höhlung innerhalb der zum Fruchtknoten verschmolzenen Carpelle. Die intercalare Zellvermehrung dieser, hier am lebhaftesten, überträgt sich auch auf einen Theil der wenigen Zellen des Eychens, die in rasch wiederholter Folge durch Querwände sich theilen. In anderen, der Mehrzahl dieser Zellen erfolgt diese Theilung nur sparsam; sie werden bei dem starken Längenwachsthum der umgebenden Gewebe beträchtlich in die Länge gestreckt. Kurz vor dem Aufbrechen der Blüthenknospe erscheint der axile Theil des jetzt eine solide Zellgewebsmasse darstellenden Fruchtknotens — ein durch grössere Durchscheinendheit von den übrigen Geweben desselben auffällig unterschiedener spindelförmiger Zellenkörper (T. I. F. 12, die Region um die mit *e* bezeichnete Stelle) — zusammengesetzt aus einer Anzahl kurzer, fast würfeliger, und aus minder oder mehr gestreckten Zellen (T. I. F. 10, T. II. F. 12, T. III. F. 1). Die am längsten gestreckten dieser Zellen (meist drei im Kreis stehend, doch ist auch die Zweizahl häufig,) sind die Embryosäcke: meistens von cylindrischer Form, mit etwas erweiterten oberen und unteren Enden (T. III. F. 1—3, 5); bisweilen aber auch sonderbare Krümmungen und Auswüchse zeigend (T. II. F. 11, 12). Der Griffelkanal ist jetzt geschlossen; die ihn begränzenden Zellen sind nicht eigentlich verwachsen, nur papillös geworden und eng verfilzt, mechanisch trennbar (T. I. F. 12, T. III. F. 3).

Die Entwickelung der männlichen Blüthen stimmt in den Hauptzügen mit der der weiblichen überein. Die Unterschiede bestehen, ausser in der Entwickelung der Staubkolben an den Staubfäden, in weit stärkerer Ausbildung des Calyculus, und im Unterbleiben der starken intercalaren Zellvermehrung in der Horizontalebene unterhalb der Einfügung der Perigonialblätter. In Folge letzteren Umstandes erscheint der verkümmernde Fruchtknoten oberständig (T. II. F. 8, 9). Der Bau der Antheren ist der der grossen Mehrzahl der Phanerogamen gemeinsame. Sie sind ursprünglich vierfächerig, zweiklappig aufspringend, der Träger kurz und dick (T. II. F. 1, 3—6). Auch die Entwickelung und die Gestalt des Pollens haben nichts Ungewöhnliches (T. II. F. 7).

Die Keimbläschen sind im unbefruchteten Embryosacke nur in Zweizahl vorhanden, lang gestreckt (T. I. F. 13), mit zarter, äusseren Einwirkungen wenig Widerstand leistender Membran. Gegenfüsslerzellen derselben sind nicht vorhanden. Das Längenwachsthum des Embryosacks ist mit ihrer Anlegung noch nicht beendet. Er drängt sich in dem durch verfilzte Zellen verschlossenen Griffelkanal etwa um ein Viertheil der Länge desselben aufwärts (T. III. F. 7).

Hier trifft auf seinen Scheitel der dünne Pollenschlauch, der diese Stelle beim beginnenden Welken der Perigonialblätter erreicht. Sein stumpfes Ende legt sich bald dem Scheitelpunkte, bald einer der Seiten des oberen Embryosackendes an; krümmt sich bisweilen auch nicht unbeträchtlich rückwärts (T. III. F. 5, 6, 8). Die Membran des Scheitels des Embryosacks ist gleichmässig und nicht unbedeutend verdickt.

Nach Ankunft des Pollenschlauchendes am Embryosackscheitel erscheint eines der Keimbläschen sehr bald zu einer langen dünnen Röhre, einem Embryonalschlauche, gestreckt, welcher die volle Länge des Embryosackes rasch durchläuft. Das andere Keimbläschen verschwindet bald. Hat die Spitze des Embryonalschlauchs dem unteren Ende des Embryosackes sich genähert, so bildet sich in ihr eine quere Scheidewand (T. III. F. 2). Die so vom cylindrischen oberen Raume abgetrennte halbkugelige Endzelle des nun zweizelligen Vorkeims streckt sich ebenfalls zum langen Cylinder, bis sie den Grund des Embryosackes erreicht.

In diesem erweiterten unteren Ende des Sackes ist inzwischen das Endosperm angelegt worden: ursprünglich eine einzige, dasselbe völlig ausfüllende grosse Zelle (T. III. F. 2). Zur Zeit, da das Ende des Vorkeims hier anlangt, hat sie sich durch zweimalige Theilung mittelst kreuzweis gestellter Längswände in einen Körper aus vier in einer Ebene liegenden Zellen verwandelt (T. III. F. 4, 5). Zwischen die Berührungskanten dieser vier Zellen drängt sich das Ende des Vorkeims; zunächst nach mühsamer Ueberwindung eines Widerstandes, wie aus den häufigen starken Krümmungen des Vorkeims über dieser Stelle hervorzugehen scheint (T. III. F. 4).

Der Endospermkörper vermehrt die Zahl seiner Zellen zunächst vorwiegend durch wiederholte Quertheilung der vorhandenen vier. Die ersten Querwände entstehen nahe dem unteren Ende einer jeder dieser Zellen; die unteren der neu gebildeten Tochterzellen unterscheiden sich durch geringeren Umfang, wie auch durch grössere Concentration des

Inhalts auffallend von den oberen (T. III. F. 6). Die Zellenvermehrung ist auch weiterhin am unteren Ende des Endosperms weit lebhafter, als am oberen. Bis gegen die Reife hin sind am unteren Ende die Zellen kleiner, mit dichterem Inhalt gefüllt (T. III. F. 10, T. IV. F. 3, 4, 7). — Aus der ursprünglichen, gestreckt eiförmigen Gestalt (T. III. F. 9, T. IV. F. 1) geht der Endospermkörper bald durch Zellvermehrung nach allen drei Richtungen des Raumes in eine mehr breit gezogene über (T. III. F. 10, T. IV. F. 3, 4).

Während dieser Zunahme der Zellenzahl des Endosperms dringt die Spitze des Vorkeims immer tiefer in dasselbe ein. Sie erreicht dessen untere Gränze, und trifft auf die Membran des Grundes des Embryosacks meist schon zu der Zeit, in welcher der Endospermkörper noch die gestreckt-eiförmige Gestalt besitzt (T. III. F. 9, T. IV. F. 1, 2); seltener langt er erst dann hier an, wenn der Umriss des Eiweisses bereits der Kreisform sich nähert (T. III. F. 10). Auf der Innenwölbung des Embryosackgrundes angekommen, schwillt das untere Ende der Endzelle des Vorkeims beträchtlich an, und gliedert sich bald durch eine Querwand vom oberen, cylindrischen Raume ab (T. IV. F. 1, 2). Nicht selten erlangt die Endzelle bei dieser Anschwellung eine unregelmässige, gelappte Form (T. IV. F. 2). Sie theilt sich entweder sofort durch eine Längswand (T. IV. F. 2), oder es geht dieser Theilung die durch eine schräge Querwand voraus (T. IV. F. 3). In den parallelen Zellen, aus welchen jetzt das Ende des Vorkeims besteht, tritt bald eine neue Längstheilung durch auf den zuvor entstandenen rechtwinklige Wandungen ein. Die verdickte Spitze des Vorkeims ist jetzt aus vier parallelen Längsreihen von Zellen zusammengesetzt (T. IV. F. 4, $4^b$), dem noch nicht zerfallenen Vorkeime einer Abietinee sehr ähnlich.

Je in den Endzellen jeder dieser vier Längsreihen erfolgen gleichmässig noch einige Quertheilungen (T. IV. F. $4^b$). Dann hört in dreien derselben die fernere Zellvermehrung auf, während in der Endzelle der vierten eine Zellvermehrung nach allen Richtungen des Raumes beginnt (T. IV. F. $5^b$). Bald strecken sich die Zellen des so entstandenen parenchymatischen Körpers in die Länge, und stellen fortan allein den unteren Theil des sehr massig werdenden Vorkeims dar; die Zellenreihen der oberen Hälfte des Vorkeims, in welchen die Zellenbildung erlosch, zur Seite drängend. Einzelne derselben können noch am Träger des in der Entwickelung weit vorgerückten Embryo deutlich erkannt werden (T. IV.

F. 7, bei $x$). Bis zu diesem Zeitpunkte — Anfang Augusts — hält das Längenwachsthum des Endosperms eben nur Schritt mit demjenigen des Vorkeims. Das stumpfe untere Ende dieses ragt fortwährend ein Wenig aus der Basilarfläche jenes hervor, auf der als Chalaza bezeichneten Gewebspartie ruhend, und nur durch die etwas nach aussen gestülpte Membran des Embryosackgrundes von ihr getrennt (T. IV. F. 4 bis 7). Nur die — sehr spärliche — Vermehrung und Dehnung der Zellen des Scheitels des Endospermkörpers überwiegt gewöhnlich einseitig schon während dieser früheren Entwickelungszustände der Frucht die Längsstreckung des oberen, dünnfädlichen Theils des vom Endosperm eingeschlossenen Vorkeims. In Folge davon wird die obere, dünn cylindrische, zellenleere längere Hälfte des Embryosacks meistens etwas zur Seite gedrängt, und erscheint jetzt dem Endospermkörper wenig unterhalb dessen Scheitels schief angesetzt (T. IV. F. 4, 5). — Das oberste Ende dieses zellenleeren Theils des Embryosacks fällt mit dem Griffel ab, in dessen Kanal es hinein reicht, wenn dieser durch Umwandlung einer horizontalen Gewebschicht seines Grundes in korkähnliches Gewebe von der jungen Frucht sich abgliedert. Die Oeffnung des abgebrochenen Embryosackendes wird durch das Auftreten eines Propfes von in durchfallendem Lichte braunrother körniger Substanz, und unterhalb desselben auch noch durch Zusammendrückung, hervorgebracht durch quere Dehnung der von aussen angränzenden Zellen, geschlossen.

Beim Auftreten des Embryokügelchens, — des aus kleinen würfeligen Zellen mit blaugrünlichem Inhalte zusammengesetzten Gewebes am unteren Ende des massigen Vorkeims, aus welchem die bleibenden, gegen die Samenreife hin mit assimilirten Stoffen sich füllenden, nicht vertrocknenden Theile des Embryo sich entwickeln, — steigert sich die Lebhaftigkeit der Zellvermehrung im unteren Theile des Eiweisskörpers sehr beträchtlich. Diese Zellenmasse überwächst, gewöhnlich zuerst einseitig (T. IV. F. 7) die Spitze des jungen Embryo, die jetzt einer lippenförmigen Hervorragung der unteren Fläche des Endospermkörpers halb eingebettet erscheint. Indem eine Steigerung der Zellenvermehrung in gleichem Maasse bald auch auf die übrigen, den Scheitel der Embryoanlage umgebenden Zellen dieser Basilarfläche des Eiweisses sich erstreckt, wird dieses Ende des Embryo zunächst in eine cylindrische Vertiefung des Gewebes des Endosperms eingesenkt, deren Wände bei

weiterer Vermehrung und Dehnung der sie zusammensetzenden Zellen rasch vor und unter dem Embryo sich vereinigen und verschliessen, so dass dieser vom Endosperm überwallt und in dessen Masse eingeschlossen wird (T. IV. F. 8); ganz in der Weise wie die blosgelegte absterbende Gewebsmasse im Grunde der einem dikotyledonen Stamme beigebrachten Wunde durch die endliche Verschmelzung der wulstig anschwellenden Ränder derselben. — Fortan ist der Embryo allseitig vom Endosperm umhüllt, und bleibt es bis zur Keimung. Der Theil des Endosperms unterhalb seines Scheitels nimmt gegen die Samenreife noch bedeutend an Länge und Umfang zu.

Während des Heranwachsens des Endosperms sind die Zellen der ihm angränzenden Gewebe des Fruchtknotens in lebhafter Vermehrung begriffen. Insbesondere gilt dies von dem Parenchym neben und unter der Chalaza. Der früher von zahlreichen Körnchen getrübte Inhalt dieser Zellen wird während deren Vermehrung klar und durchsichtig (T. IV. F. 6, der mit *y* bezeichnete lichte Raum). Diese Gewebsmasse ist es vorzugsweise, auf deren Kosten das Endosperm an Umfang zunimmt. Ihre Zellen, soweit sie jeweilig dem Endospermkörper angränzen, werden von diesem abgeplattet, bis zum Verschwinden der Zellhöhle zusammen gedrückt (T. IV. F. 4), und entschwinden endlich der Beobachtung. Das Parenchym der Chalaza erhält sich während dieser Vorgänge lange Zeit unversehrt. Aus dem Zusammenhange mit dem von unten her ihm angränzenden, breiig werdenden Gewebe tretend liegt es wie ein todter Körper in demselben, unverändert. Beim Herausheben des Eiweisskörpers aus dem Fruchtknoten bleibt es gewöhnlich jenem anhaften (T. IV. F. 7, 9).

In den Zellen der Fruchtknotenwand, welche zwischen dem äusseren und dem inneren Gefässbündelkreise desselben liegen, und welche frühe schon eine strahlige Anordnung zeigen (T. IV. F. 6), beginnt Mitte Juni die Bildung von Viscin. In jeder Zelle erscheint ein in ihrer Mitte frei schwimmender Ballen zäher, fadenziehender, das Licht stark brechender Substanz. Später, von Mitte August an, tritt dieselbe Bildung auch in den Zellen des axilen Theiles des Fruchtknotens ober- und unterhalb des Endospermkörpers auf (T. IV. F. 6; die viscinhaltigen Gewebe sind durch dunklere Schattirung bezeichnet). Ende August erweichen sich auch die Wandungen der viscinhaltenden Zellen, nachdem der Ballen von Viscin in ihrem Innern sich bis zur völligen Ausfül-

lung desselben vergrösserte. Die dünne Gewebeschicht ausserhalb des äusseren Gefässbündelkreises (*z* in T. IV. F. 6) wird zur Wand der Beere.

Die Anfang August halbkugelige Embryoanlage erlangt gegen Ende dieses Monats Kugelform. Anfang September sprossen neben ihrem flach kegelförmigen Scheitel die beiden Kotyledonen hervor, welche mit ihren oberen Flächen dicht an einander liegend, später auch haftend, bis Mitte September schon ihre volle Länge erreichen. Jetzt wird im dicken kugeligen Wurzelende des Embryo, an welchem der Rest des vertrocknenden Embryoträgers noch kenntlich ist, die Anlage des Würzelchens sichtbar (*r*, T. IV. F. 10). Auch die Haube desselben (*h* derselben Figur) ist tief im Innern des Gewebes des Embryo eingeschlossen. Loranthus europaeus ist ganz in der nämlichen Weise eine endorhize Pflanze, wie diejenigen Palmen, deren erste Wurzel in der Verlängerung der Längsachse des Embryo liegt, Sabal Adansoni z. B. *).

---

*) In den reifen Samen von Loranthus europaeus, die mir zur Untersuchung vorlagen, war das Gewebe des Endosperms von mehlartiger Beschaffenheit, leicht zerreiblich. Die Zellen desselben vereinzelten sich ohne Weiteres, wenn dünne Schnitte in Wasser gebracht wurden. Die Pulpa dieser Beeren war während des Transports in saure Gährung übergegangen. Ich lasse unentschieden, ob die Zerreiblichkeit des Endosperms durch den Einfluss dieser Gährung in benachbartem Gewebe hervorgerufen war, oder ob sie eine normale Erscheinung ist.

Damit man noch auf anderem Wege, als durch Vergleichung der beigegebenen Abbildungen, die vorstehenden Mittheilungen über Entwickelung von Blüthe und Frucht des Loranthus europaeus controliren könne, mögen hier die Angaben der Maasse und Zellenzahlen der wichtigeren Entwickelungsstufen folgen.

1) Anlage der weiblichen Blüthe, Mitte Augusts vor der Blüthezeit (abgebildet T. I. F. 3).

Entfernung von dem einen Rand des Calyculus zum anderen 499,238 M.M.M. *)
Höhe des Blüthenbodens 106,762 M.M.M., Zellenzahl 14.
Verticale Entfernung des Rands des Calyculus von der Blüthenstandsachse 259,352 M.M.M.

2) Blüthenknospe, Ende Aprils des nächsten Jahres, entsprechend der Abbildung T. II. F. 4.

Querdurchmesser des Calyculus 184,786 M.M.M. Zellenzahl in dieser Richtung 6
— (grösster) eines Perigonialblatts 189,502 — — — - - - - - 8
— eines Carpells 230,817 — — — - - - - 21
— d. Blüthenbodens 866,012 — — — - - - - 33
(dicht unter der Einfügung der Carpelle).

---

*) 1 Mikro-Millimeter = 0,001 M.M.

So abenteuerliche Abweichungen von der Entwickelungsgeschichte des Embryo anderer Phanerogamen die des Loranthus europaeus zeigt;

---

Verticale Distanz der Spitze eines Perigonialblatts von der Einfügung der Rückenfläche desselben in den Blüthenboden 239,946 M.M M. Zellenzahl 11
Länge der Rückenfläche eines der Carpelle 195,818 - - - - 20
- - Vorderfläche - - - 230,729 - - - - 22
Höhe des Blüthenbodens (verticaler Abstand der Achsel der Bractee vom tiefsten Punkte der Einsenkung zwischen den Carpellen) 573,664 M.M.M.; Zellenzahl 31

3) **Knospe, 3 Wochen vor dem Aufblühen (Anfang Mai), wenig weiter entwickelt als der T. I. F. 9 abgebildete Zustand.**

Höhe des Germen 324,344 M.M.M.
- - Griffels 284,074 - - -
Grösste Entfernung der Gefässbündel in der Gegend der Chalaza von einander 280,767 M.M.M.; Zellenzahl 28.

4) **Knospe, unmittelbar vor dem Aufblühen (am 20. Mai); Entwickelungsstufe der T. I. F. 12 abgebildeten.**

Grösste Entfernung der inneren Gefässbündel des Germen von einander, in der Gegend der Embryosäcke 474,376 M.M.M.; Zellenzahl in dieser Richtung 40.
Entfernung zwischen den innern und äusseren Gefässbündeln des Germen an der nämlichen Stelle 85,498 M.M.M.; Zellenzahl 5.
Entfernung von den äusseren Gefässbündeln bis zur Epidermis des Germen 320,441 M.M.M.; Zellenzahl 12.
Höhe des Germen 1. M.M., 963,696 M.M.M.
Ganze Länge des längsten Embryosacks 774,989 M.M.M. (wovon ein Stück von 82,94 M.M.M. Länge in den Griffelkanal reicht).

5) **Befruchteter Embryosack, Entwickelungsstufe wie T. III. F. 5.**

Ganze Länge 1 M.M., 332,114 M.M.M.

6) **Junge Frucht, in der Entwickelung soweit vorgerückt, wie die T. IV. F. 4 abgebildeten Theile darstellen.**

Länge des Germen 3 M.M.
- des Embryosacks 1 M.M., 356,936 M.M.M.; wovon auf den Eiweisskörper kommen 85,498 M.M.M.
Entfernung der innern Gefässbündel des Germen vom Embryosack:
a. Durchsichtige Schicht 209,608 M.M.M.; Zellenzahl 11.
b. Viscinhaltige Schicht 212,366 - - - - 7.
Entfernung der inneren Gefässbündel von einander 854,99 M.M.M.; Zellenzahl, einschliesslich des für 1 Zelle gezählten Embryosacks 39.
Entfernung zwischen den inneren und äusseren Gefässbündeln des Germen 278,558 M.M.M.; Zellenzahl 6.
Entfernung zwischen den äusseren Gefässbündeln und d. Epidermis 355,784 M.M.M.; Zellenzahl 14.

7) **Eiweisskörper, Entwickelungsgrad wie T. IV. F. 5.**

Grösste Länge 208,781 M.M.M.
- Breite 212,917 - - -

— sie werden noch überboten von derjenigen einiger ostindischer Loranthaceen, deren Beschreibung wir Griffith verdanken*). Die genauere Kenntniss der Embryoentwickelung von Loranthus europaeus, wie sie jetzt vorliegt, erlaubt die zahlreichen Lücken der Darstellung Griffith's zu ergänzen, und ein anschaulicheres Bild des Herganges der Samenbildung dieser interessanten tropischen Formen zu entwerfen.

Griffith erkannte bei allen den Arten von Loranthus, welche er untersuchte (L. Scurrula, globosus, bicolor), dass auf den früheren Entwickelungsstufen der Blüthe eine deutliche, mit dem Griffelkanal in offener Verbindung stehende Höhlung des Ovarium vorhanden ist, die erst bei weiterer Ausbildung der Frucht undeutlich wird und verschwindet**). Vom Grunde dieser Höhlung erhebt sich ein flach kegelförmiges Wärzchen von Zellgewebe („a nipple-shaped process"); — dieses ist das von mir als Eychen gedeutete Gebilde. Bei Loranthus bicolor hat Griffith auch die von mir als Chalaza bezeichnete Gewebspartie unterhalb

8) Junge Frucht, von der Entwickelung der T. IV. F. 6 dargestellten. Länge des Germen 5,5 M.M.

Entfernung der inneren Gefässbündel desselben vom Embryosack:

a. Durchsichtige Schicht 63,431 M.M.M.; Zellenzahl 6

b. Viscinhaltige - 281,316 - - - - 16.

(Entfernung der inneren Gefässbündel von einander 1 M.M., 203,155 M.M.M.; Zellenzahl, den Embryosack = 1 gerechnet, 46).

Entfernung zwischen den inneren und äusseren Gefässbündeln 727,112 M.M.M. Zellenzahl 17

Von da zur Epidermis . . . . . 339,234 - - - - 13

Breite des Eiweisskörpers . . . 510,897 - - -

- des Vorkeims . . . . 290,693 - - -

9) Nahezu reifer Embryo (wie T. IV. F. 10).

Länge der Kotyledonen . . . . . . . 2 M.M., 986,914 M.M.M.

Verticale Distanz des Gipfels des Achsenendes vom unteren Ende der im Radicularende des Embryo eingeschlossenen Wurzel . . . . 579,18

Von da bis zum Radicularende selbst . . . . 612,276

Ganze Länge des Embryo . . . . . 4 M.M., 178,37 M.M.M.

Grösste Breite der Achse desselben . . . 1 - - 169,392 - - -

*) Griffith's erste Abhandlung, am 21. Juni 1836 der Londoner Linné'schen Gesellschaft vorgelesen, steht abgedruckt in Bd XVIII. der Verhandlungen dieser Gesellsschaft, (erschienen 1841) p. 71 ff.; die zweite (gelesen 1843) findet sich im XIX. Bande derselben Sammlung (1845) p. 17 ff.

**) a. a. O. vol. XIX, p. 178.

des Eychens erkannt und abgebildet*). Die Embryosäcke (Ovules nach Griffith's, an Decaisne sich anschliessender Ausdrucksweise) sind geraume Zeit vor der Befruchtung von ihm gesehen: in der Regel in Mehrzahl; bei L. bicolor bis zu sechsen. Dass sie aus dem Eychen hervorsprossen, vermochte Griffith zwar nicht zweifellos zu ermitteln**). Nach dem, was von L. europaeus bekannt ist, kann jedoch daran nicht gezweifelt werden. Bei Loranthus bicolor reichen die Embryosäcke im Griffelkanale weit aufwärts, bis nahe an die Narbe. Der Griffelkanal bleibt bei den ostindischen Arten um Vieles deutlicher und offener, als bei der europäischen. — Nachdem Pollen auf die Narbe gelangt war, fand Griffith Pollenschlauchenden an den Scheiteln der Embryosäcke haften, und das Innere derselben der ganzen Länge nach durchzogen von fadenförmigen Zellen. Der Durchmesser derselben ist am grössten nahe dem Scheitel des Embryosacks; weiter abwärts verjüngen sie sich beträchtlich, ohne jedoch so dünn zu werden wie die Pollenschläuche ausserhalb des Sackes. Diese fädlichen Zellen, welche Griffith unter dem Einflusse der irrigen Angaben Schleiden's für Pollenschläuche hält, welche in den Embryosack eingedrungen seien, sind ohne alle Frage die befruchteten und zu Embryonalschläuchen gestreckten Keimbläschen. Merkwürdig genug — und dies ist die grösste Abweichung in der Entwickelung der indischen Formen von der in unserem Vaterlande vorkommenden — ist jeder Embryonalschlauch doppelt. Jeder besteht aus zwei parallelen, mittelst der planen Flächen in innigster Verbindung stehenden halbcylindrischen Zellen. Sehr wahrscheinlich ist eine frühe, der Längsstreckung noch vorausgehende Längstheilung des befruchteten Keimbläschens die Ursache dieser auffallenden Erscheinung. — Das offenbar nicht minder früh, als bei L. europaeus auftretende Endosperm von L. bicolor und L. globosus wird, ganz wie dort, vom Vorkeime rasch durchwachsen, der dann aus dem unteren Ende des Endosperms hervor tritt. Bei L. bicolor auf keine sehr weite Strecke; selbst das noch sehr junge Embryokügelchen ist immer zum Theile wenigstens vom Endosperm umschlossen***). Ganz anders bei Loranthus globosus. Die weit aus dem Endosperm hervorwachsenden

---

*) a. a. O. T. XX. F. 1.

**) a. a. O. p. 178, Anmerkung.

***) a. a. O. p. 179.

Vorkeime nehmen hier schraubenlinige Lagerung an; ähnlich wie im Eyweisskörper der Coniferen nach dem Hervorbrechen aus den Corpusculis. — Es ist bei beiden Arten Regel, dass mehrere Embryosäcke befruchtet werden. Nicht allein die so entstehenden mehreren Endosperm-Massen, sondern auch die aus deren unteren Enden hervorgetretenen Vorkeime pflegen unter einander zu verwachsen, ohne dass jedoch aus der Zellenmasse, zu welcher die Enden der Vorkeime zusammen treten, bei L. bicolor mehr als ein einziger Embryo sich zu entwickeln pflegt. Bei L. globosus dagegen zeigt sich eine „Tendenz zur Wiedertrennung" der vereinigten Vorkeime darin, dass aus jenem Zellenkörper häufig zwei, noch mit besonderen Trägern versehene Embryonen hervorsprossen. — Gegen die Samenreife hin umwächst und überwallt das Endosperm den oder die Embryonen, ganz wie bei L. europaeus. Der Vorgang hat bei L. globosus nur durch die beträchtliche Entfernung des Embryo vom Endosperm etwas sehr sonderbares. — Die dritte von Griffith untersuchte Art der Gattung, L. scurrula, scheint dem L. europaeus in Bezug auf letzteren Punkt sich ganz ähnlich zu verhalten*).

Eine von Decaisne in seiner berühmten Arbeit über Viscum album gegebene Bemerkung über den Bau des jungen Samens von Loranthus aphyllus**) zeigt, dass hier der Streckung des befruchteten Keimbläschens zu dem die ganze Länge des Embryosacks durchziehenden Vorkeime noch weit zahlreichere und complicirtere Zelltheilungen vorausgehen müssen, als sie bei Loranthus globosus zu vermuthen sind. Decaisne fand im Scheitel des vom Endosperm bereits völlig ausgefüllten Embryosacks (des Eykerns, nach seiner Terminologie,) eine konische Masse aus Zellgewebe von grösserer Dichtigkeit als die des Endosperms, von deren Basis vier dünne, leicht von einander zu trennende röhrige Zellen in schraubenlinigen Windungen durch die ganze Länge des Endospermkörpers sich zogen. Die unteren Enden dieser Röhren standen in festem Zusammenhange und trugen eine homogene Zellgewebsmasse (une espèce de petit sac ou de mamelon charnu, sur lequel on ne peut découvrir aucun indice d'une strie). Spätere Zustände zeigen, dass aus dem unteren Ende dieses zelligen Körpers der Embryo sich

*) a. a. O. v. XVIII, p. 72. Die Untersuchung zeigt am entscheidenden Punkte eine Lücke.

**) Nouv. mém. de l'acad. Roy. de Bruxelles, t. XVIII. (1841) p. 32.

entwickelt. Er selbst gehört noch zum Embryoträger: das Würzelchen des Vorkeims ragt noch in ihn hinein. Wahrscheinlich wird es umgeben von einer krausenförmigen Wucherung des Vorkeims, etwa wie bei Tropaeolum, oder in stärkster Ausbildung bei Trapa.

Karsten hat in einer Arbeit über die Entwickelungsgeschichte der Loranthaceen auch den Blüthenbau und die Embryobildung einer mittelamerikanischen Art von Loranthus behandelt, die er mit dem Namen Passowia odorata belegte*). Karsten hat die Bildung des Griffels aus einem Kreise verwachsender Blattorgane nicht erkannt; er nimmt an, dass der mittlere Theil der Blüthenknospe sich nach oben wölbe und fast zur Länge der übrigen Blüthentheile sich verlängere. Die Bildung des Embryosackes stellt er so dar, dass die Querwände der axilen Zellreihe des Markgewebes der weiblichen Blüthe resorbirt werden. Dieser Embryosack soll schon vor der Befruchtung mit Zellgewebe sich füllen, bis auf einen axilen, engen Intercellularraum, in welchen später der Pollenschlauch eindringe, bis nahe an den Grund des Sackes herabsteige, wo dann sein Ende zur Anlage des künftigen Embryo sich ausbilde. — Ich stehe nicht an, meine Ueberzeugung von der Irrthümlichkeit dieser Angaben auszusprechen. In den Beobachtungen Karsten's, soweit sie durch die seiner Abhandlung beigegebenen Zeichnungen controlirt werden können, ist eine bedeutende Lücke zwischen dem Zustand der Blüthe, wo die Staubfäden eben nur angelegt sind, und der Entwickelungsstufe derselben, welche dem Aufblühen unmittelbar vorausgeht. Was Karsten über Entwickelung des Griffels und Embryosacks behauptet, ist offenbar nicht direct beobachtet, sondern aus Beschaffenheit der fertigen Zustände rückwärts erschlossen. Die Carpelle mögen bei der mittelamerikanischen Art noch früher und vollständiger verschmelzen, der Embryosack noch rascher sich dehnen, als bei der europäischen; — aber es liegt kein Grund vor, an der wesentlichen Uebereinstimmung des Entwickelungsganges zu zweifeln. Der vom Endosperm erfüllte Embryosack**) ist zuverlässig ein bereits befruchteter; der als Intercellularraum gedeutete axile Cylinder in demselben das zum Embryonalschlauch entwickelte, bereits bis hieher herabgestiegene befruchtete Keimbläschen.

*) Bot. Zeit. 1852. S. 305.

**) abgebildet a. a. O. T. IV. F. 11.

Die Auffassung der Loranthaceen als der Classe der Gymnospermen angehöriger Gewächse sei nur als geschichtliche Thatsache erwähnt*). Es erscheint nach dem Vorausgeschickten die Erörterung dieser Ansicht mir ebenso wenig nöthig, als die eingehendere Erwähnung der irrigen Behauptung älterer Systematiker, welche den Loranthaceen hängende Eychen andichten.

### Lepidoceras Kingii Hook. fil.**)

Taf. IX. F. 1—6.

Weit vollständiger als bei den bisher untersuchten Arten von Loranthus erscheinen die einzelnen Organe der weiblichen Geschlechtstheile von Lepidoceras und verwandten Formen von einander geschieden.

Vom Grunde der Ovariumhöhle von Lepidoceras Kingii erhebt sich ein schlank kegelförmiger Körper, aus gestreckten engen Zellen zusammen gesetzt, der in seinem Innern einige weitere, ebenfalls lang gestreckte Zellen birgt. Die Spitze dieses Körpers berührt den Scheitel der Wölbung der Ovariumhöhle. Die Deutung dieser kegelförmigen Zellenmasse als Eychen, der grösseren Zellen in ihrem Innern als Embryosäcke wird nach dem, was über die Entwickelung der weiblichen Blüthe von Loranthus bekannt ist, als völlig berechtigt erscheinen. — Der Raum zwischen der Aussenfläche des Eychens und der Innenseite der festen, bleibenden Fruchtknotenwand ist mit grosszelligem, zartwandigem Gewebe ausgefüllt (F. 1). So in Fruchtknoten von 1½ M.M. Länge, deren Perigon offenbar vor Kurzem erst abfiel.

In dem weiter entwickelten, etwa um die Hälfte länger, um das Dreifache dicker gewordenen Fruchtknoten ist das lockere Gewebe aus grossen Zellen verschwunden, welches den Raum zwischen Eychen und Fruchtknotenwand ausfüllt. Das untere Ende eines der Embryosäcke — des befruchteten — hat sich stark in die Breite gedehnt und ist von bereits vielzelligem Endosperm ausgefüllt (F. 4). In der Scheitelansicht

*) Schleiden in Wiegmanns Archiv Bd. I. S 253 (1839); — Meyen, über Polyembryonen. Berlin 1840, S. 41.

**) Nach Herbarienexemplaren, von King auf Chiloë gesammelt, deren Mittheilung ich der Güte Herrn Prof. Grisebach's verdanke. Vergleiche dessen „Bemerkungen zu den Pflanzensamml. Philippi's und Lechler's" in Abh. der K. Gesellsch. d. Wiss. zu Göttingen, VI, S. 21 u. 45.

erscheint dieser mit Zellgewebe erfüllte Theil des Embryosacks als ein stumpf dreiseitiger Körper. Die grössere, zellenleere obere Hälfte des Embryosacks ist von der langgestreckten cylindrischen obersten Zelle des Embryoträgers durchzogen. Das von ihr getragene, wenigzellige Embryokügelchen (F. 4, *k*) befindet sich im Mittelpunkte des flachen Eyweisskörpers.

Das Gewebe der Fruchtknotenwand hat sich zu drei auffällig verschiedenen Schichten differenzirt. Die innerste derselben (T. IX. F. 3, *a*) besteht aus einer einfachen Lage tafelförmiger Zellen von geringem Quer-, und etwa viermal grösserem Längsdurchmesser. Auf diese folgt eine Schicht sehr enger, quergestreckter Zellen (F. 3, *b*), an welche die äusserste Zellschicht der Fruchtknotenwand, eine dicke Platte derbwandigen Parenchyms, sich anschliesst.

In der nahezu reifen Frucht erlangt die mittlere dieser Zellschichten eine sehr beträchtliche Entwickelung, indem namentlich im oberen Theile der Frucht ihre Zellen stark in die Länge wachsen, und dabei, durch die äusserste Schicht der Fruchtknotenwand an freier Ausdehnung gehindert, einen geschlängelten Verlauf annehmen (F. 5, *b*). Da, wo eine dieser cylindrisch und von ihren seitlichen Nachbarzellen völlig frei gewordenen*) Zellen mit einer der tafelförmigen dickwandigen Zellen der innersten Zellschicht der Fruchtknotenwand zusammenhängt, zeigt die Wand dieser Zelle einen Tüpfel (F. 6, *a*). Die Aussenwand des Fruchtknotens ist in ihren äussersten Zellschichten fleischig geworden; im getrockneten Zustande runzelig (F. 5). Der Innenraum des Fruchtknotens ist jetzt völlig ausgefüllt von dem birnförmigen Endosperm (F. 5, 6, *e d*), welches selbst bis auf zwei bis drei Zellschichten vom grossen, grünen Embryo, mit sehr entwickeltem Wurzelende und zwei umfangreichen, platt an einander liegenden Kotyledonen verdrängt ist.

### Viscum album L.

Taf. V—VIII.

Im zeitigen Frühjahre, vor dem Erwachen der Vegetation (Anfang März etwa) ist die Anlage des Sprosses der Mistel, welcher im nächst-

*) Der Raum zwischen diesen Zellen ist mit einer zähen, fadenziehenden Substanz (Viscin) erfüllt.

folgenden Jahre zur Blüthe gelangen wird, vollständig verborgen in der durch eine Anschwellung des Blattstiels geschlossenen Achselhöhle der Laubblätter unterhalb der zum Blühen im laufenden Jahre bestimmten Inflorescenz (T. V. F. 1, *x*). Der Spross hebt an mit zwei schuppigen, rechts und links stehenden Vorblättern (T. V. F. 2, *a*), auf welche, durch ein bereits etwas in die Länge entwickeltes Stengelglied von ihnen getrennt, die zwei gegenständigen Laubblätter des Sprosses (dieselbe Figur, *b*) in zu den vorigen gekreuzter Stellung folgen. Diese Laubblätter haben bereits eine nicht unbeträchtliche Länge. In der Achsel eines jeden findet sich die Anlage des zur Entfaltung im zweitnächsten Jahre bestimmten Sprosses, von Gestalt eines flachen Wärzchens aus zartem Zellgewebe (seine Lage ist bei erwähnter Figur durch den punktirten Kreis *x* angedeutet). — Das Sprossende zwischen den Laubblättern zeigt noch ein Paar von Hochblättern (Bracteen); der decussirten Blattstellung der Pflanze gemäss mit den Laubblättern gekreuzt (T. V. F. 2. *c*). Zwischen ihnen erhebt sich der Vegetationspunkt als ein flacher Kegel aus wenigen grossen Zellen (T. V. F. $2^b$).

Ende Aprils tritt noch ein Paar von Bracteen oberhalb der eben erwähnten am Sprossende auf (T. V. F. 3, 4, *d*). In den Achseln der unteren erscheinen die Anlagen von Knospen (T. V. F. 3, *y*); sie sind die Anfänge der seitlichen Blüthen der Inflorescenz. Die Achseln des oberen Bracteenpaares blieben an den von mir untersuchten Pflanzen in der Regel steril. Das Sprossende zwischen den obersten Bracteen wandelt sich zur Terminalblüthe um. Zunächst (bei der weiblichen Blüthe, deren Entwickelung vorerst uns beschäftigen soll) durch stärkere Entwickelung der peripherischen Theile, in deren Folge das Knospenende flach vertieft erscheint (T. V. F. 3). So wird der Calyculus angelegt; kein Kreis von Blattorganen, sondern eine blosse Parenchymwucherung.

Mitte Juni hat sich aus der Mitte dieser Einsenkung der Vegetationspunkt wieder kegelförmig erhoben (T. V. F. 5). An den seitlichen Blüthen der Inflorescenz, deren Entwickelung derjenigen der terminalen in dieser Periode etwas vorauseilt, sind bereits die beiden äusseren, rechts und links von der Blüthenachse stehenden Perigonialzipfel aufgetreten (T. V. F. $5^b$), denen bald die beiden inneren folgen.

Von jetzt ab geht die Entwickelung um Vieles schneller. Schon eine bis zwei Wochen später finden sich auf dem Scheitel der flachen Anlage der Endblüthe zwei zweigliedrige Blattkreise, die Perigonialblät-

ter, deren beide äussere sehr deutlich zu den obersten Bracteen im Kreuz stehen (T. VI. F. 1). An den seitlichen, von oben und unten her stark zusammengedrückten Blüthen, deren Entwickelung von jetzt ab hinter der der terminalen etwas zurückbleibt, tritt dieses Verhältniss minder scharf hervor.

Männliche Blüthenstände und Blüthen entwickeln sich bis hieher den weiblichen in allen Stücken gleich. Ihr morphologischer Aufbau ist damit beendet; — es differenziren sich unter der oberen Fläche der Perigonialblätter einzelne Zellgruppen zu Pollenmutterzellen; neue Blattorgane werden fortan nicht mehr in der männlichen Blüthenknospe angelegt (T. VI. F. 2).

In den weiblichen dagegen erscheinen Mitte Juli vor den äusseren Perigonialblättern zwei wenig vorspringende Blattorgane vom Umriss eines Viertel-Kreises (T. VI. F. 3). Diese kugelig ins Innere der Blüthe vorspringenden zwei Polster aus Zellgewebe sind die Carpelle. Bald berühren sie sich mit ihren sich abplattenden Vorderflächen, nur einen engen Spalt zwischen sich lassend (T. VI. F. 4). Die Gruppe von sehr wenigen Zellen auf dessen Grunde (T. VI. F. 4) muss als das Eychen der Mistel betrachtet werden. Schon Anfang August ist auch der enge Spalt zwischen den, in lebhafter Zellvermehrung begriffenen Carpellen bis zur Verwischung der Spur früherer Trennung verwachsen. Die Carpelle und der Blüthenboden stellen eine homogene Masse mit abgestutzt kegelförmig zwischen den Perigonialblättern empor ragendem Scheitel dar (T. VI. F. 5b).

Die Zellenvermehrung, welche in den Carpellen eintritt — vorzugsweise eine oft wiederholte Quertheilung, während deren die Gruppen aus einer Mutterzelle hervorgegangener Tochterzellen noch lange deren Umrisse erkennen lassen (T. VI. F. 4) — setzt sich tief in den Blüthenboden hinab fort, dessen dicht unter der Einfügung der Perigonialblätter gelegener Theil durch diese intercalare Zellbildung in den unterständigen Fruchtknoten sich umwandelt. Schon Anfang August besteht das axile Zellgewebe desselben aus in parallele Längsreihen geordneten würfeligen Zellen. Von dieser Zellvermehrung sind nur wenige, zwei sehr selten drei, Zellen ausgenommen, deren Lage dem Punkte entspricht, an welchem der, jetzt geschlossene, enge Spalt zwischen den Carpellen nach unten endete. Diese Zellen strecken sich unter mancherlei Krümmungen, während ihre Nachbarzellen in stetig wiederholter Folge quer

sich theilen; — und zwar erfolgt diese Streckung, abweichend von Loranthus, zum Theil auch nach unten hin. Die sich verlängernden Zellen drängen sich mit verjüngten Enden auch abwärts zwischen die Parenchymzellen der Fruchtknotenachse. Sie sind die Embryosäcke (T. VI. F. 6, 8).

Es könnte auf den ersten Blick erscheinen, als sei die Stellung der Embryosäcke von Viscum eine Ausnahme von der Regel, welche ich früher aussprach*), dass es stets Zellen des axilen Zellstranges des Eychens seien, welche zu Embryosäcken sich entwickeln. Indess ergiebt die Untersuchung bald, dass zwei Stellen der beiden Embryosäcke von Viscum stets in derselben Verticalen liegen; in einer Verticalen, welche mit der Längsachse der Blüthe zusammenfällt. Diese Stellen sind diejenigen Punkte, an welchen die Embryosäcke am engsten sind, etwa um ein Sechstheil ihrer Länge vom unteren Ende entfernt. (In der beigegebenen Zeichnung, welche Embryosäcke in natürlicher Lage darstellt, T. VI. F. 7, tritt dieses Verhältniss aus dem Grunde nicht hervor, dass die frei gelegten unteren, so zu sagen verschlungenen Enden der Embryosäcke auf eine horizontale Fläche projicirt dargestellt sind; so wie sie nach dem Auflegen mit dem Deckglas erschienen. Eine perspectivische Abbildung wäre verworren erschienen.) Nichts steht der Annahme entgegen, dass diese, mit der Kreuzung der Richtung der Embryosäcke zusammen fallende engsten Stellen derselben den Ort der ursprünglich in Grösse von den Nachbarzellen nicht verschiedenen Gewebezellen bezeichnen, welche zu Embryosäcken dadurch sich entwickelten, dass die eine aufwärts mit seitlicher Abweichung nach rechts und zugleich abwärts mit seitlicher Ablenkung nach links, die andern aufwärts, nach links seitlich abgelenkt, und zugleich abwärts, nach rechts abweichend auswuchs.

Schon Anfang Octobers sind die Keimbläschen und deren Gegenfüsslerzellen gebildet. Der Embryosack sowohl, als seine Tochterzellen sind jetzt noch zartwandig. Die Keimbläschen, meist zu zweien, seltner zu dreien vorhanden, haften mit breiten Ansatzflächen an der Innenwand des Embryosacks. Diese Ansatzflächen sind bisweilen eine Strecke von einander entfernt (T. VII. F. 4, T. VIII. F. 11). Die Keimbläschen sind kurz birnförmig, mit blassem schwach contourirtem Kern (T. VI. F. 7$^{b}$). Die

*) Berichte der K. Sächs. Ges. d. Wiss. 1856, S. 80; und Pringsheim Jahrbücher I, 178.

Zahl ihrer Antipoden schwankt zwischen einer und zweien. Nicht selten fehlen sie völlig.

Während des Winters erhalten der Embryosack und seine Tochterzellen festere Membranen. Die des Sackes selbst wie die der Gegenfüsslerzellen der Keimbläschen, erlangt eine ungewöhnliche Dicke (T. VI. F. 8, *b c*), und zeigt deutlich Schichtung (T. VII. F. 5, 6). Die Haut der Keimbläschen bleibt dünner, lässt aber sehr entschieden alle Eigenthümlichkeiten einer Cellulosemembran erkennen (T. VI. F. 9; T. VII. F. 2). So erscheinen die Embryosäcke Ende März, zu welcher Zeit es nicht schwer hält, sie unverletzt aus dem umschliessenden Parenchym herauszuschälen. Nach solcher Freilegung zeigt die Membran der Scheitelgegend des Embryosacks eine, bisher bei keiner anderen Pflanze beobachtete Eigenthümlichkeit. In der verdickten Membran befinden sich eine bis zwei eng umgränzte, unverdickt gebliebene Stellen; wahre Tüpfel. Sehr häufig ist die dünne Membran, welche diese Tüpfel verschliesst, nach aussen vorgestülpt (T. VII. F. 1, 4—6; T. VIII. F. 3, 5). Diese Tüpfel stehen bald auf den Ansatzflächen von Keimbläschen, bald neben denselben. Sie finden sich nicht an allen Embryosäcken*).

Mit dem Wiedererwachen der Vegetation tritt deutlicher eine bisher nur schwach (T. VI. F. 6) angedeutete Sonderung der Wand des unterständigen Fruchtknotens in vier Gewebschichten verschiedener Beschaffenheit hervor. Die äusserste, das Epicarpium, von den Gefässbündeln durchzogen die zu den Perigonialblättern gehen, ist mässig reich an Chlorophyll, die Wände der Zellen etwas dicker und derber als die chlorophyllarmen der nächstfolgenden Schicht, des zunächst nur dünnen Mesocarpium. Das Endocarpium endlich, die Achse des Fruchtknotens ausfüllend, von Flaschenform, ist überreich an Chlorophyll. In seinem Innern aber findet sich eine Gruppe von chlorophyllarmen, protoplasmareichen Zellen, welche die Embryosäcke einschliesst. Dass die Bildung der vier Schichten nur auf dem verschiedenartigen Verhalten

*) Die Tüpfel der Embryosackhaut von Viscum erscheinen dann nicht mehr als ein völlig vereinzeltes Vorkommen, wenn man erwägt, dass die Membran der Scheitelgegend der Embryosäcke sehr vieler anderer Phanerogamen in ihrer Verdickung hinter der der übrigen Embryosackhaut beträchtlich zurück bleibt. Allerdings sind diese Stellen minder eng umgränzt, und minder scharf von den dickeren Theilen der Haut abgesetzt; vielmehr allmälig in diese übergehend. So z. B. die Scheitelregion des Embryosacks von Crocus, von Campanula, von Viola u. A.

der Zellen eines und desselben zusammenhängenden Gewebes beruht, zeigt nicht allein die Entwickelungsgeschichte, sondern auch der ganz allmälige Uebergang besonders der zweiten in die dritte.

Das Verstäuben des Pollens der Mistel erfolgt bei uns gewöhnlich in der ersten Hälfte des April*). Die Zeit, deren die Pollenschläuche zu ihrer Entwickelung, und bis zum Vordringen zu den Embryosäcken bedürfen, ist sehr veränderlich; offenbar in hohem Grade von der Gunst der Witterung abhängig. Die Berührung von Pollenschlauch und Embryosack erfolgte 1851 erst gegen Ende des Mai; 1852 schon Anfangs desselben Monats; 1855 und 56 Mitte Mai. — Der Pollenschlauch bahnt sich seinen Weg durch das Parenchym des Narbenkörpers, ohne dass sein, oft sehr geschlungener Lauf die Richtung der einstigen Spalte zwischen den Carpellen einhielte. Es gelingt nur schwer, grössere Stücken desselben frei zu legen (T. VIII. F. 8). Seine Wandung erhält schon während des Herabsteigens durch den Narbenkörper beträchtliche Dicke. — Der Aussenseite des Embryosacks legt er sich mit stumpfem Ende an. Oft trifft er genau auf einen der Tüpfel des Embryosacks (T. VII. F. 6; T. VIII. F. 7); eben so häufig haftet er aber auch neben einem solchen an der Aussenwand des Sackes (T. VIII. F. 3, 6, 7). In einem Falle ist beobachtet, dass das Pollenschlauchende eine Gabelung zeigte; der dünnere, spitzer endende Arm haftete an einer Tüpfelstelle des Sackes; der dickere stumpfe Arm kroch eine kleine Strecke an der Aussenwand des Embryosackes hin (T. VII. F. 4, *a, b, c*). Nicht selten haftet der Pollenschlauch am Embryosack nur lose, so dass beide bei der Freilegung sich leicht trennen (T. VII. F. 3; T. VIII. F. 9).

Schon beim Auftreffen des Pollenschlauchs auf den Embryosack ist gewöhnlich nur eines der Keimbläschen, das dem oberen Ende des Sackes ferner der Innenwand desselben anhaftende, noch intact (T. VII. F. 3—6; T. VIII. F. 1—8, 9—12 *k'*); das oder die anderen sind ver-

*) Viscum album fehlt der Umgebung Leipzigs völlig. Ich verdanke den Stoff zu meiner Untersuchung der Güte einiger Freunde, welche oft wiederholt frische Zweige mir zusandten: Prof. G. Reichenbach aus Tharandt, Prof. Schnizlein aus Erlangen, Hr. Röse aus Schnepfenthal am Thüringer Wald. Die Standorte der Pflanzen, auf welche Obiges sich bezieht, sind beträchtlich hoch über dem Meere gelegen: Wald über Tharandt nicht unter 900'; Hügel bei Schnepfenthal nicht unter 1100'. Dies mag die Unterschiede meiner Zeitangaben von den auf das milde Klima Bonns sich beziehenden bei Treviranus erklären.

schrumpft, ihr Inhalt eine grumöse, weissliche (in durchfallendem Lichte bräunlichgelbe) Masse (in denselben Figuren, *k*). Selten ist ihre Membran noch deutlich vorhanden (T. VII. F. 6, 7, 12); häufiger ist die Zelle zu einem Körper aus körniger Masse verwandelt, oft von Wurmform (T. VII. F. 3, T. VIII. F. 3, 7), oft auch noch den Umriss des Keimbläschens zeigend (T. VII. F. 4, 5); minder oft von unbestimmten Umrissen (T. VIII. F. 2, 4, 11). Noch seltener ist im vor Kurzem erst vom Pollenschlauch erreichten Embryosack jede Spur der unbefruchtet gebliebenen Keimbläschen verschwunden (T. VII. F. 6). — Die Membran des erhaltenen, befruchteten Keimbläschens dagegen erscheint jetzt um vieles dicker und derber, als vor Ankunft des Pollenschlauchs am Sack. Der Zellenkern im Innern des Keimbläschens ist häufig nicht mehr wahrzunehmen (T. VII. F. 5, 6); in andern Fällen lassen seine Umrisse nur schwierig sich erkennen (T. VII. F. 3); in noch anderen treten sie mit grösster Deutlichkeit hervor (T. VII. F. 4; T. VIII. F. 7, 9, 10, 12).

Die erste wesentliche Veränderung, welche im Embryosacke nach Anlangen des Pollenschlauches an dessen Scheitel hervortritt, ist das Erscheinen zweier, im Mittelraume desselben frei schwebender grosser Zellenkerne, durch Bänder oder strahlige Faden kernigen Schleimes mit dem Wandbelege aus ähnlichem Schleime verbunden. Dem Auftreten dieser Kerne folgt sofort die Bildung einer den Embryosack quer durchsetzenden Scheidewand zwischen beiden Kernen, welche den Sack in eine, gewöhnlich längere untere und kürzere, aber geräumigere, obere Hälfte theilt (T. VII. F. 4). Dass diese Scheidewand die Berührungsfläche zweier vollständiger, jede eine Hälfte des Embryosacks ausfüllender zartwandiger Zellen ist, wird sehr wahrscheinlich durch das vereinzelte Vorkommen von Fällen, in welchen die Zelle unterhalb der Scheidewand das verjüngte Ende des Embryosackes nicht vollständig ausfüllt, sondern mit stumpfem Ende in dasselbe hinein ragt (T. VIII. F. 10). In diesem Falle füllte die einzige grosse Mutterzelle des Endosperms den Embryosack nur zum Theil aus; sie reichte nicht bis in sein engeres unteres Ende.. Bei dem gewöhnlichen Vorgange erscheint der ganze Innenraum des Sackes als die Urmutterzelle des Endosperms, wir dürfen uns vorstellen, dass die zarte Haut dieser der Innenwand des Sackes, der Aussenwand der Keimbläschen und deren Gegenfüsslerzellen auf allen Punkten dicht anliege.

Die untere der so entstandenen zwei Endospermzellen vermehrt

sich entweder gar nicht weiter, oder nur noch durch einige Quertheilungen. In der oberen dagegen beginnt, nach einigen Quertheilungen, Vermehrung nach allen Richtungen des Raums, bald früher (T. VIII. F. 10, 12) bald später (T. VII. F. 9), die binnen etwa vier Wochen nach der Befruchtung den oberen Theil des Embryosacks zu einem aus schon vielen Zellen zusammen gesetzten Endospermkörper umwandelt.

Die Zellvermehrung im befruchteten Keimbläschen ist währenddem eine ungemein langsame. Noch vier bis fünf Wochen nach dem Verstäuben des Pollens ist es meistens eine einfache Zelle, unverändert. Anfang Juni erst erfolgt seine erste Theilung durch eine Querwand. Beide so gebildete Tochterzellen pflegen durch Längswände sich zu theilen; die untere früher (T. VIII. F. 13) und öfter als die obere. Auch die fernere Zellvermehrung ist zunächst nur langsam; Anfang Juli ist die Embryoanlage ein sehr kleiner, aus sechs bis acht Zellen bestehender Körper, eingeschlossen im oberen Ende des schon umfangreichen Endospermkörpers (T. VIII. F. 14, 15). Erst Ende Juli wird die Entwickelung lebhaft. Aus dem unteren Ende des kurzen, massigen, zum Embryoträger werdenden Vorkeims sprosst rasch der immer tiefer ins Endosperm eindringende Embryo hervor*).

Viscum album ist eine der am öftersten in Bezug auf Entstehung und Ausbildung des Samens und des Embryo untersuchten Pflanzen. Es sind insbesondere zwei Arbeiten über die Entwickelungsgeschichte der Mistel, welche einen weitgreifenden Einfluss in der Wissenschaft ausgeübt haben: die eben erwähnte von Decaisne, und eine kleine, aber inhaltreiche Schrift von Meyen**).

Decaisne nimmt das (in allgemeinem Umriss flaschenförmige,) lichtere innere Gewebe der dicken Fruchtknotenwand von Viscum album für das Ovarium, die Embryosäcke für die Eychen. Die frühesten Entwickelungszustände von solchen, die ihm (Anfangs Juni) zu Gesicht kamen, waren bereits befruchtete, durch mehrere Querscheidewände ge-

---

*) Ueber die weiteren Entwickelungszustände bis zur Samenreife, namentlich über das Verwachsen mehrerer im nämlichen Fruchtknoten zu Endospermkörpern entwickelten Embryosäcke, und die Polyembryonie vergleiche Decaisne in Mémoires de l'acad. d. Bruxelles, T. XIII. (1841) p. 29 ff., und besonders Treviranus, über Bau und Entwickelung der Eychen und Saamen der Mistel, in Abh. k. Bayr. Akad. II. Cl. VII.

**) Mém. de l'acad. d. Bruxelles, T. XIII. p. 34.

theilte*); — in deren oberster Zelle er das befruchtete Keimbläschen übersah. Neben solchen Embryosäcken hat er auch fehlgeschlagene, unbefruchtet gebliebene einzellige gesehen. Embryonen erkannte Decaisne erst Anfangs Juli, an denen er Träger und Embryokügelchen scharf unterscheidet.

Die um ein Jahr früher veröffentlichten Beobachtungen Meyen's sind ungleich vollständiger. Er begann seine Untersuchung Anfangs April, fand bereits zu dieser Zeit die Embryosäcke, in denen er indess die Keimbläschen nicht zu finden vermochte. In befruchteten Embryosäcken, welche in wenige, vier bis sechs Endospermzellen getheilt waren, erkannte Meyen ganz richtig das befruchtete Keimbläschen, in einzelnen Fällen das unbefruchtet gebliebene neben diesem. Sonderbar genug ist es ihm nicht möglich gewesen, vom Dasein von Pollenschläuchen sich zu überzeugen. — In der Deutung der Blüthenorgane stimmt Meyen, wie schon oben bei Loranthus erwähnt, völlig mit Schleiden überein: die Narbe ist ihm die Keimwarze des nackten Eychens, auf dem ohne Weiteres die Perigonialblätter stehen. — In einer neuerdings erschienenen Abhandlung hat Treviranus**), neben einer trefflichen Schilderung der späteren Entwickelungszustände des Embryo und der Umbildung der Blüthe zur Frucht, eine überkünstelte Deutung der Blüthentheile der Mistel gegeben. Von der älteren, durch die Entwickelungsgeschichte widerlegten Auffassung der Entstehungsweise unterständiger Fruchtknoten ausgehend, nennt er das Epicarpium die angewachsene fleischige Röhre der Blüthendecken; das Mesocarpium den Fruchtknoten („Eyerstock"); das Endocarpium das einzige Integument des aufrechten Eys; das lichte Gewebe im Innern desselben den Eykern. Den Embryosack erkennt er als solchen an (als Ammios); er zeichnet in der obersten der in ihm eingeschlossenen Endospermzellen das befruchtete, noch einzellige Keimbläschen***); nimmt aber unbegreiflicher Weise den Zellenkern dieses Keimbläschens für einen zelligen Körper und für „den Anfang derjenigen Substanz, welche im reifen Samen als Albumen sich zu

*) Meyen, noch einige Worte über den Befruchtungsakt und die Polyembryonie bei den höheren Pflanzen. 8. Berlin 1840.

**) Ueber Bau und Entwickelung der Eychen und Samen der Mistel. Abhandl. k. Bayr. Akad. II. Cl. VII. (1853).

***) a. a. O. T. II. F. 10, 11, 13, 14.

erkennen giebt.“ Dieser Anschauung gemäss lässt Treviranus das den Embryosack (Ammios) erfüllende Gewebe bis Anfang Juli völlig verschwinden und durch das Albumen ersetzt werden, den Embryo erst zu dieser Zeit sichtbar werden — Annahmen die alles Grundes entbehren.

Schacht hat beiläufig*) Fruchtknoten und Embryosäcke von Viscum album abgebildet: — Zeichnungen die, noch unter dem Einflusse der Horkel-Schleiden'schen Theorie entstanden, in Bezug auf das Verhältniss des Pollenschlauchs zum Embryo sämmtlich unrichtig sind, und im Uebrigen kein Verhältniss erläutern, das nicht seit Decaisne schon bekannt wäre.

Die Embryobildung ostindischer nicht näher benannter Arten von Viscum hat Griffith besprochen**). Die eine der von ihm untersuchten Formen (Species aus Mergui) ist indess, den Abbildungen nach***), offenbar von Viscum generisch und weit verschieden; ist eine Santalacee. — Bei der Art vom Himalaya tritt die Verwachsung der einzelnen wesentlichen Organe der weiblichen Blüthe später und minder vollständig ein, als bei der deutschen.

---

Die Ansicht Decaisne's von der nahen Verwandtschaft der Loranthaceen mit den Santalaceen†), neuerdings von der Mehrzahl der Systematiker adoptirt, wird auch durch die genauere Kenntniss der Entwickelungsgeschichte bestätigt. Im Baue der weiblichen Organe beider waltet nur der eine wesentliche Unterschied ob, dass bei den Loranthaceen das einzige, mehrere Embryosäcke erzeugende Ey aufrecht auf dem Grunde der Fruchtknotenhöhle steht, während bei den Santalaceen hier eine centrale, freie Placenta eingefügt ist, die an ihrer Spitze eine Mehrzahl hängender Eychen, jedes mit nur einem Embryosacke erzeugt†*). Ein

*) Das Mikroskop, 2. Aufl. Berlin 1855. F. 6—9.

**) Transact. Linn. Soc. XVIII. (1841), p. 74. XIX. (1845), 181.

***) a. a. O. XVIII. T. XI. F. 1, 3, 4.

†) Nouv. Mém. de l'acad. d. Bruxelles XIII., 29.

†*) Dies als Unterscheidungszeichen zugegeben gehört Myzodendron zu den Santalaceen, wo auch von ihm die Rede sein soll.

nur gradweiser, mehr in unserer Terminologie als in dem Entwickelungsgange liegender Unterschied*). Die beiden Familien zeigen dabei einen gewissen Parallelismus in der Embryobildung. Osyris, Thesium ähneln in dieser Beziehung Viscum, Santalum steht näher an Loranthus.

---

## II.

### Santalaceen.

---

#### Thesium alpinum L. und Th. intermedium Schrad.

Taf. X. F. 1—6.

Die vom Scheitel der langen, cylindrischen grundständigen Placenta der Thesien schräg nach unten gerichtet herabhängenden drei nackten Eychen sind vor der Befruchtung gestreckt eyförmige Massen kleinzelligen Gewebes, deren Längsachse eine enge cylindrische Zelle, ziemlich von der Länge des Eychens, einnimmt. Sie ist der Embryosack. Er ist rings von Zellen eingeschlossen; seine Scheitelgegend nur von einer einzigen Zellschicht. Nach dem Grunde hin ist er von mehreren Zellenlagen umgeben. In der Scheitelwölbung haften zwei verhältnissmässig kleine, kurz birnförmige Zellen, die Keimbläschen (T. X. F. 1).

Die von der bestäubten Narbe schnell, und meist in grosser Anzahl in die Fruchtknotenhöhle herabsteigenden Pollenschläuche bilden in dieser einen vielfach verschlungenen, lockeren Filz. Einzelne Pollenschläuche zeigen bisweilen beträchtliche blasige Anschwellungen von unregelmässigem Umriss (T. X. F. 6). Die Eychen bleiben so lange ohne

*) Er wäre schnell gehoben, wenn man das von mir als Ey bezeichnete Organ von Loranthus für die Placenta dieser Pflanze nehmen wollte. Ich kann mich nicht dazu entschliessen, der Anwesenheit der einer Chalaza gleichenden Gewebsmasse unterhalb dieses Eyes wegen. Eher, glaube ich, möchte dem Samenträger der Santalaceen der Charakter einer Placenta zu bestreiten sein. So gut wie die zusammengesetzten (verästelten) Antheren, die Payer bei Mesembryanthemum und anderwärts kennen lehrte, sind auch verzweigte Eysprossen denkbar.

merkliche Veränderung, bis das Ende eines Pollenschlauchs zwischen die Zellen der den Scheitel des Embryosacks eines der Eychen deckenden Zellschicht sich drängt, und so auf die Aussenwand des Embryosackes trifft. In allen beobachteten Fällen ist die Stelle dieses Auftreffens des Schlauches auf den Sack an der inneren, dem Samenträger zugewendeten Seite des Eychens gelegen.

Unmittelbar nach Ankunft des Pollenschlauchs beginnt ein lebhaftes Flächenwachsthum der Membran des Embryosacks an dessen äusserer, dem Samenträger abgewendeter Seite dicht unter der Spitze. Seine Haut wölbt sich hier nach aussen, drängt die — in Vermehrung begriffenen — Zellen der umhüllenden Schicht auseinander, und tritt blasig hervor (T. X. F. 2). Die Form des Embryosacks wird dadurch vollständig verzerrt. Während seine innere Seite in ursprünglicher Kürze verharrt, verlängert sich die äussere zu einer, in der Durchschnittsansicht zunächst halbkreisförmig, bei weiterem Wachsthum elliptisch gekrümmt erscheinenden Fläche. Der ursprüngliche Scheitelpunkt des Sackes, die Anheftungsstelle der Keimbläschen, erscheint dadurch an die innere Seite desselben weit hinabgerückt (T. X. F. 2, 3).

Die Keimbläschen strecken sich währenddem in der Richtung der grössten Anschwellung des Sackes. Zunächst erscheinen sie in, zur Längsachse des Embryosacks rechtwinkliger Richtung verlängert (T. X. F. 2). Die Streckung des einen übertrifft beträchtlich die des anderen; dieses letztere wird bald aufgelöst, und verschwindet. Nahe unterhalb der Keimbläschen hat sich inzwischen eine Querwand im Embryosacke gebildet, welche den gestreckten, im Gewebe des Eychens eingeschlossenen unteren Theil des Sackes von dessen halbkugeligem, in die Fruchtknotenhöhle ragenden oberen abscheidet (T. X. F. 2). — Jener untere Theil bleibt während der ganzen ferneren Entwickelung des Samens eine einfache Zelle. Sein unteres Ende verlängert sich zu einem lang gezogenen Schlauche, welcher zunächst in das Gewebe des Eychens; nach dessen Durchbohrung spitzwinklig umbiegend und senkrecht herab steigend noch tief in das des Samenträgers eindringt (T. X. F. 3—6). Die obere Hälfte des Embryosacks wandelt sich durch eine lange Reihe einander rasch folgender Zweitheilungen in den Endospermkörper um, der, in demselben Sinne fortwachsend wie der eben befruchtete Embryosack, zu einer tief in die Fruchtknotenhöhle herein hängenden eyförmigen Masse sich umwandelt.

Die Entwickelung des befruchteten Keimbläschens zum Vorkeim und Embryo erfolgt auch hier (der fast allgemein gültigen Regel gemäss) nach der Richtung hin, in welcher das Endosperm am stärksten sich ausbildet. Da diese Richtung bei Thesium der Linie vom oberen zum unteren Ende des unbefruchteten Embryosacks nahezu diametral entgegen gesetzt wird, so biegt sich das weiterwachsende Ende des Vorkeims, oft schon in frühester Jugend (T. X. F. 4; angedeutet sogar schon in der einseitigen Anschwellung des befruchteten Keimbläschens der F. 3) nach dem Grunde der Fruchtknotenhöhle hin um. In seiner Krümmung stellt der Vorkeim die schrittweise Ablenkung der Entwickelungsrichtung des Embryosacks von Thesium von der der Mehrzahl der Phanerogamen dar (hier entgegengesetzt der Entwickelungsrichtung des Eychens, bei Thesium ihr gleichsinnig). — Die Endzelle des Vorkeims theilt sich nur wenige male durch horizontale Wände, bevor Zellvermehrung nach allen Richtungen hin in ihr eintritt. Ein kleiner Theil des so entstehenden massigen Zellgewebes geht noch in Bildung des Embryoträgers ein, welcher vom dicken Wurzelende des Embryo nur ganz allmälig sich absetzt.

Während der Entwickelung des Eyweisskörpers erhalten sich viele der Pollenschläuche in der Fruchtknotenhöhle noch lebenskräftig. Oft heften sich einzelne derselben mit ihren Seitenflächen der Aussenseite des von der Embryosackhaut überzogenen Endospermkörpers an (T. X. F. 2, 6), und zwar so fest, dass die Trennung ohne Zerreissung nicht möglich ist.

Die unbefruchtet gebliebenen Eychen (nie fand ich mehr als eines befruchtet) nehmen während der Entwickelung des befruchteten an Umfang zu, indem in den den Embryosack umhüllenden Zellschichten, wie dort, eine lebhafte Zellvermehrung eintritt. Nie aber tritt der Embryosack dieser Eychen aus der ihn deckenden Zellenlage hervor.

Die Entwickelung des Samens von Osyris scheint sich, nach dem Wenigen, was wir durch Griffith darüber wissen*), der von Thesium ganz ähnlich zu verhalten. Der Embryosack wächst aus der Kernwarze des nackten Eys hervor, und streicht durch dasselbe bis zur Basis. Der

*) Griffith, Notes on the Ovulum of Santalum, Osyris, Loranthus and Viscum, in Transact. Linn. Soc. XIX, p. 171.

Pollenschlauch adhärirt sehr fest der Membran des Embryosacks. Griffith's Ansicht, dass das Endosperm nicht im Embryosack gebildet, sondern der Aussenwand desselben verhältnissmässig spät aufgelagert werde*) — eine Ansicht, welche an die Schleiden's vom Verhältniss des Prothallium der Rhizocarpeen zu der Membran der Makrospore erinnert — beruht zuverlässig, wie diese, auf dem Uebersehen früherer Entwickelungszustände, auf welchen die Membran, welche das Endosperm vom zellenleeren Theil des Sackes abgränzt, noch nicht nach aussen convex, die einzelnen Endospermzellen noch nicht nach aussen gewölbt waren. — Die Umkehrung der Entwickelungsrichtung des Embryo ist bei Osyris insofern minder vollständig, als bei Thesium, als bei Osyris der reife Embryo mit der Längsachse des Eychens einen ziemlich weit geöffneten Winkel bildet.

Die Angaben, welche Schacht über die Entwickelungsgeschichte des Samens von Thesium veröffentlicht hat**), beruhen in der Hauptsache auf irrthümlicher Beobachtung. Die Richtung des Embryoträgers, die Art seiner Anheftung an die Wand des Embryosacks beweisen streng, dass eine Lage des befruchteten Keimbläschens, wie sie Schacht für sein „in den Embryosack eingedrungenes Pollenschlauchende" abbildet, gar nicht vorkommen kann.

---

*) Das Endosperm soll entstehen: „from the deposit of minute and laxly formed cells on the surface" of the protruded part of the embryonary sac", a. a. O. p. 176.

**) Schacht, Entwickelungsgeschichte des Pflanzenembryon S. XII; T. 19,20. F. 96.

## III.

## Aristolochieen.

---

### Aristolochia Clematitis L.

Taf. X. F. 7, 8.

Die Eychen von Aristolochia Clematitis haben in der Ansicht von vorn die Form eines Dreiecks (F. 7 *b*), in der Seitenansicht die eines Parallelogramms. Die Raphe, sehr stark entwickelt, macht die Hauptmasse des unbefruchteten Eys aus. Der Eykern, von zwei dünnen Integumenten überzogen, ist an der Vorder- und Hinterfläche stark abgeplattet; der in seiner Längsachse liegende, rings von Gewebe umschlossene Embryosack schlank keulenförmig.

Bevor nach erfolgter Befruchtung die Keimbläschen sich irgend verändern, wird der Embryosack wiederholt durch Querwände getheilt. Zur Zeit des Welkens des Perigons erscheint er auf Längsdurchschnitten, welche durch die Raphe gelegt sind, als eine Längsreihe von fünf bis sieben Zellen, ähnlich dem befruchteten Embryosacke von Viscum album (F. 7). Die ersten Längswände, welche in diesen frühesten Zellen des Endosperms entstehen, sind sämmtlich der Ebene des erwähnten Schnittes parallel. Das Endosperm wächst zunächst nur in die Breite, nicht in die Dicke. Zwei Wochen nach dem Fall des Perigons frei präparirt, erscheint es als eine flache Masse aus einer einzigen Schicht grosser Zellen bestehend, deren jede einen wandständigen Zellenkern enthält (F. 8). Das eine der Keimbläschen ist jetzt verschwunden; das andere, befruchtete, ist nur wenig verändert; dickwandiger als vor und kurz nach der Befruchtung, aber noch eine einfache, kurz birnförmige Zelle, die mit breiter Ansatzfläche an der Innenwand des Sackes haftet (F. 8 *k*). Auch die fernere Entwickelung des Embryo ist sehr langsam und gering, übereinstimmend mit der von Asarum.

---

# IV.

## Asarineen.

---

### Asarum europaeum L. und canadense L.

Taf. X. F. 9—16.

Die Eychen der beiden genannten Arten von Asarum haben nicht die plattgedrückte Form derer von Aristolochia, stimmen im Uebrigen aber in ihrem Baue mit jenen überein. Schon frühe, noch vor der Befruchtung, macht sich eine vorwiegende Entwickelung der Rückseite der Raphe bemerklich. Sie erfolgt dadurch, dass die Zellen der Zellschicht zunächst unter der Epidermis sich sehr bedeutend ausdehnen, während die der Epidermis selbst, in Richtung der Tangenten sich stark vermehrend, als sehr kleinzellige Schicht jene sehr herangewachsenen Zellen bedecken (F. 9, *x*).

Der keulenförmige Embryosack liegt in der Achse des Eykerns, rings von dessen Gewebe eingeschlossen; auch auf dem Scheitel von drei Zellschichten (F. 12, 17) bedeckt. Die Keimbläschen, verhältnissmässig klein, von kugeliger Form, zu zweien, seltener zu dreien vorhanden, haften mit kleinen Ansatzflächen an der Innenwand seiner Scheitelwölbung. Der grosse, abgeplattet ellipsoïdische primäre Kern des Sackes liegt in dessen Mittelgegend der Seitenwand an, im Mittelpunkte strahliger Stränge aus körnigem Protoplasma. Die Gegenfüsslerzellen der Keimbläschen, drei an der Zahl, von beispielloser Grösse, füllen dicht an einander gedrängt die ganze untere Hälfte des Embryosacks (F. 9, 12). Bei Asarum europaeum fand ich sie beständig, bei Asarum canadense in der Regel so beschaffen. Bei letzterer Art kommen indess auch Ausnahmen vor: das Vorhandensein von mehr als drei, in verschiedener Höhe befindlicher, scheinbar ein Parenchym bildender Gegenfüsslerzellen (F. 10), und auch das vollständige Fehlen derselben (F. 11).

Nach Ankunft des Pollenschlauchendes am Embryosackscheitel theilt sich der Embryosack durch eine Querwand in zwei den ganzen Raum oberhalb der Gegenfüsslerzellen der Keimbläschen ausfüllende Tochterzellen. Wo diese Zellen fehlen, erscheint die untere der neu gebildeten

Zellen vom Chalaza-Ende des Embryosackes durch eine Wand abgegränzt (F. 11); — eine Andeutung allseitiger Membranbildung an diesen Tochterzellen. In einem Falle wurde deutlich beobachtet, dass diese Zellbildung im Embryosack eintrat, bevor das Pollenschlauchende, noch auf seinem Wege durch die vor ihm her sich verflüssigenden Zellen der Kernwarze begriffen, den Scheitel des Embryosackes erreicht hatte (F. 11)*). Die Tochterzellen des Embryosacks fahren fort, durch Quer-, Längs- und schräge Wände sich zu theilen; das Endosperm wird rasch zu einem vielzelligen, Anfangs cylindrischen (F. 12), dann bauchig anschwellenden Körper. Während dieser Vorgänge bleiben die Keimbläschen und ihre Gegenfüsslerinnen lange Zeit unverändert (F. 12). Endlich verschwindet das eine Keimbläschen; aber noch bleibt das andere, das befruchtete, eine einfache Zelle. Erst wenn das Endosperm beinahe seine volle, während der Reifung des Samens nicht mehr zunehmende Grösse erreicht hat, beginnt eine Reihe von Theilungen im befruchteten Keimbläschen. Zunächst eine Quertheilung, welcher bald die wiederholte Quertheilung der sich streckenden unteren Tochterzelle folgt. Die junge Embryoanlage erscheint nun als kurzer eyförmiger Zellkörper, der an seinem freien Ende im Querschnitt vier, weiter aufwärts zwei Zellen zeigt, und mit einer einzigen Trägerzelle an der Innenfläche des Embryosacks lose haftet (F. 14). Später erfolgt eine Längstheilung auch der Trägerzelle (F. 15). Auch im völlig reifen Samen ist der Embryo ein sehr kleiner länglicher Körper von fast viereckigem Umriss (an der Spitze nicht breiter als an der Basis), aus einer nur geringen Zahl von Zellen zusammen gesetzt, die von der Anheftungsstelle gegen die Spitze an Grösse ab-, an festem Inhalt zunehmen (F. 16).

---

*) Diese Beobachtung lässt sich allerdings auch so erklären, dass ein zweiter Pollenschlauch in das Ey gedrungen und durch den Schnitt entfernt worden sein könnte. Doch wurde in keinem Falle bei Asarum das Eintreten von mehr als einem Pollenschlauche in die Mikropyle eines Eychens gesehen.

## V.

## Cytineen.

### Cytinus Hypocistis L. *).

Taf. X. F. 19—25.

Die acht Placenten des unterständigen Fruchtknotens von Cytinus stehen auf der Innenwand desselben als vorspringende Längsleisten, in ihrer Anordnung dem Verlaufe der Gefässbündel entsprechend, welche durch die Fruchtknotenwand je zwei zu einem der vier Perigonialzipfel gehen. Die Placenten ähneln in ihrer Form vollständig denen der Orchideen: sie erscheinen sowohl auf Längs- als auf Querschnitten dendritisch verzweigt (F. 17, 18). Kein Ast der Gefässbündel tritt in die Placenten ein. Die letzten Enden der zahlreichen dichtgedrängten Verzweigungen der Placenten sind die sehr kleinen, völlig durchsichtigen Eychen.

Auf den frühesten beobachteten Zuständen (etwa acht Tage vor dem Aufbrechen des Perigons) erscheint das Ende jedes Eysprosses als eine schlank-keulenförmige Zellenmasse, bestehend aus einer axilen Zellreihe und einer einzigen, diese umwindenden Zellschicht. Dieser Theil des Eys ist der künftige Eykern. Rings um seinen Grund erhebt sich aus dem Gewebe des Eyträgers eine Ringwulst, welche durch wiederholte Theilung ihres Kranzes von Scheitelzellen mittelst geneigter, dem Eykern wechselnd zu- und abgewendeter Scheidewände zu einer den Eykern eng umschliessenden, aus einer Doppellage von Zellen gebildeten Hülle emporwächst: dem einzigen Integument des Eyes (F. 19). Nach seiner Anlegung sprossen aus dem Eyträger, tiefer abwärts, schuppenförmige Anhängsel hervor, welche keine beträchtliche Länge erreichen und, auch bei voller Entwickelung vereinzelt bleibend, einen unvollständigen und unregelmässigen Kranz am oberen Theile des Eyträgers darstellen (F. 20, 22—24). Die axilen Zellen des Eyträgers theilen sich öfter durch Längswände, als die peripherischen; diese öfter durch

*) Den Stoff zur Untersuchung dieser Pflanze verdanke ich Herrn Podestà Tommasini in Triest, welcher die Güte hatte, Ende Aprils 1853 lebende Exemplare mir zu senden.

Querwände als jene. Der Eyträger, auf den früheren Zuständen aus gleichartigem Zellgewebe aufgebaut (F. 19, 20) erscheint bei voller Ausbildung als ein centraler Strang aus engen, langen Zellen, der von einer einfachen Schicht kurzer Zellen berindet ist (F. 22—24).

Die oberste Zelle des axilen Zellstranges des Eykerns nimmt frühzeitig vorwiegend an Grösse zu (F. 19). Während das Integument den Eykern einhüllt, vergrössert sie sich um das Zwanzigfache. Die sie umhüllenden Zellen folgen ihrer Dehnung, mehr und mehr sich abplattend, und durch Längs- und Querwände, welche auf den freien Aussenflächen rechtwinklig stehen, sich theilend und vermehrend. Jene rasch heranwachsende Zelle ist der Embryosack. Sein grosser primärer Kern, auf den frühesten Entwickelungsstufen inmitten des die ganze Zelle erfüllenden körnigen Protoplasma schwebend (F. 19), erscheint später, wo im Mittelraume der Zelle eine immer grösser werdende Vacuole auftritt, dem Wandbeleg aus Protoplasma eingebettet, welcher da wo der Zellkern der Seitenwand der Zelle anliegt, am dicksten ist und von dieser Ansammlung aus in strahligen Streifen an der Wand hin verläuft. Es ist dieselbe Umwandlung der Lagerungsverhältnisse des Zellinhalts, wie sie bei der Grössenzunahme einer ursprünglich von Protoplasma ausgefüllten Zelle ganz allgemein ist*), und wie sie namentlich im Entwickelungsgange der Embryosäcke durchweges gefunden wurde, soweit meine Beobachtungen reichen.

Ausser der Protoplasma-Ansammlung um den primären Zellkern häufen deren im jungen Embryosacke noch zwei sich an: die eine in der Wölbung des Scheitels, die andere in der des Grundes. In beiden entstehen freie Zellkerne (zuerst kernkörperchenlose Kügelchen das Licht schwächer als das umgebende Protoplasma brechender Substanz) in der ersteren meist zwei (F. 21), in der letzteren drei, um welche sphärische Zellen sich bilden. Die ersteren sind die Keimbläschen, die letzteren ihre Gegenfüsslerinnen. Die Bildung dieser ist früher beendet als die jener. Die Keimbläschen erhalten bald Birnenform, und hängen, mit breiter Ansatzfläche der Innenwand des Embryosacks angeschmiegt, in dessen Raum herab. Die Gegenfüsslerzellen werden bei weiterer Entwickelung (Anschwellung) des Eys mehr und mehr abgeplattet (F. 22, 23).

---

*) Hofmeister in Bot. Zeitung 1848, S. 657. A. Braun Verjüngung S. 256.

Diese Stufe der Entwickelung erreichen die Eychen bei dem Aufblühen des Perigons. Die Zellen der den Embryosack umgebenden Zellschicht sind jetzt zwar stark abgeplattet, aber noch kenntlich (F. 22, 23). Während des Blühens tritt aber eine starke Anschwellung des Eyes, insbesondere auch des Embryosacks ein, wobei die Hohlräume jener Zellen vollständig verschwinden, so dass die Membran des Embryosacks der Innenfläche des Integuments unmittelbar anzuliegen scheint (F. 24).

Künstlich auf die Narben gebrachter Pollen trieb nach sechs bis zwölf Stunden Schläuche (F. 25 *a*, *b*). Bevor dieselben die Fruchtknotenhöhle erreichten, ereilte auch den Parasiten des Cistus der Tod, welchen die Nährpflanzen, aller aufgewendeten Sorge zum Trotz, schon einige Tage früher erlitten hatten. Die Untersuchung konnte nicht weiter fortgesetzt werden.

Der Bau der reifen Samen von Cytinus ist durch Rob. Brown beschrieben worden*); — mir haben keine zu Gebot gestanden. Den zelligen Körper innerhalb der Samenschale, welchen R. Br. als homogenen Embryo deutet, halte ich für Endosperm, in dessen Innerem der Embryo zu suchen ist.

---

## VI.

## Balanophoreen.

---

### Cynomorium coccineum Mich.**).

Taf. XI.

Eine nicht genau bestimmte Zahl von Gefässbündeln, zwei bis fünf, meist drei, tritt in die Basis der weiblichen Blüthe von Cynomorium ein. In der Einfügungsstelle des Fruchtknotens in die keulenförmige Achse der Inflorescenz stehen sie so dicht bei einander, dass sie ein einziges Bündel zu bilden scheinen. Ihre Zahl scheint mit der gleichfalls verän-

---

*) Transact. Linn. Soc. XIX, 229.

**) Nach einer bei Murcia aufgenommenen, in Weingeist aufbewahrten Inflorescenz, welche Prof. Rossmässler von einer spanischen Reise mir mitzubringen die Güte hatte. Bekanntlich zeigen die Dichasien, welche in den Achseln der grossen Bracteen der Hauptachse des Blüthenstandes von Cynomorium sich entwickeln, sehr verschiedene Entwickelungszustände von Blüthe und Frucht neben einander.

derlichen der Perigonialblätter in Beziehung zu stehen. Wo diese ganz fehlen oder nur eines rudimentär vorhanden ist, treten nur zwei Gefässbündel in die weibliche Blüthe: so bei denen, welche die letzten Verzweigungen der Dichasien darstellen. Ihr Verlauf innerhalb der Wand des halb unterständigen Fruchtknotens ist nicht genau senkrecht; sie weichen oft beträchtlich rechts gewendet*) von der Verticalen ab. In jedes vollständig entwickelte Perigonialblatt zweigt sich von dem ihm nächsten Gefässbündel der Fruchtknotenwand ein Ast ab, welcher in der Längslinie des Blattes verlaufend, nahe unter dessen Spitze mit einer Gruppe von Spiral- und Netzfaserzellen endet (F. 6). Der übrige Theil des Bündels jedes Perigonialblattes, wie die Bündel des Germen, bestehen aus Spiralgefässen. Nahe der Ursprungsstelle des Griffels vereinigen sich die Gefässbündel, wenn deren mehrere als zwei vorhanden, zu zweien, die in den Griffel eintreten, hier vertical aufsteigen (bei der sehr häufigen Drehung des Griffels in Rechtswendung um seine eigene Achse, eine Drehung die in der Anordnung der langgestreckten Zellen seiner Epidermis sofort hervortritt, steil ansteigende rechtsumläufige halbe Schraubenwindungen beschreibend; — so bei F. 1) und enden nahe unter der kummetförmigen Narbe, zu beiden Seiten des tief herab gehenden Längsspalts desselben (F. 1). Ein enger, aber deutlicher Längskanal durchzieht die Achse des Griffels und mündet in die Fruchtknotenhöhle (F. 1, 2, 6).

Dicht unter der Innenmündung des Griffelkanals hängt an kurzem Funiculus das kurz ellipsoïdische, fast kugelige Ey von der Fruchtknotenwand in die Höhle des Fruchtknotens herab, welche es völlig ausfüllt. Der Anheftungspunkt des Eys fällt zwischen die beiden Eintrittsstellen von Gefässbündeln in den Griffel; bald genau in die Mitte, bald dem einen Bündel näher. Beide Bündel entsenden Abzweigungen in den Funiculus, die dicht über dem Ursprung desselben sich vereinigen und bis zur Chalaza verlaufen. Der Funiculus ist *S*förmig schwach gekrümmt (F. 1, 2, 6).

Der von einem einzigen, dicken Integument umhüllte, abgeplattet ellipsoïdische Eykern macht mit dem Funiculus einen stumpfen Winkel von beiläufig 120° (F. 1). Die horizontale Richtung des Eys entspricht

---

*) Bestimmung der Richtung wie bei der der Wendung der Blattstellung, den Beobachter in die Längsachse des Objects gedacht.

genau derjenigen der Narbenspalte: eine durch Chalaza und Mikropyle gelegte Ebene schneidet auch jene Spalte, und geht mitten durch zwischen beiden Gefässbündeln des Griffels; — wobei selbstverständlich etwaige Torsionen des Griffels wegzudenken sind. — Eykern und Mikropylekanal sind durchaus ungekrümmt.

Das Integument besteht seiner Hauptmasse nach aus polyedrischen, mässig grossen Zellen, die gegen die Mikropyle hin stetig kleiner werden. Diese Zellen sind von Amylumkörnern dicht vollgestopft. Die innerste Lage von Zellen des Integuments besteht aus stark abgeplatteten tafelförmigen Zellen. Aehnliche Zellen kleiden den Mikropylekanal aus (F. 5). — Zartwandige, etwas gestreckte Zellen setzen den Eykern zusammen. In Uebereinstimmung mit dem Baue des Eykerns der grossen Mehrzahl der Phanerogamen ist ihre Anordnung so, dass sie von der Chalaza aus aufwärts allseitig strahlen (F. 1, 2). Ins Innere dieses Gewebes ist der Embryosack eingeschlossen, auch auf seinem Scheitel von zwei Zellschichten bedeckt (F. 1, 2, 5, 8); — eine grosse keulenförmige Zelle, die beinahe die ganze Längsachse des Eykerns einnimmt. In ihrer Scheitelwölbung haften in unbefruchteten Eychen zwei kurze, mit breiter Fläche der Embryosackhaut ansitzende Keimbläschen, welche der festen Zellhaut entbehren. In der Mittelgegend des Sacks liegt dessen grosser primärer Kern der Wand an (F. 1). Zellenkerne und Protoplasma des Zellinhalts zeigten sich bei den (in Alkohol gelegten) untersuchten Exemplaren von Cynomorium, wie bei allen anderen in Flüssigkeiten aufbewahrten Balanophoreen von dunkelgelber bis rothbrauner Färbung — ohne Zweifel eine Folge der Aufspeicherung der von der Aufbewahrungsflüssigkeit gelösten Farbstoffe in der porösen Substanz der Zellenkerne und des geronnenen Protoplasmas.

Der früheste aufgefundene Entwickelungszustand eines befruchteten Embryosackes zeigte denselben von vier grossen Endospermzellen ausgefüllt, zu zweien paarweise neben einander geordnet (F. 3). Ohne Zweifel entstanden diese Zellen durch zweimalige Zweitheilung des ganzen Raumes des Sackes. In der Scheitelwölbung des Embryosacks war nur noch ein Keimbläschen sichtbar, jetzt mit einer Zellstoffhaut bekleidet; das andere war spurlos verschwunden.

In weiter vorgerückten jungen Früchten hat die Zahl der Endospermzellen sich beträchtlich vermehrt; vorzugsweise in der oberen Hälfte des Embryosackes der immer ausgeprägtere Keulenform annimmt

(F. 4, 5). Hier folgt die Anordnung der neu gebildeten Tochterzellen allen drei Richtungen des Raumes, während in der unteren, engeren Hälfte des Embryosackes geraume Zeit hindurch keine anderen, als Quertheilungen der Endospermzellen vorkommen (F. 4). Das Ende des Pollenschlauches findet man häufig der Aussenwand des Sackes anhaftend (F. 4, 5, 8). Das befruchtete Keimbläschen theilt sich früh durch eine Querwand (F. 4). Die obere beider neu gebildeter Zellen stellt für sich allein den Embryoträger dar; schon ihre Schwesterzelle wird durch Theilung mittelst nach verschiedenen Richtungen hin gestellter Scheidewände zum Embryokügelchen (F.7,8,9). Die Trägerzelle bleibt meistens ganz kurz (F. 8); die Fälle sind selten, in welchen sie länger erscheint als ihre Querdurchmesser (F. 9).

Hier endet meine Untersuchung; das mir zu Gebote stehende Material zeigte keine späteren Entwickelungszustände. — Aus den übereinstimmenden Angaben L. C. Richard's*), Weddell's**) und J. D. Hooker's***) geht hervor, dass bis zur völligen, bis jetzt allein von Hooker untersuchten Samenreife keine andere wesentliche Veränderung in der Frucht vor sich geht, als die Verdrängung des Eykerns und des grössten Theiles der Gewebe des Integuments durch den an Umfang immer mehr zunehmenden und endlich Kugelgestalt erlangenden Endospermkörper. — Der kugelige Embryo, der erste und lange Zeit der einzige bei irgend einer Balanophoree gesehene, ist seit 1822 durch Richard bekannt †). Seine einseitige, schräg abwärts gerichtete konische Verlängerung ist von ihrem Entdecker, J. D. Hooker, als das Wurzelende gedeutet worden †*); — ohne alle Frage vollkommen rich-

*) Ann. du Museum VIII, p. 426; T. 21, F. O, P.

**) Ann. sc. natur. III. Serie T. 14 p. 180.

***) Transact. Linn. Soc. XXII, p. 36.

†) Wunderlich genug ist Richard's Analyse nicht ohne Anfechtung geblieben. Endlicher hat ihre Richtigkeit in Zweifel gezogen und die Ansicht geäussert, Richard habe sich bei der Untersuchung von vorgefassten Meinungen leiten lassen (Meletemata, Fasc. 11, p. 9). Der Vorwurf prallte vollständig auf Endlicher selbst zurück, der offenbar in seinem Widerspruch gegen Richard von dem Vorurtheil ausging, die Balanophoreen könnten und dürften keine Embryonen haben, seien nebst den Rafflesiaceen in ihrer Organisation die Mitte zwischen Pilzen und Phanerogamen haltende Pflanzen, mit Samen die von „sporenführender Masse" erfüllt seien. (Vergleiche auch Griffith in Transact. Linn. Soc. XIX, p. 307).

†*) Transact. Linn. Soc. XXII, T. I., wo auch von den hier zur Sprache gebrach-

tig, da die Richtung jener Verlängerung genau auf die von mir aufgefundene Mikropyle zu weiset.

Nur als eine Sonderbarkeit ist nach dem Vorausgeschickten zu erwähnen, dass Weddell*) auch dem Cynomorium seine Lehre von der Nacktsamigkeit der Balanophoreen aufzuzwängen versucht, und die Fruchtknotenwand desselben als Testa gedeutet hat. Ein Unternehmen, von dem die ganz richtig von ihm erkannte Lage des Embryo ihn billig hätte abhalten sollen; — sie zu erklären ist er zur Annahme eines unmässig langen Embryoträgers gezwungen, der den (aufrecht gedachten) Embryosack seiner ganzen Länge nach durchstreichen soll.

## Langsdorffia hypogaea Mart. **).
Taf. XII.

Wie bekannt, stehen die cylindrischen weiblichen Blüthen von Langsdorffia dicht gedrängt auf der Oberfläche der in der Jugend halbkugeligen Blüthenachse. Im oberen Drittheil sind die Blüthen unter einander fest verwachsen; der säulenförmige sechsseitige untere Theil, obwohl die Nachbarblüthen unmittelbar berührend, ist völlig frei***). Die Blüthen sind zur Zeit, da sie bereit sind die Bestäubung durch den Pollen zu empfangen, etwa 1, 5 M.M. lang, den Griffel nicht mitgerechnet. Der weit vorragende Griffel ist von einem engen Kanale durchbohrt, welcher sich seitlich, in der Mitte des papillösen oberen Theiles des Griffels, nach aussen öffnet (F. 2). Dieser Kanal streicht durch die ganze Länge der Blume, um in die sehr kleine, dicht über der Einfügung derselben in die Blüthenachse befindliche, eyförmige Fruchtknotenhöhle zu

---

ten Verhältnissen der Gefässbündelverlauf im Griffel und das Integument des Eys (aber nicht dessen Mikropyle) erörtert sind.

*) a. a. O.

**) Die jüngeren Zustände nach einem von Dr. J. D. Hooker mir mitgetheilten Theile einer in Essig aufbewahrten Inflorescenz. Einen Fruchtstand mit reifen Samen verdanke ich der Güte des Prof. Mettenius.

***) Richard (Ann. du Museum VIII, T. 22) und Martius (Nova Gen. ac sp. T. III. Tf. 298) stellen übereinstimmend den unteren Theil der Blüthe viel dünner dar, als den oberen angewachsenen. Wahrscheinlich Folge einer Formveränderung, welche das Object durch Wasserentziehung (Trocknen oder Aufbewahrung in Alkohol) erlitten hatte.

münden (F. 1). Die Wand dieser Höhle besteht aus hexagonal-tafelförmigen Zellchen mit sehr protoplasmareichem Inhalte. In der Umgebung der Höhle und so weit aufwärts, als der Fruchtknoten frei, nicht mit den benachbarten verwachsen ist, besteht dessen relativ dicke Wand aus engen, langgestreckt prismatischen Zellen, welche leicht aus dem seitlichen Zusammenhange sich lösen. Ihr Inhalt ist wässerig, enthält ausser dem Zellkern nur wenige feste Bildungen. Von der Stelle an aufwärts, wo die Verwachsung des oberen Theils der Blüthen anhebt, ist das Gewebe derselben um Vieles grosszelliger, die Zellen nur mässig gestreckt, der Inhalt derselben die Zellen fast ausfüllende feste körnige Massen, deren Hauptbestandtheil Wachs ist. In der Achse dieses Gewebes verläuft ein dünner Cylinder von engen langen Zellen, in ihrer Beschaffenheit denen des unteren Theils des Fruchtknotens ähnlich. Dieser Cylinder geht unmittelbar in das Gewebe des freien Griffels über; in seiner Achse verläuft der Griffelkanal (F. 2). Zwischen den wachshaltigen Zellen des oberen Theils der Blüthe sind einzeln gestrecktere, prosenchymatische Zellen eingestreut, deren Wände zum Theil schon jetzt, in dieser frühen Zeit, stark verdickt und eng getüpfelt sind (F. 2, *y*). Andere der prosenchymatischen Zellen sind jetzt noch dünnwandig (F. 2, *x*). Die Prosenchymzellen stellen einen weder ganz regelmässigen noch vollständigen, mit dem Griffelkanal concentrischen Cylindermantel dar.

Um die Basis des freien Griffels verläuft eine, aus ungleich gestalteten Zellenwucherungen zusammengesetzte Ringwulst (F. 1, *z*), die wohl als Andeutung eines Perigons genommen werden mag. Die Aussenflächen ihrer Zellen, wie die der Zellen des Scheitels der Blüthe überhaupt sind mit einer netzlinig stark gerunzelten Cuticula bekleidet, der ähnlich die auf den keulenförmigen Seitensprossen der Blüthenachse der Balanophoren, sowie auf den oberen Enden der Spreuschuppen der Helosideen und der nämlichen Inflorescenzen der Langsdorffia selbst sich findet.

In einem Theile der untersuchten Blüthen war die Fruchtknotenhöhle von einer einzigen, verhältnissmässig grossen Zelle nahezu ausgefüllt. Sie hängt frei in die Fruchtknotenhöhle herein, nur seitlich dicht unter ihrem Scheitel an einer kurzen Stielzelle befestigt (F. 3, 4). Diese Zelle mit ihren Trägern muss als das Ey der Langsdorffia betrachtet werden. Es ist, nebst dem von Sarcophyte, nicht nur das kleinste

(Länge $^1/_{11}$ M.M., Breite $^1/_{15}$ M.M.) aller mir bekannten Eychen von Phanerogamen, sondern auch, weil einzellig, das einfachst gebaute. — Bei der äussersten Einfachheit seines Baues stellt es, wie aus der Lage des Embryo hervorgeht, die reinste denkbare Form eines anatropen Eyes dar, insofern es keinem Zweifel unterliegt, dass die Richtung der grossen, Ey und zugleich Embryosack darstellenden Zelle ursprünglich der Richtung der Stielzelle gleichsinnig nach unten ging, und dass nur die überwiegende einseitige Entwickelung des schliesslich als untere Hälfte erscheinenden Theils den Scheitel des Embryosacks nach oben rückte.

Einzelnheiten der Organisation des Inhalts des jungen Embryosacks vermochte ich nicht zu erkennen. In den meisten Fällen war derselbe zu einer unförmlichen Masse zusammen geschrumpft (F. 3). In anderen, dem nämlichen Blüthenstand entnommenen Fruchtknoten konnte ein, verhältnissmässig kleiner, der Wand des Embryosackes anliegender Zellkern wahrgenommen werden (F. 4). Keimbläschen wurden nicht beobachtet.

Die Fruchtknotenhöhle anderer, in Minderzahl vorhandener Blüthen aus derselben Inflorescenz war von einem Körper sehr abweichender Beschaffenheit ausgefüllt. In seiner Form glich er im Allgemeinen dem eben beschriebenen Embryosacke; auch haftete er, gleich demselben, an der Fruchtknotenwand mittelst einer seitlich, dicht unter seiner Spitze, ihm ansitzenden Stielzelle. Im Uebrigen war er ohne organischen Zusammenhang mit der Wand des Germen, aus welchem er sich leicht lösen liess. Er war zusammengesetzt aus einer zwischen acht und zwölf schwankenden Zahl in vier Längsreihen geordneter, dicht mit Oeltropfen erfüllter Zellen. Bei Quetschung flossen die kleinen, punktförmigen Oeltropfen zu grösseren Massen von gelber Farbe zusammen. In einer der vier Zellen des Scheitels des Zellenkörpers fand sich regelmässig eine Zelle von Form eines cylindrischen Schlauches, welche mit breiter Ansatzfläche an der freien Aussenwand der sie einschliessenden Zelle befestigt war. Wenig entfernt von diesem Punkte haftete in den meisten Fällen an der Aussenseite des Zellenkörpers eine fadenförmige, dickwandige Zelle, unzweifelhaft das Ende eines Pollenschlauchs (F. 5, 6). Die Querwände, welche die einzelnen Zellen jeder Längsreihe von einander trennen, schiessen stark nach innen ein. Der Zusammenhang der Zellen unter sich ist nur locker (wahrscheinlich Folge langer Aufbewahrung des Blüthenstandes in concentrirtem Essig); ein gelinder Druck auf das Deckglas,

eine unvorsichtige Berührung mit der Nadel lösen den Zellkörper in eine Gruppe beiderseits zugeschärfter, nahezu spindelförmiger Zellen auf. Dann wird eine, die vereinzelten Zellen einschliessende Haut zerrissen sichtbar.

In den wesentlichen Zügen seines Baues entspricht dieser Zellkörper vollständig einem vor nicht langer Zeit befruchteten, in wenige Endospermzellen getheilten Embryosacke, der in einer der obersten Endospermzellen das befruchtete Keimbläschen (jene Zelle von Gestalt eines cylindrischen Schlauches) birgt. Zwei Umstände beeinträchtigen indess die Wahrscheinlichkeit dieser Deutung: der Reichthum der Inhaltsflüssigkeit der Zellen an Oeltropfen, und die Kleinheit der Zellen des Endosperms, verglichen mit denen des reifen Samens. Die zweite dieser Erscheinungen, wenn auch im übrigen Pflanzenreiche nirgends so auffällig vorhanden, findet sich aber bei anderen Balanophoreen wieder; so bei der nahe verwandten Sarcophyte sanguinea, bei Balanophora. Der Oelgehalt des sehr jungen, einer mächtigen Entwickelung entgegen gehenden Endosperms, so einzig in seiner Art nach dem bisher Bekannten er auch erscheint, wird für Langsdorffia durch die, im Uebrigen von den meinigen weit abweichenden, Abbildungen Karsten's*) bestätigt, der Langsdorffia hypogaea lebend zu untersuchen Gelegenheit hatte. Es ist diese Erscheinung aber vielleicht eine sehr weit verbreitete; die feinen, durch ihre Kleinheit der directen Untersuchung sich entziehenden Körnchen des Protoplasma sind vielleicht in sehr vielen Fällen Oeltropfen. Einen völlig sicheren solchen Fall werde ich weiterhin bei Lathraea squamaria nachweisen. Diese Gründe bestimmen mich, die Vermuthung fallen zu lassen, dass die fraglichen Zellkörper missgebildete, dem Absterben nahe befruchtete Embryosäcke seien, und sie für normale Entwickelungszustände zu halten.

Es sind die besprochenen Körper die nämlichen, welche J. D. Hooker als Eychen von Langsdorffia deutete**), und durch deren genaue Beschreibung er ein glänzendes Muster für feinste phytotomische Untersuchungen hinstellt. — Zwischenzustände von dieser Entwickelungsstufe und reifen Samen haben mir nicht zu Gebot gestanden.

---

*) N. A. A. C. L. XXVI, P. II. T. IV. F. 5, 7.

**) Transact. Linn. Soc. v. XXII, p. 41, Anmerkung. — Mir stand ein Stück einer der Inflorescenzen zu Gebote, welche J. D. Hooker erwähnt.

Der reife Fruchtstand übertrifft den Blüthenstand im Querdurchmesser etwa um das Fünffache; im Uebrigen ist er wenig verändert. Die freien Enden der Griffel sind abgefallen; die ihren Grund umgebende Ringwulst hat sich — es scheint nur durch Dehnung ihrer Zellen — beträchtlich erhoben und nach innen zusammengeneigt (F. 7). Eine spitze, von einem blinden Längskanal durchzogene Warze bezeichnet auf der Aussenfläche des Fruchtstands die Lage jedes im Innern verborgenen Samens. Im oberen wachshaltigen Theile der Fruchtknotenwand hat sich die Zahl der stark verdickten, spindelförmigen Zellen beträchtlich gemehrt. Sie bilden jetzt einen langen, den obliterirten Griffelkanal einschliessenden Cylinder. Der untere Theil des Fruchtknotens, so weit er zur Blüthezeit frei, und aus lang prismatischen, weichen, locker verbundenen Zellen zusammengesetzt ist, wird jetzt fast vollständig vom Samen und dessen nächster Hülle eingenommen. Diese Hülle, eine Steinschale, dem Putamen der gemeinen Steinfrüchte in allen Stücken vergleichbar, besteht aus zwei Schichten stark verdickter, getüpfelter Zellen, die an den Seitenwänden der Schale lang gestreckt, auf ihrer breiten Scheitelfläche fast würfelig sind (F. 7). Der Same entbehrt, seiner Entwickelung aus einem nackten Embryosacke gemäss, aller ihm eigenen Integumente. Er ist ein, locker in der Steinschale liegender, aus der geöffneten leicht herausfallender*), Körper von langgezogener Eyform (F. 7, 8), zusammengesetzt aus grossen dünnwandigen Zellen, die angefüllt sind mit einer Mengung aus viel Oel und wenig eyweissartiger Flüssigkeit. Aus den angeschnittenen Zellen viele Jahre trocken aufbewahrter Herbarienexemplare tritt das Oel flüssig heraus, zu grossen Tropfen zusammenfliessend. — Dieses Zellgewebe ist Endosperm. Im oberen Viertheile desselben befindet sich in der Längsachse der kugelige, kleinzellige Embryo, mittelst eines dünnen cylindrischen Trägers, einer einfachen Zellreihe, an der Innenwand des Embryosacks nahe an dessen Scheitel befestigt (F. 7, 8).

Der innere Bau des Fruchtknotens von Langsdorffia war bis auf die neueste Zeit, bis auf die oben angeführten Beobachtungen J. D. Hooker's, völlig unbekannt. Weddell hat das Dasein der Fruchtknotenhöhle

*) J. D. Hooker's Abbildung von Samen, die dicht unter ihrem Scheitel mit einem Stiel an der Fruchtknotenwand hängen (a. a. O. T. II. F. 21, 22) bezieht sich ohne Zweifel auf einen etwas früheren Zustand.

nicht nur übersehen, sondern ausdrücklich verneinen zu können geglaubt*).—Die denen Hooker's nachfolgenden Angaben Karsten's**) differiren weniger von jenen und den meinigen, als sie minder vollständig sind. Karsten nimmt den Embryosack für in allseitig organischem Verbande mit der Fruchtknotenwand; die ganze Blüthe, Weddell's abenteuerlicher Anschauung folgend, für ein nacktes Ey. Seine F. 6 der vierten Tafel, Pollenschlauch mit Embryoanlage im angeschwollenen Ende darstellend, kann recht wohl ein frei gelegter Embryosack mit anhaftendem Pollenschlauche in einer Lage sein, in welcher Stielzelle oder Scheitel des Embryosacks die Endigung des Pollenschlauchs verdeckten. Den Träger des Embryo hat auch Karsten nicht erkannt, wie denn meine Mittheilungen über dieses Verhältniss für die Balanophoreen überhaupt die ersten in die Oeffentlichkeit gelangenden sind. Die Feststellung der Richtung des Embryo der Balanophoreen ist damit erst jetzt ermöglicht.

## Sarcophyte sanguinea Sparrm. ***).

Taf. XIII.

Die weiblichen Blüthen von Sarcophyte, Fruchtknoten, die jeder Blüthenhülle entbehren, sind bekanntlich zu kugeligen Köpfchen vereinigt, die an den Aesten einer lockern Rispe zerstreut stehen; jede Blüthe seitlich mit ihren Nachbarinnen fest verwachsen, nur im oberen Theile frei.

Der Fruchtknoten hat die Gestalt einer niedrigen Flasche mit kurzem Halse und breitgerandeter Mündung. Dieser Rand ist die Narbe; ihre Oberfläche ist mit kurzen halbkugeligen Papillen bedeckt, denen an den untersuchten Exemplaren bisweilen schlauchtreibende Pollenkörner anhafteten. Im Mittelpunkt der Narbe öffnet sich der enge Griffelkanal, der senkrecht abwärts in die kleine kugelige Fruchtknotenhöhle führt (F. 1). Zahlreiche, concentrisch schalig geordnete Schichten dünnwan-

*) Ann. sc. nat. III. S. T. XIV. Tf. 11, F. 56.

**) N. A. A. C. L. XXVI. p. II. p. 906 ff.

***) Eben befruchtete Blüthen verdanke ich Dr. Hooker, reife Früchte Prof. Mettenius. Jene sind von Dr. Harvey gesammelt; wahrscheinlich von derselben Ernte stammend, von deren Ertrag Griffith untersuchte.

diger Zellen mit trübem, grauweissem Inhalte umgeben zunächst die Fruchtknotenhöhle. Eine dünne Lage ähnlichen Gewebes umschliesst den Griffelkanal. Die Hauptmasse der Fruchtknotenwand besteht aus ziemlich grossen, fächerig-strahlig angeordneten, derbwandigen, flach getüpfelten Zellen mit (an in Essig aufbewahrten Exemplaren) braunrothem Inhalte und Wänden. Die fürLangsdorffia und für viele Helosideen charakteristischen verknöcherten Zellen der Fruchtknotenwand fehlen Sarcophyte völlig. Auch trägt kein Theil ihrer Blüthen oder eines Organs in deren Nähe die zierlich gefelderte Cuticula, wie sie auf der Oberseite des Fruchtknotens von Langsdorffia, auf den keuligen Zellgewebsmassen zwischen den Fruchtknoten von Balanophora, auf den Spreuschuppen der Helosideen vorkommt.

Seitlich in der Scheitelwölbung der Fruchtknotenhöhle der vor Kurzem bestäubten Blüthen, nahe an der Innenmündung des Griffelkanals, ist mittelst einer scheibenförmigen Stielzelle ein kugeliger oder kurz eyförmiger Körper befestigt, der frei in die Höhlung herein hängend etwa ein Drittel derselben ausfüllt. Er besteht aus einer grossen, durch wenige Scheidewände in zwei bis vier Tochterzellen getheilten Zelle (F. 1 *b*, 2). Die unteren der Tochterzellen sind dicht mit Protoplasma erfüllt, in welchem meistens ein grosser, kugeliger Kern liegt. Die oberste, der Innenmündung des Griffelkanals nächste dieser Zellen ist ärmer an Protoplasma. In ihrer Scheitelwölbung haften zwei kurz birnförmige, fast halbkugelige Zellchen. Die Aussenwand der sie einschliessenden Zelle zeigt an den Anheftungsstellen derselben strahlig geordnete, vorspringende Leistchen, denen ähnlich, die bei Crocus und Sorghum auf der Aussenfläche des Embryosackscheitels vorkommen*). In der Nähe dieser Stelle haftet eine fädliche Zelle, welche bis in den Griffelkanal sich verfolgen lässt (F. 1 *b*, 2).

Es ist in dem eben beschriebenen Zellkörper das nur aus dem Embryosacke und der ihn tragenden Stielzelle bestehende, hängende anatrope Ey der Sarcophyte, ganz nach dem Typus desjenigen von Langsdorffia gebaut, nicht zu verkennen. Der Embryosack ist in wenige

*) Hofmeister in Pringsheim's Jahrbüchern I. p. 154, 161. Aehnliche Bildungen hat Schacht (der sie früher, bei Gladiolus, für integrirende Theile der Keimbläschen hielt) bei einer Anzahl anderer Phanerogamen beschrieben, ihnen ohne thatsächliche Gründe eine Rolle bei der Befruchtung zuschreibend (dieselbe Zeitschrift, p. 193 ff.).

Endospermzellen getheilt. Die birnförmigen Zellen in der Scheitelwölbung der obersten derselben (F. 1 *b*, 2 *k*), sind die Keimbläschen; die fädliche dem Embryosack von aussen anhaftende Zelle (F. 1 *b*, 2 *t*) ist der Pollenschlauch.

Zahlreiche andere Blüthen der nämlichen Inflorescenzen zeigen einen wesentlich abweichenden inneren Bau. Der Griffelkanal führt hier in einen engen Raum von Form einer Querspalte im Innern des Gewebes. Von unten her ist dieser Raum begränzt durch einen breit herzförmigen Körper aus kleinen, protoplasmareichen Zellen (an den untersuchten, in Essig aufbewahrten Blüthen mit braunem Inhalt). Seitlich und nach unten steht dieser Körper mit dem weichen, concentrisch schalig geordneten Gewebe der Fruchtknotenwand in organischem Zusammenhang. In seinem Innern sind zwei excentrische, lang-eyförmige Hohlräume, jeder ziemlich ausgefüllt von einer grossen, einfachen, seitlich unter dem Scheitel befestigten Zelle. Die Höhlungen communiciren durch enge Kanäle mit dem spaltenförmigen Hohlraum, in welchen der Griffelkanal mündet (F. 3). — Diese Form der Blüthen stellt einen zweifächerigen Fruchtknoten, in jedem Fache mit einem hängenden auf den Embryosack reducirten Ey dar. Wahrscheinlich entsteht das Germen von Sarcophyte, gleich dem von Helosis, aus zwei Carpellen, die nach Art in klappiger Knospenlage befindlicher Blätter mit den Rändern sich berühren, und zu einem einfächerigen Germen verwachsen. Die Entwickelung nur eines hängenden Eys mag der normale Hergang sein. Häufig aber mögen abnormer Weise zwei hängende Eyer, von jedem Carpelle aus eines, entwickelt werden, und dann durch Wucherung der Zellen der Fruchtknotenwand deren Höhlung ausgefüllt, scheinbar zweifächerig werden. Der Umstand, dass der Bau des reifen Samens sich leicht auf den des einfächerigen Fruchtknotens zurück führen lässt, während die zahlreichen fehlschlagenden Samen ungezwungen als Endzustände der Entwickelung zweifächeriger Germina betrachtet werden können, veranlasst mich jene als die regelrechten Bildungen, diese als Missbildungen zu deuten.

An der reifen Frucht ist die Narbe und der obere Theil des Fruchtknotens, soweit er aus den derbwandigen Zellen mit rothem Inhalte besteht, kaum verändert. Die Stelle des weichen Gewebes, welches die Fruchtknotenhöhle umgab, ist dagegen vom Samen und einer ihn umschliessenden Steinschale eingenommen.

Die Steinschale besteht normal aus zwei Zellschichten: einer äusseren aus etwas radial gestreckten Zellen mit sehr stark verdickten, bald mehr (F. 10) bald minder reichlich (F. 9) getüpfelten Wänden, und einer inneren aus tafelförmigen Zellen mit mässig dicker, glatter Haut. Stellenweise ist die äussere dickwandige Zellenlage doppelt; es haben noch einige der Hauptschicht anliegende Zellen des ursprünglich weichen Gewebes an der Verholzung Theil genommen (F. 9).

Der von dieser Steinschale eingeschlossene Same besteht nur aus dem grosszelligen Endosperm, und dem in ihm centralen kleinzelligen Embryo. Die Gestalt des Endospermkörpers ist mannichfaltig: gewöhnlich ist er plattgedrückt, zweischneidig, von breit eyförmigem Umriss; das breite Ende meist nach oben gekehrt (F. 4), doch kommt auch, wiewohl nur vereinzelt, das Gegentheil vor (F. 5). In seltneren Fällen ist der Same stumpf dreikantig, ein länglicher Körper (F. 8), dessen Querdurchschnitt ein gleichseitiges Dreieck darstellt*). Die Zellen des Endosperms sind weich- und dünnhäutig, gefüllt mit Tropfen dünnflüssigen fetten Oels.

Der Embryo ist in den von mir untersuchten, der nämlichen Inflorescenz angehörigen Früchten sehr verschiedenartiger Ausbildung; in einigen Fällen eine sehr kleine (F. 6) in anderen eine grössere (F. 4, 5, 8) kugelige oder gestreckt ellipsoïdische Masse kleiner Zellen; in anderen ist er von weit beträchtlicherem Umfange und zeigt aufs deutlichste die Anlagen zweier Kotyledonen (F. 7). Sein Träger ist nach oben gerichtet, mit schwacher seitlicher Ablenkung (F. 6, 7). Es gelang nicht, ihn weiter zu verfolgen als bis zu der des Embryo gleich kommender Länge; es scheint, dass das Stück von hier bis zur Innenwand des Embryosacks durch die starke Ausdehnung der Endospermzellen völlig zum Verschwinden gebracht wird.

Die grosse Mehrzahl, mindestens neun Zehntel der untersuchten Früchte zeigen statt der normalen Entwickelung des Samens eine auffallende Missbildung. Es findet sich im Innern der Frucht, an der Stelle der Steinschale des normalen Samens, ein ähnlich gestalteter, jedoch kleinerer, und im Querschnitt stets kreisrunder, Körper, der aber kein Endosperm mit Embryo einschliesst, sondern seiner Hauptmasse nach

---

*) So bildet Weddell ihn ab: Ann. sc. nat. III. S., T. XIV. Tf. 10, F. 36.

aus verholzten, dickwandigen, getüpfelten Zellen besteht, denen ähnlich, welche die äussere Schicht der normalen Steinschale zusammen setzen. Im Mittelpunkte dieses „Holzkerns" findet sich entweder eine unregelmässig gestaltete Gruppe dünnwandiger Zellen, oder eine bis zwei, auffallend grosse dünnwandige Zellen (F. 11). Ich bin geneigt, diese für fehlgeschlagene Embryosäcke zu halten, und anzunehmen, dass der holzige Scheinsame durch Verknöcherung der Zellen entsteht, welche in den zweifächerigen Fruchtknoten das braune Gewebe im Centrum der Blüthe, innerhalb der hohlkugeligen Schicht aus concentrisch schalig geordneten weichen Zellen zusammen setzen. Solche missrathene Früchte sind es, welche Griffith ausschliesslich untersucht hat, und deren Zergliederung ihn zu dem Ausspruche führte, der Samenkern oder Embryo sei homogen und bestehe durch und durch aus „gepanzerten" Zellen *).

Die nahe Verwandtschaft der Sarcophyte mit Langsdorffia in Fruchtknotenbau und Samenbildung liegt nach dem hier Mitgetheilten so deutlich auf der Hand, dass es nicht nöthig sein wird, die Ansicht Griffith's zu erörtern, der Sarcophyte von den Balanophoreen ausschliessen will **). Die Angaben desselben Forschers über den Bau der Blüthe, obwohl sehr unvollständig, stehen mit den meinigen nicht im Widerspruche.

### Balanophora dioïca R. Br.; polyandra Griff.; involucrata Hook. f.; fungosa Forst. ***).

Taf. XIV; XV.

Die jüngsten weiblichen Blüthen, — wie bekannt, Fruchtknoten ohne jede Spur eines Perianthium, — von Balanophoren, welche zur Untersuchung mir vorlagen; 9 M.M. langen, vollständig von den Deck-

*) Transact. Linn. Soc. XIX, 346.

**) a. a. O. 341.

***) Nach in Essig aufbewahrten Exemplaren, deren Mittheilung ich der Güte Dr. J. D. Hooker's verdanke. Die Untersuchung wurde so geführt, dass ich möglichst zarte Längsschnitte aus dem Blüthenkolben herstellte, und an diesen Präparaten die Germina aussuchte, welche durch den Schnitt nahezu halbirt oder, was noch besser, beiderseitig gestreift waren. Gelungene Schnitte erhielt ich am Häufigsten aus denjenigen Fruchtknoten, welche nicht auf den Stielen der birnförmigen Seitensprossen der Hauptachse des Blüthenstands, sondern zwischen denselben standen.

schuppen noch eingeschlossenen Kolben von B. dioïca entnommen, sind flaschenförmige Körper, aus wenigen Zellen zusammengesetzt (T. XIV. F. 1, 2). Der Halstheil ist der in Entwickelung begriffene Stylus, ein aus vier Längsreihen von Zellen bestehender Cylinder, am Scheitel völlig geschlossen. In seiner Längsachse schliessen die ihn zusammensetzenden Zellen dicht an einander. Die Zellen seines Scheitels sind noch in Vermehrung begriffen. Vergleichung mehrerer Objecte zeigt, dass diese Vermehrung durch Theilung einer einzigen Scheitelzelle mittelst nach verschiedenen Richtungen geneigter Scheidewände erfolgt (T. XIV. F. 1—3). Am oberen Ende des bauchigen Theiles des Zellenkörpers befindet sich in seinem Inneren ein eyförmiger Hohlraum, von einer einzigen Schicht Zellen umschlossen. Er wird von einer grösseren Zelle beinahe vollständig ausgefüllt. An Fruchtknoten, welche durch einen sie streifenden Längsschnitt in günstiger Weise zufällig geöffnet worden sind, erkennt man, dass diese grössere, angeschwollene Zelle mittelst einer kurzen, scheibenförmigen Stielzelle an der Seitenwand des Fruchtknotens, nahe unter der Scheitelwölbung, befestigt ist, und in die Fruchtknotenhöhle frei herabhängt, unter sich einen nicht unbeträchtlichen Raum frei lassend (T. XIV. F. 1). Bei Balanophora dioïca fand ich die Fruchtknotenhöhle, auch an den jüngsten mir zu Gesicht gekommenen Entwickelungszuständen, stets allseitig vollständig geschlossen. Ebenso bei Balanophora polyandra, von welcher Fruchtknoten ungefähr gleich geringer Ausbildung, doch minder wohl erhalten, mir vorlagen*). Bei den weit massigeren, aus zahlreicheren Zellen zusammengesetzten Fruchtknoten der Balanophora fungosa dagegen erkannte ich in der Seitenwand des jungen Germen einen kurzen Längsspalt, welcher den Einblick in die Fruchtknotenhöhle und auf die, in dieselbe vorragende gestielte Zelle gestattete (T. XIV. F. 4).

Diese Beobachtung scheint zu dem Schlusse zu berechtigen, dass die Entwickelung des Fruchtknotens von Balanophora dem Typus folge, welchen Duchartre bei den Nyctagineen kennen lehrte**), und dessen

*) Uebereinstimmend mit diesen sind die Beobachtungen von Göppert in N. A. A. C. L. T. XVIII. Suppl. Tf. 11. F. 40—51. — Was Göppert für Samen nimmt, sind deutlich noch unbefruchtete, an der Spitze geschlossene Germina. Daraus erklärt sich ohne Weiteres die Abwesenheit von Embryonen.

**) Ann. sc. nat. III. S. IX, 263.

ausgedehntes Vorkommen auch bei Urticeen Payer später nachwies*). Nachdem die umgeschlagenen Ränder des einzigen Carpells bis auf eine seitliche Oeffnung verschmolzen, wächst die Spitze desselben (der oberhalb des oberen Endes der Oeffnung befindliche Theil) zu einem cylindrischen Fortsatz, dem Griffel aus, in dessen Längsachse durch Auseinandertreten der Zellen ein in die Fruchtknotenhöhle führender Kanal entsteht, während die seitliche Oeffnung dieser Höhle spurlos sich schliesst.

Sehr häufig findet man neben dem Grunde junger Fruchtknoten eine kleine, flache, aus wenigen Zellen zusammengesetzte Schuppe, welche am Germen hängen zu bleiben pflegt, wenn man dasselbe vom Blüthenboden ablöst (T. XIV. F. 2). Vielleicht ist dieses Verhältniss eine Andeutung davon, dass auch bei Balanophora der Fruchtknoten typisch aus zwei Carpellen besteht, von denen das eine in der Regel sehr früh, noch vor der Verwachsung der Carpelle, fehlschlägt.

Die nächst weit entwickelten, mir zu Gebote stehenden weiblichen Blüthen einer Balanophora gehören der Balanophora involucrata Hook. f. an. Die Wand der Fruchtknotenhöhle ist jetzt eine Doppelschicht von Zellen. Der Griffel ist bereits an der Spitze geöffnet, und seiner ganzen Länge nach von einem axilen, in die Fruchtknotenhöhle und nach aussen geöffneten engen Intercellulargange durchzogen. An der unveränderten scheibenförmigen Stielzelle, welche seitlich in der Scheitelwölbung der Fruchtknotenhöhle sitzt, hängt jetzt ein mehrzelliger Körper, bestehend in einigen Fällen aus nur vier, in eine und dieselbe Längsdurchschnittsebene fallenden Zellen; in anderen aus einer grösseren Zahl, die dann so geordnet sind, dass zwei grosse, nahezu kugelige Zellen die Stielzelle und einander auf kleinem Raume berühren, und ein Kranz von vier bis sechs kleineren Zellen die tiefe Einkerbung zwischen ihnen ausfüllt (T. XIV. F. 6, 7). Es ist einleuchtend, dass dieser wenigzellige Körper aus der wiederholten Zweitheilung der früher von der Stielzelle getragenen kugeligen Zelle hervorging; Theilungen, bei welchen zuerst die beiden grossen Zellen entstanden, und dann von ihnen die einen Kranz um den Aequator des sphärischen Körpers darstellenden Zellen abgeschieden wurden. Der in Rede stehende Zellenkörper ist das hängende Ey der Balanophora. Die überwiegende Ausbildung seines unteren Thei-

---

*) Organogénie végétale, Tf. 60, 62.

les giebt zu erkennen, dass es als ein anatropes aufzufassen ist. Die weiteren Entwickelungsvorgänge werden dies noch deutlicher zeigen.

In etwas weiter vorgerückten Fruchtknoten, zunächst der B. involucrata, hat das Ey an Grösse soweit zugenommen, dass es die Fruchtknotenhöhle fast ausfüllt. Die untere der beiden grossen polaren Zellen desselben hat sich nicht wesentlich verändert. Ihr Zellenkern ist, wie bisher, verhältnissmässig klein geblieben. Der Kern der anderen grossen Zelle dagegen ist beträchtlich gewachsen. Die Zelle ist an Protoplasma um Vieles reicher geworden. In ihrer Scheitelwölbung haften zwei scharf umschriebene, dunkle Massen sehr dichten Protoplasmas, mit breiter Fläche der Innenwand der Zelle angesetzt (T. XIV. F. 8). Diese Massen sind offenbar die Keimbläschen, die Zelle, welche sie einschliesst, ist der Embryosack. Er erscheint jetzt von einer einfachen Schicht tafelförmiger Zellen berindet. Wie es scheint, sind diese eine ringförmige Sprossung des äquatorialen Zellenrings zwischen den zwei grösseren Zellen des Eys; — ist diese Muthmaassung über ihre Entstehung richtig, so würde ihre Entwickelung einigermaassen an die eines Integuments erinnern.

Ganz ähnlich beschaffen, wie die eben beschriebenen Eychen aus einem Blüthenstand der Balanophora involucrata, in welchem keines der zahlreichen der Untersuchung unterworfenen Germina als befruchtet sich erwies, zeigten sich die Eychen in vielen Fruchtknoten aus Kolben von Balanophora polyandra, in denen die Mehrzahl der weiblichen Blüthen theils seit längerer, theils seit kürzerer Zeit dem Einfluss des Pollens unterworfen gewesen waren*). Bisweilen konnten hier die Kerne der Keimbläschen erkannt werden (T. XV. F. 1). In einzelnen Fällen war die Berindung des Embryosacks unvollständig, selbst gar nicht vorhanden (T. XV. F. 1). Die Fruchtknotenwand war hier überall durch Bildung von, den freien Aussenwänden parallelen, Scheidewänden in ihren Zellen zu einer Doppelschicht von Zellen geworden. Aehnliche Scheidewandbildung setzt sich eine Strecke weit in den Griffel aufwärts fort.

Sehr häufig findet man der Spitze des Griffels von Balanophora

*) Balanophora steht auch in der Beziehung in der Mitte zwischen Cynomorium und den Helosideen, dass die Entwickelung der Blüthen zu Früchten weit minder gleichzeitig erfolgt, als bei letzteren. Ein Blick auf T. XIV. F. 9 wird dies veranschaulichen.

polyandra Pollenkörner anhaften*). Den Austritt des Pollenschlauchs aus der Exine und seinen Eintritt in den Griffelkanal habe ich aufs Deutlichste erkannt (T. XVI. F. 10). Der Schlauch erscheint stellenweis von einem das Licht der Zellenwand gleichartig brechenden Stoff, stellenweis von wässeriger Flüssigkeit erfüllt.

Mehrmals wurde bei Balanophora polyandra und fungosa eine fädliche Zelle, mit das Licht stark brechendem Inhalte, in Berührung mit dem oberen Theile des Embryosacks beobachtet (T. XV. F. 3, 4, 5, 8, 9). In einzelnen Fällen konnte auch ihr Verlauf weit aufwärts im Griffelkanale verfolgt werden. Kein Zweifel, dass sie das Ende des Pollenschlauchs ist. Ueberall, wo sie wahrgenommen wurde, war nur noch eines der Keimbläschen vorhanden, — in der Form unverändert, aber mit einer festen, durch die Einwirkung der Aufbewahrungsflüssigkeit nicht zusammengezogenen Haut umkleidet, — und der ganze Raum des Embryosacks in mindestens zwei Tochterzellen getheilt. Diese zwei ersten Zellen des Endosperms werden durch das Auftreten einer Längsscheidewand gebildet, welche auf einer durch die Längsachse des Eys gedachten, dasselbe in zwei symmetrische Hälften theilenden Ebene rechtwinklig stehen würde. Jede Zelle enthält einen der Scheidewand anliegenden, abgeplattet ellipsoïdischen Kern, von dem strahlige Protoplasmastränge ausgehen (T. XV. F. 2, 3). Dieser ersten Theilung folgt sofort die durch auf der zuvorgebildeten rechtwinklige Längs-, dieser die durch Querwände. In den acht Zellen des Endospermkörpers treten darauf verschieden geneigte Wandungen auf (T. XV. F. 4—10). Aber auch wenn die Zahl der Endospermzellen schon eine ziemlich hohe geworden, lässt sich in ihrer Anordnung der Verlauf der erstentstandenen Scheidewand noch leicht erkennen. — Der Endospermkörper von Balanophora polyandra behält, während seiner Entwickelung, die länglich ellipsoïdische Gestalt des Embryosacks. Der von Balanophora fungosa erscheint meist beträchtlich in die Breite gezogen, selbst abgeplattet-ellipsoïdisch.

Das befruchtete Keimbläschen verändert sich zunächst nicht erheblich; es streckt sich kaum merklich in die Länge. Die Zellwände, wel-

*) Wie schon Griffith beschrieb und abbildete: Transact. Linn. Soc. XX. T. 7 F. 13, 16. Vergl. auch D. Hooker in denselben Gesellschaftsschriften, XXII. T. 5. F. 15—17.

che die Wandungen des Griffelkanals zusammensetzen, schliessen sich, bald nach dem Durchgang des Pollenschlauchs. durch quere Dehnung wieder fest aneinander, so dass der Griffelkanal völlig obliterirt. Darauf verdicken sie ihre Wände nicht unbeträchtlich, welche tief braune Färbung annehmen. Diese Verdickung der Zellwände rückt vorerst nicht bis auf die Zellen der Fruchtknotenwand herab.

Die den Embryosack umschliessenden übrigen Zellen des Eys lösen sich schon während der ersten Theilungen des Sackes aus dem festen Verbande mit diesem und unter einander. Ihre Wände werden runzelig; sie schrumpfen mehr und mehr zusammen. Beim Durchschneiden eines Germen werden sie gewöhnlich zum grösseren oder geringeren Theile vom Messer mit hervorgerissen. Die Fruchtknotenhöhle erscheint dann oft fast leer, soweit nicht der Endospermkörper ihren Raum ausfüllt (T. XV. F. 8). Immer aber bleibt der Zusammenhang des Embryosacks mit der, mehr und mehr sich abplattenden, Stielzelle des Eychens ein ziemlich fester. Durch sie wird in der Regel der Endospermkörper in der ursprünglichen Lage des Embryosacks fest gehalten.

Der Reife nahe und reife Samen haben von keiner anderen Art der Gattung mir zu Gebote gestanden, als von Balanophora dioïca. Wie bekannt, verändern sich Form und Grösse der Fruchtknoten nicht merklich von der Befruchtung bis zur Reife. Auch die Veränderungen im Innern sind nicht sehr beträchtlich. Die zwei Zellenschichten der Fruchtknotenwand verdicken ihre Wände: die der inneren, deren Zellen hinter denen der äusseren im Querdurchmesser um etwa das Dreifache, in der Höhe und Breite häufig um die Hälfte zurückbleiben, allseitig; — die Zellen der äusseren Schicht sehr stark an ihrer nach innen gewendeten Fläche, schwächer an den Seitenwänden, gar nicht an der Aussenwand. Sämmtliche Wandverdickungen sind von Tüpfeln durchsetzt, am zahlreichsten die der Wände, welche beide Zellschichten trennt. Diese Verdickungen treten schon dann sehr deutlich hervor, wenn der Endospermkörper die Fruchtknotenhöhle um etwa zu zwei Drittheilen ausfüllt (T. XV. F. 11). Später gewinnen sie noch an Mächtigkeit, während das an Umfang wachsende Endosperm die Zellen der innern Schicht der Fruchtknotenwand bis zum Verschwinden des Lumens zusammen drückt. Am reifen Samen sinken die dünnen Aussenwände der oberflächlichen Zellen beim Austrocknen des Inhalts ein; die dicken Seiten-

wände stehen dann hervor, und geben der Oberfläche der Früchtchen ein wabiggrubiges Ansehen.

Im heranwachsenden Endosperm verlängert sich das befruchtete Keimbläschen zu einem bis nahe an den Mittelpunkt des Zellenkörpers wachsenden Embryonalschlauche, dicht über dessen Ende dann eine Querwand entsteht (T. XV. F. 11, 12). Bisweilen, doch nicht immer, wiederholt sich diese Querwandbildung in der unteren Zelle des zweizelligen Vorkeims. Die Umbildung seiner Endzelle zum Embryokügelchen wurde nur in solchen Früchten beobachtet, in denen das Endosperm die Fruchtknotenhöhle völlig ausfüllte und die alle Zeichen der vollständigen Reife trugen. Hier erschien die Endzelle des Vorkeims durch übers Kreuz gestellte Längsscheidewände in vier Zellen getheilt (T. XV. F. 13), — ein Zustand, dem ähnlich, zu welchem der Embryo von Oenothera z. B. binnen acht Tagen nach der Bestäubung der Narbe gelangt, und von dem bei Balanophora anzunehmen ist, dass seine Weiterentwickelung erst beim Beginne des Keimens eintritt*).

Von früheren Untersuchungen der weiblichen Blüthentheile von Balanophoren habe ich insbesondere derer von Griffith, J. D. Hooker und Weddell zu gedenken. Griffith**) erkannte bereits den interessanten Zug in der Entwickelungsgeschichte der Germina, dass die Enden der Griffel ursprünglich geschlossen seien. Das Endosperm, dessen Bau und dessen Verhältniss zur Fruchtknotenwand er übrigens völlig richtig beschreibt, nahm er für den Embryo, ein Irrthum, in welchem auch die späteren Forscher ihm gefolgt sind***). Mit dem Thatsächlichen der Angaben J. D. Hooker's stimmen meine Beobachtungen vollständig, nicht so vollständig indess unsere Deutungen des Gesehenen. Den Gegenstand, welchen Hooker als einen jungen Embryosack mit zwei Endospermzellen von Balanophora involucrata auffasst†), nehme ich für ein junges Ey, in der Entwickelung zwischen meine, T. XIV. F. 1 und F. 6 abgebildeten Präparate zu stellen. Seine Abbildung eines weiter

*) Bekanntlich giebt es einen noch einfacheren phanerogamen Embryo: den von Monotropa Hypopitys, welcher wie ich nachgewiesen (Entst. des Embryo S. 36; T. XII. F. 16) aus nur zwei durch eine Querwand getrennten halbkugeligen Zellen besteht.

**) Transact. Linn. Soc. XX. p. 93 ff.

***) J. D. Hooker indess mit wohl begründetem Zweifel: a. a. O. XXII. p. 23.

†) a. a. O. T. V. F. 11, 12.

vorgerückten Zustands*) entspricht sehr wohl der äusseren Ansicht einer Entwickelungsstufe, welche der von mir T. XIV. F. 6 abgebildeten kurz vorausgehen würde. Hooker's Darstellungen vom Eintritt der Pollenschläuche in den Griffelkanal und ihrem Herabsteigen durch denselben, und die meinigen von den gleichen Vorgängen bestätigen und ergänzen sich gegenseitig.

Um so entschiedeneren Widerspruch muss ich gegen die Schilderungen Weddell's**) erheben, — Angaben, bei deren Kritik ich meine Beobachtungen an Balanophora dioïca unbedenklich zu Grunde legen darf, da die von Weddell untersuchte Balanophora indica Wall. nach J. D. Hooker's gewichtiger Meinung von B. dioïca wahrscheinlich nicht einmal specifisch verschieden ist. Der wesentlichste Unterschied zwischen Weddell's und meiner Darstellung liegt darin, dass jener das Endosperm für den Embryo nimmt, und das Vorhandensein eines zum Theil transitorischen kleinzelligen Endosperms behauptet, von dem aber selbst im reifen Samen ein nicht unbeträchtlicher Theil noch vorhanden sein soll. — Der Vergleich meiner Abbildungen mit denen Weddell's (a. a. O. F. 14, 16, 21) wird die absolute Unvereinbarkeit unserer Auffassung zeigen. Ich glaube den Beobachtungsfehler zu errathen, welcher Weddell zu seinen ganz unmöglichen und widernatürlichen Abbildungen führte. Er mag mehr mit dem Compressorium, als mit dem Messer untersucht haben. Bei nicht zureichender Vertrautheit mit der Bedeutung bei stärkeren Vergrösserungen erlangter Bilder hat er dann da die Tüpfel der verdickten Zellen der Fruchtknotenwand für Zellchen genommen, und auf diese Wahrnehmung seine Theorie vom Vorhandensein eines den Endospermkörper umgebenden Albumens gebaut. Ein Vergleich seiner F. 13 mit meiner Zeichnung T. XV. F. 12 und mit der Natur lässt keinen Zweifel an der Richtigkeit dieser Vermuthung.

Eine von der meinigen weit abweichende Auffassung des Baues der weiblichen Blüthe von Balanophora hat neuerdings auch Karsten, nach Ansicht Schacht'scher Präparate ausgesprochen***). Das angebliche Pistill sei ein nackter Eykern. Bei B. globosa soll in der Scheitelwölbung des Embryosacks eine kugelige Zelle frei schweben. — Diese

*) a. a. O. T. V. F. 13, 14.

**) Ann. sc. nat. III. Série t. XIV, p. 168; T. 9.

***) N. A. A. C. L. XXVI. p. II, 923.

kugelige Zelle ist unzweifelhaft der Embryosack; was Karsten wunderlich genug den Embryosack nennt, ist die Fruchtknotenhöhle. Dass der Embryosack nicht frei in der Fruchtknotenhöhle liegt, ist an jedem angeschnittenen Germen deutlich zu sehen.

**Helosis mexicana Liebm.; guyanensis Rich. *).**

Taf. XVI. F. 1—5.

Sehr junge weibliche Blüthen von Helosis mexicana stellen schlanke, verkehrt kegelförmige Zellenmassen dar, auf deren Scheitelfläche die Anlagen der beiden Carpelle und der zwei bis drei Perigonialblätter stehen (F. 1). Die Blüthen sind eingesenkt zwischen den dicht gedrängten, zahlreichen Spreuschuppen; lang keulenförmigen, seitlich abgeplatteten Zellenmassen, aus vier parallelen Längsreihen von Zellen zusammengesetzt, deren oberes Ende von einer, zur Zeit noch glatten, Cuticula umhüllt ist. Unter dem Einflusse verdünnter Säuren (so des zur Aufbewahrungsflüssigkeit der untersuchten Exemplare benutzten Essigs) hebt sich diese Cuticula nicht selten als grosse, weit abstehende Blase von den Zellen ab, welche sie umkleidet**). In den Antheren der zwischen die weiblichen eingestreuten männlichen Blüthen ist der Pollen bereits ausgebildet; H. mexicana unterscheidet sich in dieser Beziehung sehr auffällig von H. guyanensis und deren, durch Richard bekannten***), sehr späten Entwickelung der männlichen Blüthen. Die Oberfläche der Blüthenkolben ist jetzt noch völlig verhüllt durch die dicht gedrängten, schildartig angehefteten, sechsseitig pyramidalen fleischigen Bracteen.

Zarte Längsdurchschnitte durch solche junge weibliche Blüthen zeigten, dass der Blüthenstiel noch die Hauptmasse derselben ausmacht. Er besteht aus zartwandigen, hexagonalen Parenchymzellen. Seine Längsachse wird von einem dünnen Strange prosenchymatischer Zellen eingenommen. Die Höhle des Fruchtknotens erscheint, in Bezug auf das

---

*) Nach in Essig aufbewahrten Exemplaren, welche Dr. J. D. Hooker mir mitzutheilen die Güte hatte.

**) Dies der Grund der Erscheinung, welche J. D. Hooker sehr auffällig war (a.a. O., S. 60). Es ist der nämliche Vorgang, welcher an der Cuticula jugendlicher Pflanzenorgane überhaupt schon seit längerer Zeit bekannt ist (Cohn, de Cuticula, in Linnaea 1850, S. 18 des Aufs.; T. II. F. 5, 18.

***) Mém. Mus. VIII, 416.

noch ganz rudimentäre Perianthium (F. 1 *p*) bereits völlig unterständig. Sie ist von oben her bedeckt durch die zwei, mittelst ihrer Seitenränder bereits verwachsenen, Carpelle. Die Spitzen derselben (F. 1 *c*) sind noch frei; sie beginnen zu den Griffeln auszuwachsen, indem sie zu cylindrischen, im Querschnitt aus acht Zellen (vier peripherischen und vier axilen Längsreihen) bestehenden cylindrischen Fortsätzen sich entwickeln. Zwischen diesen Anlagen der Griffel befindet sich eine breite, offene Spalte, mittelst deren die Fruchtknotenhöhle mit der äusseren Luft in unmittelbarer Verbindung steht.

Vom Grunde der Fruchtknotenhöhle erhebt sich mit breiter Basis eine stumpf kegelförmige, die Höhlung beinahe ausfüllende Zellenmasse (F. 1, *o*). Die Anordnung ihrer Zellen erscheint im oberen, freien Theile fächerartig strahlig, an ihrer Einfügungsstelle in den Blüthenstiel concentrisch schalig; — in Folge hier oft wiederholter Quertheilung mittelst Wandungen, die zu einer durch das Organ gelegten Kugelfläche tangental, und in der Nachkommenschaft je einer Mutterzelle unter sich parallel sind. Die Bildung dieser Gewebspartie hat grosse Aehnlichkeit mit dem Bau der sogenannten Chalaza der Eychen anderer Pflanzen. Das Folgende wird zeigen, dass die eben besprochene Zellenmasse das einzige, aufrechte Ey der Helosis ist.

Der nächste meiner Untersuchung dargebotene Entwickelungszustand von Helosis mexicana sind Inflorescenzen, deren Bracteen grossentheils abgefallen sind, in denen die Griffel der weiblichen Blüthen völlig entwickelt sind, und papillöse Enden zeigen (denen indess keine Pollenkörner anhaften). Diese Blüthen sind offenbar eben zur Befruchtung bereit.

Der innere Bau derselben erscheint nur insoweit wesentlich verändert, als die in die Fruchtknotenhöhle führende Spalte zwischen den Griffeln sich geschlossen, und eine Zelle des Eychens zum Embryosacke sich entwickelt hat. — Der Blüthenstiel, früher die Hauptmasse der Blume, nimmt jetzt nur noch ein Drittheil von der Länge derselben ein. Der in seiner Achse verlaufende Strang prosenchymatoser Zellen hat sich zu einem Bündel von Spiralgefässen umgebildet (F. 2), die als letzte Endungen der in der dickfleischigen Spindel des Blüthenstands zahlreich verlaufenden Gefässbündel sich darstellen. Das Eychen füllt die Fruchtknotenhöhle völlig aus, es liegt der Innenwand derselben auf allen Punkten dicht an, in manchen Fällen bis zu völliger Verwachsung, während

in anderen die Loslösung des Eychens von den Seitenwänden und aus der Scheitelwölbung der Fruchtknotenhöhle ohne Zerreissung der sich berührenden Gewebsmassen möglich war. Die Hauptmasse des Eys besteht aus langgestreckt prismatischen, seitlich nur lose verbundenen Zellen, die nach unten hin plötzlich in die concentrisch angeordneten quer gestreckten Zellen jenes Gewebes übergehen, welches oben mit der Chalaza verglichen wurde. Dieses Gewebe unterscheidet sich durch die Zartheit der Wände wie durch die Anordnung seiner Zellen auffällig von dem des Blüthenstiels, und gränzt das Ey an seiner Anheftungsstelle sehr scharf ab (F. 2 *ch*). Nach dem Scheitel des Eychens hin werden dessen Zellen rasch um Vieles kleiner, nahezu würfelig. Sie umschliessen hier, mit zwei Zellschichten sie bedeckend, eine sehr grosse, derbwandige Zelle, den Embryosack (F. 2 *c*). Dieser lässt sich mit leichter Mühe aus dem ihn umgebenden Gewebe lösen, und unverletzt freilegen. Man erkennt dann sehr deutlich in seinem Mittelpunkte eine grosse dunkelgefärbte Kugel, — den centralen primären Kern des Sakkes; von ihr strahlig ausgehende Bänder und Stränge einer durchscheinenden, zahlreiche Körnchen enthaltenden Substanz: — unter dem Einfluss der Aufbewahrungsflüssigkeit erhärtete Protoplasmaströme; — endlich in der Scheitelwölbung des Sackes zwei halb ellipsoïdische, mit breiten Flächen an dessen Innenwand haftende, scharf umgränzte dunkle Massen: — zwei unbefruchtete Keimbläschen (F. 3).

Die Spalte zwischen den Griffeln ist jetzt spurlos verschwunden. An ihrer Stelle ist die Wölbung der Fruchtknotenhöhle durch eine dicke, aus sechs Zellenlagen bestehende Schicht kleinzelligen Gewebes verschlossen. Dagegen hat sich in jedem Griffel ein dessen Längsachse durchziehender, offen in die Fruchtknotenhöhle mündender Intercellulargang — Styluskanal — gebildet (F. 2 *s*). Die Zipfel des Perigons, aus einer einfachen Schicht schräg aufwärts gestreckter grosser Zellen zusammen gesetzt, haben eine Länge erreicht, welche einem Sechstheil der ganzen weiblichen Blüthe gleichkommt. Ihre Cuticula zeigt zierliche, schwach wellenlinige Längsstreifen; die der oberen Enden der Spreuschuppen jetzt zahlreiche Querrunzeln, welche ein Netzwerk aus quergezogenen Maschen darstellen (F. 2 *x*).

Spätere Zustände von Helosis mexicana fehlen mir. Dagegen konnte ich reife Samen von Helosis guyanensis untersuchen. Der nur zwei Centimeter lange Blüthenstand zeigte sehr schön die von L. C. Ri-

chard*) bereits beschriebene merkwürdige Erscheinung des Hervorbrechens männlicher Blüthen erst nach der Samenreifung mit ihnen auf demselben Blüthenboden stehender weiblicher. Die Früchte sind schwach zusammengedrückte, walzliche Körper, mit Einschluss des ihren Scheitel krönenden, vertrockneten dünnhäutigen Perianthium von 1,75 M.M. Länge. Die Frucht besteht aus einer Doppelschicht kurzer Zellen mit stark verdickten, braunrothen Wänden (F. 4). Die Zellen der äusseren Schicht sind tafelförmig, die der inneren würfelig. Den Scheitelpunkt der Schale nimmt eine Gruppe kleiner Zellen, mit ebenfalls verdickten Wänden ein. Sie bezeichnen die Stelle, an welcher die abgefallenen Griffel sassen. Die Höhle des Fruchtknotens ist vollständig ausgefüllt durch das Endosperm, einen länglich ellipsoïdischen Körper aus dünnwandigen Zellen, die neben viel Eyweiss und weniger Oel auch etwas Amylum in Form kleiner, kugeliger Körner enthalten. Der Spitze des Endospermkörpers ist der verhältnissmässig kleine, kugelige Embryo eingelagert. Er haftet durch einen fädlichen, kurzen Träger, eine einfache Zellreihe, an der Innenwand des Embryosacks (F. 4, 5). Seine Zellen enthalten feinkörniges, dichtes Protoplasma, jede einen deutlichen grossen Zellkern, aber kein Amylum.

Man hat bisher Helosis und den ihr verwandten Gattungen ziemlich allgemein hängende Eychen zugeschrieben, auch diese, der klaren Entwickelungsgeschichte gegenüber unhaltbare Auffassung durch Abbildungen versinnlicht**) — ähnlich wie bei Loranthus. — Innerer Bau des Samens und Beschaffenheit des Embryo waren völlig unbekannt.

### Phyllocoryne jamaïcensis Hook. f. Corynea crassa Hook. f.; Rhopalocnemis phalloïdes Jungh.

Taf. XXI. F. 6—9. Taf. XVII. F. 7, 8.

Von jeder der in der Ueberschrift genannten Arten***) habe ich je nur einen einzigen Entwickelungszustand der weiblichen Fortpflanzungsorgane untersuchen können. Die Uebereinstimmung derselben

---

*) Mém. Mus. VIII, p. 416.

**) J. D. Hooker, a. a. O. Tf. XVI. F. 17.

***) Gleich der Mehrzahl meines Materials von Balanophoreen verdanke ich Stücke in Essig aufbewahrter Infloresceuzen auch dieser Formen der Güte Dr. J. D. Hooker's.

unter sich und mit Helosis ist aber so gross, dass über die Deutung der gesehenen Organe kein Zweifel obwalten kann.

Völlig entfaltete, aber noch unbefruchtete Blüthen sah ich von Corynea crassa. Sie sind denen von Helosis mexicana ganz ähnlich beschaffen; nur ist die Verwachsung des Eychens mit der Fruchtknotenhöhle auf allen Punkten eine ganz vollständige. Der Embryosack lässt sich eben so leicht frei legen, wie bei Helosis. Er ist noch reicher an Protoplasma als dort. Unter dem Einfluss der Aufbewahrungsflüssigkeit vollständig erhärtet, liess dasselbe nicht allein die Strömungsfäden sehr deutlich erkennen, welche vom grossen centralen Kerne ausgehen; sondern es liess sich auch der fest gewordene Wandbeleg der Zelle aus Protoplasma vollständig, in Form einer geschlossenen Blase, aus der zerrissenen Zellhaut heraus nehmen (T. XVI. F. 9). Interessant ist dabei der Umstand, dass die Keimbläschen von dieser, die Form der Zelle nachahmenden Protoplasmaschicht ausgeschlossen erscheinen. Sie haften fest an der Zellwand.

Von Phyllocoryne jamaïcensis Hook. f. untersuchte ich junge Früchte, deren Griffel bereits abgefallen waren. Die zahlreichen Spreuschuppen, von denen die Früchte dicht umstanden sind, zeigten eine Besonderheit des innern Baues. Die von einer, aus vier Längsreihen zusammengesetzten, einfachen peripherischen Zellschicht umhüllten axilen Zellreihen (zwei bis drei) des oberen Theils der Schuppen haben stark verdickte, geschichtete und getüpfelte Wände (T. XVII. F. 8). Ein Mantel aus ähnlich gebildeten Zellen befindet sich im Innern des oberen Theiles der Fruchtknotenwand. Er beginnt im Innern der langen Zipfel des Perianthium mit einer umfangreichen, dicht unter den gestreckten Oberhautzellen der Zipfel gelegenen Gruppe besonders dickwandiger kurzer solcher Zellen, an welche in die Länge gezogene sich anschliessen, um so gestreckter und dünnwandiger, je weiter abwärts von jener Gruppe; bis endlich, etwa in der Hälfte der Höhe des Germen, die verdickten Zellen unmerklich in die dünnwandigen der Fruchtknotenwand übergehen (T. XVII. F. 8). Jene umfangreichere Masse dickhäutiger Zellen erinnert an das ähnliche Vorkommen bei Scybalium. Ohne Zweifel nimmt, wie dort, die Wandverdickung der Zellen der Fruchtwand von ihnen ihren Ausgang, und führt endlich zur Bildung einer rings geschlossenen, allseitig die Frucht umgebenden Steinschale.

Im Uebrigen weicht der Bau des Fruchtknotens nicht von dem der

Helosis mexicana ab. — Die Abgränzung des aufrechten Eychens vom Gewebe der Fruchtknotenwand ist allseitig besonders scharf, auch an der Einfügungsstelle im Grunde. Die Zellen der Kernwarze sind auffällig klein und dicht gedrängt; über ihr eine sehr deutliche Lücke; hier gar kein Zusammenhang der Aussenfläche des Eys mit der Innenwand der Fruchtknotenhöhle, während seitlich Verwachsung beider eintritt. Der Embryosack hat die Form eines abgeplatteten Ellipsoïds; seine Membran ist dunkelgelb, auf beiden Flächen mit kleinen Körnchen besetzt, sehr brüchig. In allen der Zergliederung unterworfenen Früchten befand sich in ihm Endosperm, das aber in der Mehrzahl der Fälle zusammen geschrumpft erschien und, zu einem rundlichen Klumpen geballt, auf dem Grunde des Embryosacks ruhte, nur etwa zwei Drittheile der Höhlung desselben ausfüllend. Andere Embryosäcke dagegen waren von geschlossenem Gewebe prall erfüllt und in offenbar normalem Zustande. Sie waren verschiedener Entwickelung: die mindest ausgebildeten zeigten auf dem Durchschnitt nur eine mässige Zahl von Endospermzellen, in welche hinein, vom Scheitel des Sackes her, ein aus einer einfachen Längsreihe von zwei bis drei Zellen bestehender Vorkeim ragt (T. XVII. F. 7). Die Zellen des letzteren unterscheiden sich von denen des Endosperms durch dichteren, aber feiner körnigen Inhalt. — In den weitest entwickelten Früchten fand sich im Mittelpunkte des Endosperms ein relativ grosser abgeplattet kugeliger Embryo, mittelst eines zweizelligen cylindrischen Trägers an der Embryosackhaut haftend (T. XVII. F. 8). Auch diese, schon einen weit vorgerückten Embryo enthaltenden Embryosäcke nahmen erst einen kleinen Theil des Eychens ein, während doch ohne Zweifel im reifen Samen der Endospermkörper die ganze Fruchthöhle ausfüllen wird. Wahrscheinlich ist Phyllocoryne eine Form mit sehr grossem Embryo, gleich der zunächst zu besprechenden Gattung.

Von Rhopalocnemis phalloïdes Jungh. (Phaeocordylis areolata Griff.) lagen reife Früchte zur Untersuchung mir vor. Sie sind, wie durch Griffith bekannt, seitlich stark abgeplattete, von den breiten Flächen gesehen breit eyförmige Körper, deren dünne, aus verholzten, dunkelbraunwandigen, abgeplatteten Zellen bestehende Schale einen weisslichen Samen von hornartiger Festigkeit einschliesst. Dieser Same, bisher für eine homogene Zellmasse erklärt*), erweist sich, auf dünnen

*) So von Griffith und Hooker a. a. O.

Durchschnitten unter Behandlung mit Jodwasser untersucht, als aus zwei verschiedenen Theilen zusammengesetzt. Die Mitte des Samens nimmt ein Körper ein, dessen Form mit der der Frucht (in verkleinertem Maasse) genau übereinstimmt. Er besteht aus ziemlich grossen, im Allgemeinen langgestreckten Zellen, die reichlich grobkörniges Amylum enthalten. Mit einer seinem Scheitelpunkte angesetzten Stielzelle haftet er an der den Samen umschliessenden Membran. Dieser Körper ist der Embryo. Er ist rings umschlossen von einer fast durchweges einfachen Schicht kürzerer dünnwandigerer Zellen, die sehr wenig feinkörniges Amylum, aber sehr viel eyweissartige Substanz enthalten. Diese Gewebschicht ist Endosperm. — Lässt man zarte Durchschnitte von Früchten zwischen Glasplatten langsam eintrocknen, so pflegen sich an den Berührungsflächen von Endosperm und Embryo deutliche Spalten zu bilden (Taf. XVI, F. 6, 7, 8).

### Scybalium fungiforme Schott & Endl. *)

Taf. XVII. F. 1—6.

Ein besonderes Interesse knüpft sich an Scybalium durch den Umstand, dass im Innern seines Fruchtknotens zwei Embryosäcke (von früheren Autoren als Eychen aufgefasst**) vorkommen. Im Uebrigen ist der Bau des Fruchtknotens im Wesentlichen übereinstimmend mit dem anderer Helosideen. Das Germen ist minder schlank, als das von Helosis, seitlich zusammengedrückt; die Griffel um Vieles länger; die der Peripherie der kreisförmigen Gruppen, zu denen die weiblichen Blüthen auf dem flachen Blüthenboden geordnet sind, stark nach einwärts gebogen. Die Griffel bestehen, gleich denen von Helosis, aus vier peripherischen, weiten, und vier axilen, den Griffelkanal umgebenden sehr

*) Untersucht an zwei Blüthenständen, einem unbefruchteten und einem Abschnitt eines der Fruchtreife nahen, welche Prof. Fenzl aus dem Wiener Museum mir mitzutheilen die Güte hatte. — Bekanntlich sind die dort aufbewahrten Exemplare die einzigen vorhandenen; die Pflanze ist seit ihrer Entdeckung von keinem Sammler wieder gefunden worden.

**) Endlicher gen. pl. 41; Meletemata p. 3, t. 2. Ich citire den Text des letzteren Werks nach dem Gedächtnisse, die Abbildungen nach Copieen. Endlicher liess dies Buch beklagenswerther Weise in einer äusserst geringen Zahl von Exemplaren abdrucken. Es ist mir nicht zur Hand; auch nirgends käuflich.

engen Längsreihen von Zellen. Eine kranzförmige Gruppe von im Längsschnitt je vier Zellen, welche unter der Einfügung des rudimentären Perianthium verläuft, hat schon im unbefruchteten Germen stark verdickte, getüpfelte Wände (F. 1, 2). — Die Spreuschuppen bestehen in der Regel aus vier Längsreihen von Zellen, von denen sich indess nicht selten einige axile Zellreihen abscheiden (F. 4, 4 *b*, Querschnitte), eine Andeutung an den bei Phyllocoryne regelmässigen zusammengesetzteren Bau.

Die Höhle des Fruchtknotens ist völlig ausgefüllt von einem Körper, der auf den ersten Blick dem aufrechten Ey von Helosis vollständig ähnelt. Gleich diesem steht er im festen Verbande mit dem Grunde der Höhlung des Germen und lässt er sich von deren Seitenwänden nur schwer und unvollständig, leicht und vollkommen dagegen aus der Scheitelwölbung desselben lösen. Er besteht im unteren Theile aus lang gestreckten dünnwandigen Zellen, die nach oben zu in kürzere übergehen; die des Scheitels sind nicht länger als breit. — Im Innern dieses scheinbar homogenen Zellkörpers befinden sich zwei Embryosäcke; in der Art angeordnet, dass ein, parallel den längeren Seiten des Germen und durch die Einmündungsstellen beider Griffelkanäle in die Fruchtknotenhöhle geführter Schnitt beide Embryosäcke halbirt (F. 1, 3). Auf solchen Durchschnitten erscheinen die Embryosäcke stark einwärts gegen die Längsachse des Germen geneigt. Auf zu diesem Schnitt rechtwinkligen Längsschnitten erscheinen ihre Seitenflächen den breiten Seiten des Germen parallel (F. 2). Die Membran der Embryosäcke steht in festem Zusammenhange mit den ihr angränzenden, tafelförmigen, in zwei bis drei concentrische Schichten geordneten Zellen des umhüllenden Gewebes. Die Embryosackhaut lässt sich nur stückweis ablösen. Der Inhalt des Embryosacks ist eine halbflüssige, von zahlreichen Körnchen tief getrübte schleimige Substanz, in welcher der grosse Zellkern des Sackes bald mehr, bald minder deutlich erkannt werden kann. In der obern Wölbung der Embryosäcke haften zwei scharf umgränzte, abgeplattete Protoplasmamassen an der Wand: die Keimbläschen (F. 1, 2).

Genauere Betrachtung lässt eine, der Mitte der beide Embryosäcke einschliessenden Zellenmasse entlang verlaufende, besonders dunkle Commissur zweier Längsreihen von Zellen erkennen (F. 1 *x*). Es ist hier zwischen den Zellwänden eine körnige, in durchfallendem Lichte

bräunliche, Substanz in äusserst geringer Menge vorhanden. Dieselbe Trennungslinie tritt an Querdurchschnitten hervor, wenn auch minder deutlich (F. 2 *x*). Es gelingt nicht, die durch diese Linie getrennten beiden Hälften der die Fruchtknotenhöhle ausfüllenden Zellenmasse unverletzt von einander zu lösen. Gleichwohl möchte ich vermuthen, dass bei Scybalium zwei, die Fruchtknotenhöhle völlig ausfüllende, an der durch gegenseitigen Druck abgeplatteten Berührungsfläche fest verwachsene, aufrechte, ungekrümmte nackte Eychen vorhanden sind. Die Annahme, dass die beiden Embryosäcke einem und demselben Ey angehören, ist unvereinbar mit dem bisher überall zutreffenden Erfahrungssatze, dass eine axile Zelle des Eys zum Embryosacke sich entwickelt*).

Unter den der Reife nahen Früchten des anderen Blüthenstandes fand sich eine in der Entwickelung zurück gebliebene. Der eine Embryosack derselben erscheint um etwa das Vierfache des Durchmessers gewachsen (so dass er jetzt den Umfang von beiläufig einem Drittel der Fruchtknotenhöhle hatte), und von vielzelligem Endosperm ausgefüllt, welches einen zweizelligen Vorkeim einschliesst (F. 5). Die muthmaassliche Trennungslinie der beiden Eychen ist um Vieles schärfer ausgeprägt, als auf früheren Zuständen. Der zweite Embryosack ist gewebleer, verschrumpft, von dem herangewachsenen Nachbar zusammengedrückt; — auch das ihn einschliessende unbefruchtet gebliebene Eychen von dem anderen beträchtlich zur Seite gedrängt. Die beiden der Innenfläche der Fruchtknotenwand angränzenden Zellschichten derselben zeigen getüpfelt verdickte, braun gefärbte Wände. An jene Gruppe verdickter Zellen unter der Einfügung des Perianthium sich anschliessend, auf deren Nachbarzellen die Wandverdickung inzwischen

*) Entscheidenden Aufschluss wird nur die, zur Zeit unzugängliche, Entwickelungsgeschichte geben können. Ohne die Kenntniss dieser können auch die Fälle des Vorkommens mehrerer Embryosäcke aus und auf demselben Ey (? — vielleicht Placenta?) bei tropischen Loranthusarten nicht als gültige Beweise gegen die oben ausgesprochene Ansicht hingestellt werden. Das Untereinandergreifen der zwei Embryosäcke von Viscum album (vergleiche S. 556, u. T. VI F. 7) zeigt, dass auch in der Familie der Loranthaceen die Mehrzahl der Embryosäcke auf die Ausbildung mehrerer, bei der Längsentwickelung an einander vorbei wachsender Zellen des axilen Zellstranges des Eys zurück geführt werden kann; ganz wie bei Rosa und bei Cheiranthus Cheiri.

auch sich erstreckt hatte, stellen sie bereits eine vollständige Steinschale dar.

Diese Steinschale hat in den übrigen Früchten des nämlichen Fruchtstandes an Härte und Festigkeit noch zugenommen. Der herangewachsene, sehr grosszellige Endospermkörper erfüllt den weitaus grösseren Theil der Fruchthöhle, in deren Grunde nur noch ein kleiner Rest vom Gewebe des Eychens sich erhalten hat (F. 6). In anderen Früchten war auch dieser verschwunden. Die Zellen des Endosperms sind dünn- und weichwandig, ihr Inhalt (unter dem Einflusse der Aufbewahrungsflüssigkeit — Alkohol — zu einem die Zellhöhle nur zu zwei Dritteln erfüllenden Ballen zusammengeschrumpft) ein dicker Wandbeleg aus Protoplasma, in dem zahlreiche Oeltropfen *) und ein Zellenkern. Etwas seitlich vom Scheitel des Endosperms ist an der Innenfläche der dasselbe umschliessenden Embryosackhaut der Embryoträger mit breiter Ansatzfläche befestigt. Er besteht aus drei cylindrischen Zellen, deren letzte den Embryo, einen gestreckt eyförmigen Körper aus wenigen, nicht eben kleinen Zellen trägt (F. 6, 6 *b*).

---

Die vorstehenden Untersuchungen ergeben, dass bei den Balanophoreen zwei verschiedene Entwickelungsformen des Eychens vorkommen: hängende Eychen, hemitrop bei Cynomorium, anatrop bei Balanophora, Langsdorffia und Sarcophyte; — und aufrechte atrope Eychen bei den zweigriffeligen Formen; — Unterschiede, die nicht ausreichend sind, die überhaupt polymorphe, aber doch in vielen der wichtigsten Beziehungen gleichartige Familie in zwei, beziehendlich drei (etwa Cynomorieen, Langsdorffieen und Helosideen) zu zerspalten. Verschiedenartig vertheilt, finden sich innerhalb der Familie schrittweise Uebergänge in dem Grade der Vollkommenheit des Baues der weiblichen Blüthe und des Samens. Von der einfachsten Form der Eychen bei Langsdorffia und Sarcophyte bildet Balanophora den Uebergang zu den vollkommenen

*) Herausgedrückte und zu grösseren Massen zusammengeflossene Tropfen solchen Oeles haben zweifelsohne den Anlass zu Endlicher's Annahme gegeben, das Gewebe im Innern der Balanophoreenfrüchte sei „sporenführende Masse."

von Cynomorium. Der Embryo, wenigzellig bei Balanophora, ist entwickelter bei Langsdorffia, Helosis; noch weiter ausgebildet bei Rhopalocnemis, Cynomorium; endlich mit Andeutungen des Cotyledonen versehen bei Sarcophyte, mit grösseren Cotyledonen bei Mystropetalon. Die Steinschale der Frucht, fehlend bei Cynomorium, nur angedeutet bei Balanophora, vom übrigen Gewebe der Fruchtwand nicht gesondert bei Helosis guyanensis und bei Rhopalocnemis, findet sich in vollständiger Ausbildung bei Langsdorffia, Sarcophyte, Phyllocoryne, Scybalium.

Die genauere Kenntniss der Entwickelung von Samen und Embryo bestätigt vollkommen die von J. D. Hooker*) dargelegte Auffassung der systematischen Stellung der Balanophoreen als zunächst verwandt mit Hippuris. Zwei Punkte sind dabei noch hervorzuheben: dass Hippuris eine der wenigen Pflanzenformen ist, deren Ey, gleich der grossen Mehrzahl der Balanophoreen, den Loranthaceen und Santalaceen der Integumente entbehrt, und dass auch bei Hippuris das Endosperm durch Theilung des ganzen Innenraums des Embryosacks gebildet wird**).

---

*) In Lindley, veget. kingdom III. ed. p. 89, 90; und in Transact. Linn. soc. XXII.

**) Es bilden zwar sowohl Unger (Bot. Zeit. 1849, T. III. F. 12) als Schacht (Entw.-Gesch. d. Pflanzenembryon, Tf. XXVI. F. 1—3,7) im jüngst befruchteten Embryosack von Hippuris in grosser Anzahl frei schwimmende Zellchen ab. Doch unterliegt es keinem Zweifel, dass diese Bildungen Vacuolen sind, denen ähnlich welche bei Bartonia aurea vor der ersten Quertheilung des befruchteten Embryosacks in dessen Inhaltsflüssigkeit auftreten (Hofmeister Entst. d. Embryo, Tf. III. F. 3). Bei meinen Untersuchungen von Hippuris, die im Uebrigen denen von Tulasne (Ann. sc. nat. III. Série,) nichts Wesentliches hinzufügen (abgesehen davon, dass ich, gleich Unger und Schacht, im unbefruchteten Embryosack die Keimbläschen deutlich erkannte), sah ich junge Zustände des Endosperms, in welchen dasselbe aus vier in eine Längsreihe geordneten, den Embryosack ausfüllenden Zellen bestand, deren oberste und unterste weiterhin sich nicht vermehren.

Ob auch in embryologischer Beziehung Uebereinstimmung zwischen den Balanophoreen und Gunnera, Haloragis u. A. von Hooker angezogenen Formen obwaltet, kann ich zur Zeit nicht beurtheilen. Die von mir bisher untersuchten lebenden Exemplare der eben genannten brachten nur taube Früchte.

# VII.

## Orobancheen.

---

### Lathraea squamaria.

Taf. XVIII, XIX.

Das Eychen der Lathraea squamaria ist halbumgewendet*). In der frühen Jugend desselben, bevor der schlanke Eykern von dem sehr dicken Integument überzogen wird, erkennt man jenen zusammengesetzt aus einer kurzen axilen Zellreihe, die von einer einzigen Zellschicht umgeben wird**) — der Bau des jungen Eykerns, welcher den Familien gemeinsam ist, die im Folgenden uns beschäftigen werden. Die oberste, grösste Zelle des axilen Zellstranges entwickelt sich zum Embryosack. Sie durchbricht die umhüllende Zellschicht am Scheitel des Eykerns, und wächst hinein in den, vom jungen Eykern bei weitem nicht ausgefüllten Hohlraum des Integuments. Gegen die Blüthezeit hin ist nur der kleinere untere Theil des Embryosacks von der peripherischen Zellschicht des Eykerns umhüllt. Seine grössere obere Hälfte ragt aus dieser hervor (T. XVIII. F. 1) und liegt auf allen Punkten der Innenfläche des Integuments an. Diese besteht aus einer Schicht quergestreckter, langprismatischer Zellen mit in durchscheinendem Lichte gelblichem, fein körnigem Inhalte. Das übrige Gewebe des Integuments besteht aus isodiametrischen Zellen, vollgestopft mit groben Amylumkörnern. — Am Scheitel des Embryosacks pflegt dessen Membran eine beträchtliche Verdickung zu zeigen (T. XVIII. F. 1—10, T. XIX. F. 8); — bisweilen ist diese verdickte Stelle nach aussen hin, in den Mikropylekanal hinein, zu einem kurzen, geraden (T. XIII. F. 20), oder gekrümmten (F. 8) Stachel verlängert***). Auf der Aussenfläche des verdickten Theiles der

---

*) Vergleiche Schleiden, Wiegmanns Archiv B. I. (1837) T. 8, u. Gesammelte Aufsätze T. 5 F. 62. Schacht, Entw.-Gesch. d. Pflanzenembryon S. 121, T. 18. Hofmeister, Flora 1851. S. 449, T. X.

**) Siehe Hofmeister a. a. O.

***) Diese Anhängsel sind von Schacht irrthümlich als dem Embryosack anhaftende Pollenschlauchenden gedeutet worden (Pflanzenzelle, T. XX. F. 17; Mikroskop, 2. Aufl., T. III. F. 20).

Wand des Embryosackscheitels erkennt man bei Anwendung kräftigster Vergrösserung zarte, nach der Spitze des Sackes convergirende Längsstreifen (T. XIX. F. 8).

Unterhalb dieser verdickten Stelle der Haut des Embryosackscheitels haften an deren Innenfläche schon mehrere Tage vor dem Aufblühen, in Knospen deren Corolle und Antheren noch gänzlich geschlossen sind, die bereits völlig ausgebildeten Keimbläschen; in der Regel zwei an der Zahl: birn- oder eyförmige Zellen, von zwar sehr zarten, aber festen Zellstoffhäuten umhüllt, mit breiter Ansatzfläche der Membran des Embryosacks angeschmiegt, das eine etwas höher als das andere. Ihre Innenwand ist ausgekleidet mit einem Ueberzug körnigen Protoplasmas, in welchem, nahe dem unteren Ende der Zelle, der verhältnissmässig grosse Kern mit einzigem Kernkörperchen liegt. Diese Verhältnisse des Inhalts der Keimbläschen treten deutlich hervor an Präparaten, bei welchen durch zwei Parallelschnitte durch das Eychen der Embryosack blos gelegt wurde. Sie sind schwerer wahrzunehmen an völlig frei präparirten Embryosäcken, bei deren Hervorziehen aus dem Integument der Inhalt der Keimbläschen in seiner Lagerung gestört, oft auch aus den berstenden Zellen ausgetrieben wird. Sind die Keimbläschen auf solche Weise ihres festen Inhalts beraubt worden, so bedarf es der Anwendung von Instrumenten ersten Ranges, um die höchst zarten Umrisse der festen Cellulosemembranen der Keimbläschen zu erkennen. Mikroskope, die nicht ganz so viel leisten, zeigen deutlich nur die Berührungskanten der Keimbläschenhaut mit der Innenfläche des Embryosacks in Gestalt rundlicher, oder (im Profil gesehen) dreiseitiger Figuren (vergleiche F. 1—6). Diese sind die Anschauungen, welche bei verwandten Pflanzen Tulasne zu seiner Ansicht von der Entstehung des Keimbläschens aus einer Spaltung der Embryosackhaut, parallel der Fläche derselben führten*). Nahe unterhalb der Keimbläschen liegt im

*) Tulasne in Ann. sc. nat. III. Sér. Bot. T. XII. Was hier von unbefruchteten Keimbläschen gesagt wird, gilt auch von eben befruchteten, auf welche Tulasne sich bezieht. Auch deren Membran erhält erst einige Zeit nach der Befruchtung grössere Dicke und leichtere Erkennbarkeit. Ich gab diese Deutung der Anschauung Tulasne's bereits 1855 (Flora 38 Jahrg., S. 258); und glaube damit auch den letzten der Gründe widerlegt zu haben, welche den trefflichen französischen Forscher veranlassten, die Anwesenheit der Keimbläschen im Embryosacke vor Ankunft des Pollenschlauchs zu bestreiten. Radlkofer ist etwas später bei Untersuchung von Euphrasia serotina zu Er-

unbefruchteten Embryosacke dessen primärer Kern; ein abgeplatteter Körper von ovalem Umriss, mit einem oder zwei grossen Kernchen (F. 1, 3, 5). Gegenfüsslerzellen der Keimbläschen sind nicht immer, und oft nur in Einzahl vorhanden (F. 3).

Bei warmer Witterung findet man schon drei bis vier Stunden nach künstlicher Bestäubung der Narbe Pollenschläuche bis in die Mikropylen der Eychen vorgedrungen. Es geschieht nicht häufig, dass mehrere Pollenschläuche in denselben Eymund eintreten. Die Pollenschläuche sterben ziemlich rasch von oben her ab. Der Inhalt wandert während ihres Herabwachsens nach dem unteren Ende hin; die leere Membran des oberen Theils wird schnell dünner und blässer, und endlich dürr. Eine scharfe Abgliederung des fortwachsenden Endes vom leeren Theile ist nicht wahrzunehmen, so lange die Schläuche nicht in Eychen eingedrungen sind. — Bei der ersten Ankunft des Pollenschlauchendes am Embryosack ist die Haut des Schlauches, so weit die zahlreichen Beobachtungen gehen, stets dünn und zart. Der Inhalt des Schlauches ist ein das Licht stark brechender, bei durchfallender Beleuchtung gelblicher Schleim, wenig getrübt von sehr kleinen Körnchen, in welchem einige etwas grössere feste Körper, von rundlicher, seltner länglicher Gestalt, eingebettet sind (F. 8, 9, 14, 16, 18). Bald indess erscheint in den meisten Fällen (wiewohl keineswegs regelmässig) der Pollenschlauch in seinem Aussehen sehr verändert: er gleicht einem Stabe aus das Licht gleichartig brechender Substanz, in dessen Achse nur hier und da Reihen oder Stränge des körnigen Inhalts noch zu erkennen sind (F. 12, 13). Diese Veränderung beginnt am hinteren, aus dem Eymunde hervorhängenden Theile des Pollenschlauchs, dessen Ende durch eine Art von Propfenbildung vom leeren oberen Theile schroff abschliessend; und schreitet von dieser Stelle gegen die Spitze des Schlauches hin vor. Es ist nicht unwahrscheinlich, dass sie auf dem Aufquellen der Innenfläche der Membran beruht.

Die Stelle, an welcher das Pollenschlauchende auf die Aussenfläche des Sackes trifft, ist sehr veränderlich, und offenbar von Zufälligkeiten abhängig; namentlich davon, ob der Embryosack bei Ankunft des Pollenschlauches die Höhle des Integuments mehr oder minder prall aus-

---

gebnissen gekommen, welche mit den meinigen vollständig übereinstimmen. (Befruchtung der Phanerogamen, Lpz. 1856, S. 12.)

füllt. Der häufigste Fall ist der, dass das Pollenschlauchende eine kurze Strecke (etwa bis zur oberen Gränze der Ansatzfläche des unteren Keimbläschens) zwischen Embryosackhaut und Integument sich drängt (F. 4, 12, 14, 19). Selten wächst er weiter hinab (F. 11). Es verdient Beachtung, dass kein Fall aufgefunden werden konnte, in welchem der Pollenschlauch der Stelle des Embryosacks sich anlegte, an welcher innen das untere (wie das Folgende zeigen wird fertile) Keimbläschen haftet. Ebensowenig ist beobachtet, dass der Pollenschlauch nur mit der stark verdickten Spitze der Embryosackhaut in Berührung getreten war. Oft zeigt sein Ende starke Krümmungen seitwärts (F. 14, 18) oder rückwärts (F. 13, 20).

Das Pollenschlauchende haftet bald ziemlich fest an der Aussenfläche des Embryosacks, bald nur so lose, dass eine leichte Berührung zur Trennung beider genügt. Der letztere Fall ist auf den früheren Entwickelungszuständen entschieden der häufigere (F. 8—10, 17), kommt aber auch auf späteren noch vor; — ebenso wie der erstere auf sehr frühen. Eine beide Organe verkittende Substanz konnte ebensowenig beobachtet werden, als Oeffnungen in der Haut des einen oder des anderen.

Die ersten Veränderungen, welche nach Ankunft des Pollenschlauchs im befruchteten Embryosacke sichtbar werden, sind das Verschwinden des primären Kerns desselben; das Erscheinen zweier neuer Kerne an dessen Stelle (F. 6) und das Auftreten einer Querscheidewand zwischen diesen, welche den Sack in eine grössere untere und kleinere obere Hälfte theilt (F. 7, 10). In der ersteren findet keine weitere Scheidewandbildung statt. Die letztere dagegen theilt sich bald und wiederholt aufs neue durch Querwände (F. 9, 11); die Tochterzellen darauf durch Längswände (F. 11, 12), welche in der Regel in einer durch die Raphe gelegten, das Ey in zwei symmetrische Hälften theilenden Ebene liegen, so dass auf blossen Durchschnitten diese Wände nicht sichtbar werden; es bedarf dazu der Freilegung des Sackes*). Diese Längswände treten früher in den unteren, scheibenförmigen Zellen des in der Bildung begriffenen Endosperms auf, als in der obersten kegelförmigen,

*) Dieser Umstand ist der Grund der in diesem untergeordneten Punkte irrthümlichen Darstellung meines Aufsatzes in Flora 1851, welche das junge Endosperm als eine einfache Längsreihe von Zellen schildert.

in welche die Keimbläschen herein hängen (F. 11). Die Längsscheidewand in dieser geht sehr häufig zwischen beiden Keimbläschen mitten durch (F. 12, 13, 16, 17, 19); ganz regelmässig ist die Längswand einer der Seiten des unteren Keimbläschens dicht angeschmiegt (F. 13—24).

Die Zellen der jungen Endosperms sind reich an Protoplasma, welches zum Theil als dicker Beleg die Innenwand überzieht, zum Theil in Stränge geordnet ist, welche vom jener Schicht eingelagerten Zellenkern aus durch den Zellraum strahlen. Dieses Protoplasma ist von zahlreichen, unmessbar kleinen Körpern getrübt, deren chemische Natur an frischen Endospermzellen, ihrer Kleinheit wegen, nicht erkannt werden kann. An Präparaten aber, welche mehrere Jahre lang in Chlorcalciumlösung aufbewahrt wurden, erscheinen jene Kügelchen zu grossen Tropfen das Licht stark brechender, gelblicher Flüssigkeit zusammengeflossen. Diese Flüssigkeit ist Oel; seine Masse ist beträchtlich, beträgt etwa $^{1}/_{25}$ des Volumns der Zellen.

Das freie Ende des unteren Keimbläschens verlängert sich allmälig zu einem kurzen cylindrischen Schlauche, welcher — wie bemerkt der Längsscheidewand der obersten Tochterzelle des Embryosacks angeschmiegt, — nach den scheibenförmigen Zellen des Endosperms zu wächst (F. 14—18, 20, 23). Selten biegt das untere Ende dieses Embryonalschlauchs von der Scheidewand ab (F. 19). Das obere, sterile Keimbläschen verschwindet entweder unterdessen, zuerst die Membran, später der zu einem Klumpen grobkörnigen Schleimes geballte Inhalt (F. 15, 16, 20) — oder aber es erhält sich lange Zeit, wenig verändert, nur dass seine Membran sich verdickt (F. 11—13, 18, 19, 22). Bisweilen erscheint es etwas in die Länge gestreckt (F. 14).

Die Vermehrung der scheibenförmigen Zellen des jungen Endosperms ist am lebhaftesten etwas über der Mitte des kurzen Cylinders, welchen sie zusammensetzen. Von dieser Stelle nimmt die Vermehrung nach oben rasch, nach unten hin allmäliger ab. In den obersten, die Spitze des Embryosacks einnehmenden, die Keimbläschen einschliessenden Zellen findet keine Zelltheilung weiter statt. In den übrigen zunächst um Quertheilungen (F. 19); später erst, von der Zeit an, zu welcher das zum Embryonalschlauche verlängerte befruchtete Keimbläschen zwischen die in Vermehrung begriffenen Zellen des Endosperms einzudringen beginnt, auch Theilung durch zur Längsachse des Eyweisskörpers stark geneigt, endlich auch durch ihre parallele Wände (F. 21).

Diese Zelltheilungen, oberhalb der Mitte des Endosperms am öftersten sich wiederholend, wandeln dasselbe zu einem birnförmigen Zellkörper um (T. XIX, F. 3, 4), — bis an dessen dickste Stelle der Embryonalschlauch hinabdringt, hier durch eine Querwand dicht über seinem Ende sich theilt, und nach ein- oder zweimal wiederholter Quertheilung der Endzelle diese, durch Entstehung wechselnd von Längs-, Quer- und später auch schrägen Wänden, zum Embryokügelchen umbildet (T. XIX. F. 3, 5, 6, 7) *). Dabei tritt sehr deutlich hervor, dass das Embryokügelchen in allen Fällen zunächst aus vier in einer Horizontal-Ebene liegenden Zellen, von Form der Quadranten eines am oberen Ende gestutzten Ellipsoïds besteht (T. XIX. F. 3, 5, 6). Nach einer oder zweien Quertheilungen dieser vier Zellen beginnt die (nach unten gerichtete) Scheitelzelle einer der so entstandenen vier Längsreihen eine, die ihrer Nachbarzellen weit überwiegende Entwickelung, in Folge deren sie auf den Scheitelpunkt des Embryokügelchens rückt (T. XIX. F. 7), dessen Zelle ersten Grades sie fortan darstellt.

Die untere, ursprünglich grössere Hälfte des Embryosackes, wie auch die obersten, dessen Scheitelgegend ausfüllenden, aus den frühesten Theilungen der Urmutterzelle des Endosperms hervorgegangenen Zellen, in denen allen keine Zellentheilungen statt haben, entwickeln dafür umfangreiche Ausstülpungen ihrer Membranen; blinddarmähnliche Fortsätze, welche nach dem Anheftungspunkt des Eychens hin strebend, tief in dessen Gewebe zerstörend eindringen. Von der Seitenfläche des unteren, zellenleeren Endes des Embryosackes aus entwickelt sich ein solcher, meist sehr weiträumiger und langer, cylindrischer solcher Fortsatz (F. 19), der nicht selten, von seiner ursprünglichen Richtung (nach der Anheftungsstelle des jungen Samens) ablenkend, seitwärts aus dem Gewebe desselben hervorbricht**). Von den beiden obersten Zellen des Endosperms, deren eine das befruchtete Keimbläschen einschliesst, entwickelt in der Regel nur eine (T. XVIII. F. 14, 16, 23, T. XIX. F. 1), seltener beide (F. 19) eine derartige Ausstülpung; zunächst eine halbkugelige Auftreibung (F. 14) der Membran, die später sich zu einem schlauchförmigen Anhange umbildet (T. XIX. F. 3, 4). Sehr häufig geht

*) Vergleiche Flora 1851, S. 454.

**) Vergleiche Schleiden a. a. O.; Schacht, Entw.-Gesch. d. Pflanzenembryo. T. XVIII. F. 19, 20.

in diesen Ausstülpungen die Bildung transitorischer Zellenkerne und freier Zellen vor sich (T. XVIII. F. 19).

Die Membran des Embryosacks zeigt bisweilen ein etwas stärkeres Flächenwachsthum in der nächsten Umgebung der Ansatzfläche des befruchteten Keimbläschens, als auf dieser Fläche selbst. Es ereignet sich in Folge dieses Umstands, dass die Aussenseite der Ansatzstelle des Keimbläschens von einem flachen, mehr oder minder vollständigen Ringwulste umgeben erscheint (F. 21, 22), in dessen Mitte bisweilen die der oberen Endfläche des Keimbläschens angewachsene Embryosackhaut nach aussen sich wölbt (F. 22). Dies die Erscheinungen, in welchen Schacht früher*) den Beweis für die Abstammung des Embryonalschlauchs von ausserhalb des Embryosacks zu finden glaubte.

---

# VIII.

## Scrophularineen.

---

### Pedicularis sylvatica L.

Taf. XIV. T. XV. F. 1—7.

### Pedicularis comosa L.

Taf. XV. F. 8—11.

Die Entwickelung des Samens und des Embryo der Scrophularineen nicht allein, sondern auch der weiterhin zu erörternden Familien ihres weiten Verwandtschaftskreises stimmt in wesentlicheren Punkten so vollständig mit denen von Lathraea überein, dass eine kürzer gefasste Besprechung derselben genügen wird.

Das halbgekrümmte Ey von Pedicularis (T. XIV. F. 3) haftet mit dünnem Funiculus an der Placenta. Der Bau des Integuments gleicht dem von Lathraea, nur dass die Zellen des Parenchyms desselben mehr in die Länge gestreckt, und minder reich an Stärkemehlkörnern sind. Der vom Integument umschlossene Hohlraum ist der Krümmung des Eys entsprechend gebogen. In der Jugend des Eychens überragt er weit den auf seinem Grunde stehenden Eykern, welcher freigelegt als

---

*) Flora 1855, S. 148; das Mikroskop, II. Aufl. (Berlin 1855) S. 140.

eine gerade, keulenförmige Zellenmasse sich erweist, zusammengesetzt aus einer axilen, und einer einzigen peripherischen Zellschicht (T. XIV. F. 1). Die oberste der axilen Zellen, der junge Embryosack, ist bereits von bedeutendem Umfang, aber noch bedeckt von den Zellen der peripherischen Schicht, aus deren Anordnung und der verschiedenen Dicke der Wände derselben es leicht erkenntlich ist, dass die ursprünglich wenigen einzelnen Zellen derselben durch oft wiederholte Quertheilung mittelst auf den freien Aussenflächen senkrechter Wände sich beträchtlich vermehrt haben. — Etwas später durchbricht der Embryosack, plötzlich sich beträchtlich verlängernd, die seinen Scheitel deckenden Zellen der peripherischen Zellschicht des Eykerns, und wächst frei in den weiten Hohlraum hinein, welchen das Integument umschliesst (T. XIV. F. 2). Im oberen Ende des Sackes zeigen sich zu dieser Zeit zwei (selten drei) freie Zellkerne, eingebettet einer die Scheitelwölbung des Sacks ausfüllenden Anhäufung von Protoplasma. Diese Zellkerne sind es, um welche die Keimbläschen sich bilden werden.

In Embryosäcken, die frei präparirt wurden aus Eychen, entnommen geschlossenen Blüthenknospen mit geschlossener kaum gefärbter Corolle und geschlossenen Antheren, erscheinen die Keimbläschen als bauchige, mässig gestreckte Zellen mit sehr dünner aber fester Membran, welche mit kleiner Ansatzfläche der Scheitelwölbung der Embryosackhaut in verschiedener Höhe angeheftet, frei in dessen Raum herabhängen. Ihre Zahl überschreitet nur selten zwei (T. XIV. F. 4—7). Der Inhalt der Keimbläschen — ein Wandbeleg aus Protoplasma, in welchem, in der unteren Wölbung der Zelle, ein linsenförmiger Zellkern eingebettet ist — wird bei Freilegung des Embryosacks gewöhnlich ausgetrieben oder in seiner Anordnung zur Unkenntlichkeit gestört. An gelungenen Schnitten ist er leicht sichtbar*). Der Scheitelpunkt der Embryosackmembran, noch oberhalb der Ansatzflächen der Keimbläschen, ist häufig beträchtlich verdickt (T. XIV. F. 7). Im unteren Theile des langen Embryosackes, meist an der Stelle seines grössten Querdurchmessers, liegt dessen umfangreicher primärer Kern (T. XIV F. 3).

Schon 6 bis 10 Stunden nach künstlicher Bestäubung der Narbe sind Pollenschläuche bis zu den oberen Enden der Embryosäcke vorge-

*) Siehe meine Abbildung in Flora 1851, T. X. F. 2 (unten).

drungen. Ihr Verhalten hier stimmt im Wesentlichen mit denen der Lathraea völlig überein. Auch bei Pedicularis konnte in keinem Falle beobachtet werden, dass der Pollenschlauch genau auf die Aussenseite der Ansatzfläche des unteren, zur Entwickelung des Vorkeims und Embryos bestimmten Keimbläschens trifft. Am häufigsten legt er sich bloss dem Scheitel des Sackes an, und nur selten dringt er zwischen Integument und Aussenseite des Embryosackes weiter abwärts, als bis zur Gränze der Ansatzfläche des oberen Keimbläschens (T. XIV. F. 8. 10, 11, 13, 15, 17). Das Aufquellen der Innenfläche seiner Membran, seine Verwandlung in einen Cylinder aus das Licht gleichartig brechender Masse, ist weit seltener als bei Lathraea, und wo es eintritt auf die untere Extremität des Pollenschlauchs beschränkt (T. XIV. F. 13). In der Regel bleibt der Pollenschlauch ziemlich dünnwandig, sein Innenraum deutlich hohl, gefüllt mit schleimiger Flüssigkeit, in welcher kleine kugelige Körner schweben. Krümmungen und kurze, knotig anschwellende Verästelungen des Pollenschlauchendes sind häufig (T. XIV. F. 13—15, T. XV. F. 3, 5, 9); in einem Falle wurde eine beträchtliche Anschwellung des unteren Pollenschlauchendes beobachtet. In der Mitte der das geschwollene Ende füllenden Protoplasmamasse befand sich eine kugelige Vacuole (T. XIV. F. 9). Die Verbindung zwischen Pollenschlauch und Aussenfläche des Sackes ist noch lockerer als bei Lathraea; die unverletzte Lösung beider von einander ein bei der Freilegung des Sackes sehr gewöhnlich eintretender Fall, namentlich auf früheren Zuständen (T. XIV. F. 9, 11, 12, 14); bisweilen auch auf späteren (T. XV. F. 5). Auch hier, bei einer Grösse der Theile, welche die von Lathraea erheblich übertrifft, konnte nie eine Oeffnung, weder am Ende des Pollenschlauchs, noch am Scheitel des Embryosacks wahrgenommen werden. Auf der Aussenseite der Embryosackhaut, von welcher das Pollenschlauchende abgelöst ward, liess sich an manchen Präparaten eine beide verkittende Substanz erkennen; auf früheren Entwickelungsstufen von körnig-schleimiger Beschaffenheit (T. XIV. F. 11), auf späteren von glasähnlicher Durchsichtigkeit (T. XV. F. 5); anderwärts, in der Mehrzahl der Fälle, fehlte dieselbe spurlos.

Das untere Keimbläschen zeigt sehr bald nach Ankunft des Pollenschlauchs ein Wachsthum der Membran seines freien halbkugeligen Endes, welches sich zu einer zitzenförmigen Spitze verlängert (T. XIV. F. 8—16). Oft ist bei Beginn dieser Verlängerung der primäre Kern des

Keimbläschens noch vorhanden (T. XX. F. 11, 14), meistens indess bereits verschwunden. Die Verlängerung des vorgezogenen Endes schreitet rasch weiter vor; das Keimbläschen wird zu einer lang gestreckten Zelle, deren cylindrischer unterer Theil nach oben in die bauchige Form des Keimbläschens vor der Befruchtung übergeht (T. XX. F. 17, T. XXI. F. 1, 2, 4, 5, 9). Kaum irgendwo anders zeigt der Augenschein so deutlich, wie bei Pedicularis, die Identität des befruchteten Keimbläschens, des jungen Embryonalschlauches, mit dem unteren der unbefruchteten Keimbläschen. Das obere, sterile Keimbläschen erhält sich in der Regel währenddem lange unverändert (T. XX. F. 8, 10—14, 17, T. XXI. F. 1—3, 5, 9): — das frühe Verschwinden, zuerst seiner Membran (T. XX. F. 9), später auch der Reste seines Inhalts (T. XXI. F. 15, 16) ist Ausnahme.

Gleichzeitig mit dem Beginn des Spitzenwachsthums des befruchteten Keimbläschens tritt die Mutterzelle des Endosperms auf: eine Zelle von verhältnissmässig geringem Längsdurchmesser, welche den Embryosack dicht unterhalb der Stelle seiner grössten Dicke querüber ausfüllt. Ihre erste Theilung geschieht durch eine Längswand (T. XX. F. 8); beide Tochterzellen theilen sich zunächst durch Querwände (T. XXI. F. 3). Die Quertheilungen wiegen fernerhin vor; das Endosperm verwandelt sich in einen spindelförmigen Körper aus grossen, nahezu kubischen Zellen, mit sehr weichen, leicht zerfliessenden Wänden, die um eine axile Längsreihe geordnet sind (T. XXI. F. 6). Die Zellen der innersten, dem Endosperm angränzenden Schicht des Integuments schwellen dabei blasig an, füllen sich mit feinkörnigem Schleime, und erscheinen so einer, die Wand des Embryosackes einer Pflanze mit freier Endospermbildung auskleidenden ersten Schicht dieses Gewebes sehr ähnlich*). Während dieser Vorgänge hat sich das befruchtete Keimbläschen soweit verlängert, dass sein Ende das Gewebe des Endosperms erreichte und in dessen axile Zellreihe eindringt. Aus der Seitenfläche des oberen, zellenleeren Theils des Embryosacks ist ein blinddarmförmiger Ast hervorgesprosst, der in das Gewebe des Integuments, nach der Raphe hin eindringt. In diesem schlauchförmigen Zellenaste bildet sich das von

*) Das der Anlass zu einer irrigen Darstellung Schacht's (Entw.-Gesch. d. Pflanzenembryo T. XV. F. 3 und irrthümlichen Auffassung meiner selbst (Flora 1851, S. 453; T. X. F. 4). Schacht stellt jene Zellen als sphärisch und frei dar; ich sie als der Innenfläche des Integuments angesetzt.

Schacht entdeckte*), interessante System strahlig geordneter verästelter Querbalken aus Zellstoff, das bei Plantago in ganz ähnlicher Weise, bei Veronica in einer lehrreichen Modification sich wiederfindet. — Im oberen Drittheil des Eyweisskörpers angelangt, entwickelt der Embryonalschlauch, nach wiederholter Bildung von Querscheidewänden dicht oberhalb seines fortwachsenden Endes, aus seiner Endzelle das Embryokügelchen (T. XXI. F. 6, 7). Die Membran des Embryosacks zeigt währenddem in der nächsten Umgebung der Anheftungsstelle des Vorkeims ähnliche Wachsthumserscheinungen, wie oben (S. 610) bei Lathraea geschildert; — Formänderungen die, wie die bei jener Pflanze beobachteten, von den Vertheidigern der Schleiden'schen Embryobildungslehre als Beweismittel aufgegriffen worden sind: — Erörterungen auf die jetzt, nach allseitiger Erkenntniss der Irrthümer der Pollinisten zurückzukommen nicht mehr nöthig ist**).

Die ersten Theilungen der beim Beginn der Bildung des Embryokügelchens kugelig anschwellenden Endzelle des Vorkeims geschehen durch verticale Wände. Die Endzelle theilt sich durch eine Längswand, beide Tochterzellen darauf aufs Neue durch Längswände, welche zu der zuvor entstandenen rechtwinklig sind. Die Anlage des Embryokügelchens besteht aus vier Zellen von Form am oberen Ende gestutzter Quadranten eines Ellipsoïds (T. XXI. F. 6 *b*). Nur in einer dieser vier Zellen findet dauernde Zellenvermehrung statt. Sie theilt sich durch eine nach aussen geneigte Wand. In der dem Scheitel der Embryo-Anlage nächsten neu gebildeten Zelle (der Zelle ersten Grades des Embryo) erneuert sich, stetig wiederholt, die Theilung durch nach verschiedenen Richtungen geneigte Wände. Die anderen drei jener vier Zellen werden durch die Zunahme des Umfanges des Complexes von Tochterzellen der vierten mehr und mehr zur Seite geschoben. Jene Zelle ersten Grades nimmt immer ausgeprägter den Scheitelpunkt der Embryo-Anlage ein (T. XXI. F. 7). Es ist der nämliche Vorgang, wie er allerwärts hervortritt, wo der Vorkeim eine einfache Reihe von Zellen ist, aus deren Endzelle das Embryokügelchen hervorgeht (um nur einige Beispiele ausser den Scrophularineen und den ihnen nächst verwandten Familien

*) Beiträge zur Anatomie, Berlin 1854, S. 259.

**) Vergleiche Schacht in Flora 1855, S. 154, und das Mikroskop, 2. Aufl. S. 141 und Entgegnungen von mir in Flora 1855, S. 262; ferner Tulasne in Ann. sc. nat. IV. Série, Bot. T. IV. p. 109, und Radlkofer, Befruchtung der Phanerogamen, S. 25.

zu nennen, Ranunculaceen, Caryophyllaceen, Aenthereen, Compositen, Solanaceen, Cyperaceen, Orchideen). Unverkennbar, dass die dem ersten Blick so auffällige Erscheinung der Entwickelung der Endzelle nur einer der vier Längsreihen von Zellen des Vorkeims von Loranthus europaeus (S. 543) nur eine Steigerung des nämlichen Verhältnisses ist; zugleich eine Art von Uebergang zu der Entwickelungsweise der Coniferen, bei denen jede der parallelen Längsreihen von Zellen des Vorkeims die Anlage eines Embryo hervorzubringen wenigstens vermag.

### Mazus rugosus Lour.

Taf. XXI. F. 14—16.

Der unbefruchtete Embryosack dieses Pflänzchens ist nur mässig gestreckt; fast eyförmig, das Mikropyle-Ende desselben rasch verjüngt. Die zwei Keimbläschen haften hier in verschiedener Höhe, das obere der Scheitelwölbung ausfüllend, mit sehr breiten Ansatzflächen. Unmittelbar nach Ankunft des Pollenschlauchs an der Aussenfläche des Embryosacks theilt sich derselbe durch eine Querwand in zwei ungleiche Hälften. Die kleinere untere (welche die, nicht immer und wenn, nur einzählig vorhandene) Gegenfüsslerzelle der Keimbläschen einschliesst (F. 15), vermehrt sich nicht durch weitere Zellentheilung, wächst aber späterhin zu beträchtlicher, die obere vom Endosperm ausgefüllte Hälfte des Embryosacks weit übertreffender Länge heran (F. 16). — Die obere, die Keimbläschen einschliessende Theilhälfte des Sackes wird zunächst nochmals durch eine Querwand, beide Tochterzellen darauf wiederholt durch Längswände getheilt (F. 14). Das junge Endosperm besteht jetzt aus vier Längsreihen von je zwei Zellen. In der Innenkante einer der Zellen des oberen Doppelpaares wächst das untere, befruchtete Keimbläschen herab, zu einem kurzen Embryonalschlauche sich entwickelnd (F. 14, 15). Das obere, unbefruchtet gebliebene, verschwindet bald früher (F. 14), bald später (F. 15). Das Pollenschlauchende haftet währenddem nur lose an der Aussenfläche des Sackes, von der es bei dessen Freilegung fast ausnahmslos sich zu trennen pflegt.

Nur in dem unteren Doppelpaar von Zellen des jungen Endosperms findet fernere Zelltheilung statt; zunächst sehr vorwiegend durch zur Längsachse des Sackes rechtwinklige Wände (F. 15, 16). Während das Ende des Embryonalschlauchs gegen die Mittelgegend des an Umfang

zunehmenden Endosperms vordringt, wachsen die vier Endospermzellen, welche den Scheitel des Embryosacks ausfüllen, zu ziemlich langen, tief in das Gewebe des dicken Integuments dringenden Ausstülpungen aus (F. 16); nicht ganz gleichzeitig; eine eilt den andern voraus (F. 15).

### Rhinanthus minor und hirsutus L.

Taf. XXII. F. 1—5.

Auch der Embryosack von Rhinanthus ist im Vergleich mit dem von Pedicularis von nur mässiger Länge, im übrigen jenem in allen Stücken ähnlich, nur dass der primäre Kern dem Keimbläschen sehr nahe zu liegen pflegt (F. 1, 4). Ganz wie bei Mazus theilt sich der Embryosack, gleich nach Ankunft des Pollenschlauchs, durch eine Querwand in zwei Hälften, deren untere von Anfang an grössere zwar an Umfang noch zunimmt (F. 3, 5), aber zellenleer bleibt (nur ausnahmsweise kommt die Bildung weniger bald wieder verschwindender Zellenkerne in ihr vor; F. 3). Die obere Hälfte des Sackes dagegen wird durch eine Reihe rasch einander folgender Theilungen zu einem aus vier Längsreihen von Zellen zusammen gesetzten Körper.

Das obere Keimbläschen verschwindet früh. Das untere — sein Verhältniss zum Pollenschlauchende wie bei Pedicularis — entwickelt sich langsam zum, im Vergleich mit Pedicularis, Euphrasia, Veronica, sehr kurzen Embryonalschlauche. Während dieser gegen die Mittelregion des Eyweisskörpers hin vordringt, bilden sich auf den vier obersten, den Scheitel des Embryosacks ausfüllenden Zellen des Endosperms kurze, krause Ausstülpungen der Wand desselben; anfangs nur einige wenige (F. 5), dann rasch mehr (F. 2), endlich ein ganzer, den inzwischen sehr verbreiterten Scheitel des Sackes bedeckender Wald davon (F. 3). — An der unteren Gränze der von diesen Auswüchsen bedeckten Gegend sprosst aus der Seitenwand des Embryosacks gegen die Raphe hin nur umfangreiche Aussackung hervor (Fragment derselben F. 3 bei *a**).

---

*) Vergleiche hierüber, und über allgemeine Form des Eychens, auch Schacht (in Entwickelungsgesch. d. Pflanzenembryon, Amsterdam 1850, T. 16) der auch hier, wie bei allen diesen seinen früheren Untersuchungen die Beobachtung der freigelegten Embryosackspitze unterliess, und so jene sehr in die Augen fallenden krausen Auswüchse völlig übersah.

## Melampyrum nemorosum L.

Taf. XXIII. F. 1—6.

Gleich dem Melampyrum pratense*) zeigt auch die in der Ueberschrift genannte Art im nämlichen Fruchtknoten Eychen von zweierlei Richtung: halbgekrümmte deren Mikropyle dem Dissepiment des Germen zugekehrt ist (diese sind die höher stehenden) und stärker gebogene, deren Eymund der Wand des Fruchtknotens sich zuwendet. Bei beiden Formen ist der freie Theil des Funiculus von einer Länge, welcher der des übrigen Theiles des Eyes gleichkommt (F. 1); bei beiden beschränkt sich Krümmung und Beugung des Eys auf Funiculus und Chalazaregion; der Eykern ist streng gerade, ebenso der Mikropylekanal und der Embryosack auf allen Stufen seiner Entwickelung (F. 1, 2); — eine bedeutende Abweichung vom Bau der Eychen anderer Scrophularineen.

In Eychen aus eben aufbrechenden Blüthen ist der Embryosack kurz eyförmig, mit plötzlich verjüngtem Grunde. Nur dieser letztere Theil ist von der peripherischen Zellschicht des Eykerns umhüllt; der übrige, bei weitem grössere Theil des Sackes berührt unmittelbar die Innenfläche des dicken Integuments (F. 1). Der Keimbläschen sind in der Regel zwei, das untere stärker entwickelt; Gegenfüsslerzellen derselben nur eine (F. 2).

Nachdem das Pollenschlauchende bis zur Aussenseite der Embryosackspitze vordrang, verbreitert sich diese, schon vorher von nicht eben schlanker Form, noch beträchtlich, so dass das obere Ende des Embryosacks eine ebene Fläche darstellt (F. 3). Gleichzeitig entsteht im Embryosacke, nur wenig unterhalb der freien unteren Enden der Keimbläschen, eine Querwand, welche den Sack in eine sehr grosse untere und kleine obere Hälfte theilt. Die erstere bleibt zellenleer; die letztere verwandelt sich durch Quer- und Längstheilungen in einen, zunächst nur weinzelligen Körper (F. 4), das Endosperm. Die obersten, den Scheitel de Embryosacks einnehmenden Zellen desselben, vier bis fünf an der Zahl, deren eine das befruchtete Keimbläschen einschliesst, vermehren auch bei Melampyrum sich nicht durch fernere Theilungen.

*) Vergl. Tulasne in Ann. sc. nat. III. Sér. T. XII. (1849) p. 46; Tf. 4 F. 8—15

Dafür treiben sie, wie bei Rhinanthus, Lathraea u. A., Auswüchse in das Gewebe des Integuments. Diese Auswüchse sind aber hier von sehr ungewöhnlicher Form. Es erhebt sich die Membran der flachen Scheitelgegend des Embryosacks wallförmig im Umkreise der Anheftungsstelle der Keimbläschen, nach oben hin sich ausstülpend. Zunächst einseitig (F. 3), aber bald immer weiter im Kreise vorschreitend, und weit aufwärts in das Gewebe des Integuments dringend. Dieses Gewebe besteht, in der nächsten Umgebung des Mikropylekanals, aus einer cylindrischen Schicht gestreckter, gegen den Mikropylekanal einwärts geneigter Zellen (F. 3, 4), deren feste Wände nach erfolgter Befruchtung sich verdicken und gelbe Farbe annehmen; — weiter hin aus lockerer verbundenen, polyedrischen Zellen, mit dünneren, weicheren Wänden. Diese werden von der nach aufwärts wachsenden Ausstülpung des Embryosackscheitels verdrängt, und verflüssigt. Die cylindrische Zellschicht der Wand des vom Pollenschlauch durchzogenen Mikropylekanales dagegen erhält sich. Ihr legt sich die Ausstülpung des Embryosackes zuvörderst einseitig dicht an (F. 3), umfasst sie dann mehr und mehr, je mehr ihre Form der eines Ringwalls sich nähert (F. 4), und schliesst sie endlich fast vollständig ein (F. 5). Das Letztere geschieht erst, nachdem das zum kurzen Embryonalschlauche entwickelte Keimbläschen in das, inzwischen zu sehr beträchtlicherem Umfange entwickelte Endosperm weit vorgedrungen ist, wo dann, nachdem der Embryonalschlauch durch wiederholte Scheidewandbildung dicht über seinem unteren Ende zu einem, aus einer einfachen Reihe von 6 bis 8 Zellen bestehenden Vorkeim mit langer Trägerzelle sich umbildete, die Endzelle desselben zum Embryokügelchen anschwillt (F. 5, 5 *b*). Inzwischen haben aus den obersten Zellen des Endosperms auch seitliche Ausstülpungen sich entwickelt: aus jeder der vier bis fünf Zellen eine umfangreichere, von nur mässiger Länge, an der Spitze wiederholt verästelt; und unregelmässig vertheilt einige kleinere (F. 5 *b* Seitenansicht, F. 6 Ansicht von unten, nach Abtrennung von der Hauptmasse des Endosperms). Das Zellgewebe des Endosperms, welches zuvor der zellenleeren Hälfte des Embryosacks mit völlig ebener Fläche angränzte (F. 4), wird unterdess, während der bedeutenden Zunahme seiner Masse, an der unteren Fläche stark concav (F. 5); — zum kleinen Theil nur durch Vermehrung, hauptsächlich durch starke Dehnung der Zellen seines Randes. — In die halbkugelige, später sogar parabolische Höhlung

ragt der nur von klarer Flüssigkeit (die gegen die Samenreife hin vertrocknet) erfüllte weite Raum der unteren Embryosackhälfte tief hinein, seitlich umhüllt von nur einer einfachen Lage von Endospermzellen, deren unterste, den Saum des Randes des Endospermgewebes darstellende die grössten sind (F. 5).

## Veronica Buxbaumii; hederaefolia; triphyllos L.

T. XXII. F. 6—15.

Der Embryosack der hemitropen Eychen von Veronica Buxbaumii zeigt schon frühe, zu einer Zeit wo das knospende Perigon noch farblos, eine Anschwellung des Mikropyle-Endes, in dessen Scheitelwölbung die zwei, jetzt noch ziemlich kugeligen Keimbläschen haften (F. 5). An der Stelle, wo der Sack sich verengt, liegt der abgeplattete primäre Kern desselben der Seitenwand an; strahlige Stränge körnigen Schleims gehen von ihm aus durch den mit wässeriger Flüssigkeit erfüllten Innenraum des Sackes. Gegen die Blüthenzeit hin nähert sich die Anschwellung des oberen Endes des Sackes mehr und mehr der Kugelform. In seinem Innern, besonders in der Nähe des Kernes, erscheinen zahlreiche Amylumkörnchen. Die Keimbläschen werden gestreckter. Endlich, kurz vor dem Verstäuben des Pollens, schwillt auch das untere Ende des Sackes beträchtlich an (F. 6, 7). Bei den anderen oben genannten Arten der Gattung sind diese beiden Erweiterungen des Sackes minder scharf ausgeprägt.

Das Pollenschlauchende erreicht die Aussenfläche des Embryosackscheitels gleichzeitig mit dem Abfallen der Corolle. Sofort nehmen die Anschwellungen des Embryosacks an Umfang beträchtlich zu, besonders die untere. In der Mittelgegend des Sackes entsteht gleichzeitig (ohne Zweifel durch zweimalige Bildung von Querwänden) die Mutterzelle des Endosperms (F. 12), bei V. Buxbaumii in einer jetzt erst hier gebildeten Erweiterung des sehr engen Sackes gelegen (F. 8, 9); einer Erweiterung, deren Entstehung sichtlich eine stärkere Wölbung (Folge localer Zellvermehrung) und ein durch sie bedingtes Auseinanderweichen der Innenwände des Integuments vorausgeht: — man findet bisweilen, dass die mittlere Anschwellung des Embryosacks, mit der von ihr eingeschlossenen, bereits in Tochterzellen getheilten Anfangszelle des Endosperms die örtliche Erweiterung des Hohlraums im Integumente nicht

völlig ausfüllt (F. 9). Die ersten Theilungen der Mutterzelle des Endosperms geschehen durch Querwände, denen Längswände bald folgen (F. 8, 9, 13). Während derselben verschrumpft und verschwindet das obere Keimbläschen (F. 12); das untere (von dessen eng umschriebener Ansatzfläche das Pollenschlauchende stets eine Strecke, oft eine sehr bedeutende, entfernt bleibt,) verlängert sich zum Embryonalschlauche und wächst zum Endosperm herab (F. 8, 9, 12, 13), zwischen dessen, inzwischen zahlreicher gewordene Zellen das freie Ende des Embryonalschlauchs eindringt (F. 10, 14); um, in der Mitte des Endosperms angelangt, nach wiederholter Bildung von Querwänden über seinem Ende die Endzelle zum Embryokügelchen umzubilden (F. 10, 11).

Die obere und untere Anschwellung des Embryosacks nehmen währedd dieser Vorgänge noch an Umfang zu; bei V. Buxbaumii und triphyllos ziemlich gleichmässig allseitig, ihre Form nur wenig ändernd; bei V. hederaefolia dagegen einseitig, nach der Raphe hin (F. 12, 13), ähnlich wie bei Lathraea squamaria. Die untere Anschwellung bleibt völlig zellenleer, soweit die Beobachtung reicht; nur dass in einzelnen Fällen ein Zellkern in ihr auftritt, von welchem Fäden körnigen Schleimes ausstrahlen (F. 8). In der oberen dagegen erfolgt häufig die Bildung freier Zellenkerne und selbst Zellen (F. 8, 9, 11), die aber wieder vergehen, ohne zu bleibendem Gewebe sich zu vereinigen. Nur bei Veronica triphyllos sah ich die Erweiterung in der Regel durch eine Längswand in zwei Zellen getheilt. Der Embryonalschlauch erschien dieser Scheidewand dicht angeschmiegt (F. 14; F. 15 ist ein ähnliches Präparat, um 90° gedreht gesehen, wo diese Scheidewand, parallel der Ebene des Objectträgers gelegen, nicht sichtbar wird).

Auf späteren Entwickelungsstufen, nach Anlegung des Embryokügelchens, erscheint die obere Anschwellung des Embryosacks von Veronica triphyllos durchsetzt von einem vielfach verästelten Flechtwerk aus ungleich dicken, nach allen Richtungen strahlenden Strängen zäher Gallerte (F. 14 *b*, *c*), die durch Quetschung sich breit drücken lassen. Die Substanz derselben bricht das Licht nur wenig stärker, als die Flüssigkeit in den kleinen isodiametrischen Hohlräumen zwischen ihnen. Die Gallerte ist gegen die kurz dauernde Einwirkung selbst concentrirter Lösung von Salzen und Alkalien, sowie von Mineralsäuren sehr unempfindlich. Die Erscheinung ist offenbar den Zellstoffbalken in der Aussackung des Embryosacks von Pedicularis analog. Bei monatelangem Liegen der

Präparate in concentrirter Glycerinlösung löset sich dieses System von Gallertsträngen stellenweise von der Wand des Embryosackes ab, und zieht sich auf kleineren Raum zusammen (F. 15 *b*). In älteren, der Reife nahen Samen sind die Stränge dagegen völlig starr, und mit der Embryosackhaut fest verbunden.

In Betreff der ferneren Entwickelung des Samens, namentlich der Verdrängung des Gewebes des Integuments durch das Endosperm, verweise ich auf die Mittheilungen Tulasne's*).

---

## IX.

### Acanthaceen.

#### Acanthus spinosus.

Taf. XXIII. F. 8, 9.

Das dicke Integument des Eys von Acanthus**) umschliesst einen spitzwinklig gekrümmten schlanken Eykern; die Raphe dagegen ist völlig gerade (F. 8). Der Embryosack verdrängt früh die ganze Substanz des Kerns. Zur Blüthezeit ist er fadenförmig cylindrisch, am Chalaza-Ende schwach angeschwollen. In dieser Anschwellung bildet sich nach dem Antreten des Pollenschlauchs ans Mikropyle-Ende Endosperm, zu welchem von diesem Ende des Sackes her der ungemein lange Embryonalschlauch herabsteigt, rasch bis in die Mitte des Endosperms vordringend. Vom oberen Ende des Embryosackes aus entwickelt sich gegen die Raphe hin eine seitliche Ausstülpung, von nur mässigem Umfange (F. 8). Das Endosperm erlangt im halb reifen Samen ein beträchtliches Volumen, wird aber gegen die Samenreife hin vom schnell heranwachsenden Embryo wieder verdrängt.

*) Ann. sc. nat. III. Sér. T. XII. p. 17 ff.

**) Vergleiche auch Planchon in Ann. sc. nat. III. S. T. IX. p. 72.

# X.

## Plantagineen.

### Plantago lanceolata L.*)

Taf. XXV. F. 8—13.

Form und Bau des Eychens des Wegbreits zeigen mehrere auffallende Aehnlichkeiten mit denen der Acanthaceen. Das aufrechte schildförmige Ey, von einem einzigen sehr dicken Integument (dessen Gewebe wie bei Acanthus, durch und durch gleichartig, weich, von weisser Farbe ist) ist umgewendet, sein Kern und Mikropylekanal in einem Bogen von beiläufig 50° gekrümmt (F. 8). Die sehr bedeutende Entwickelung der Seite des Integuments, welche der Raphe abgewendet ist, in der Umgebung der Mikropyle lässt das Ey bei oberflächlicher Betrachtung nur halbgewendet erscheinen. Geraume Zeit vor dem Aufblühen hat der Embryosack die übrigen Zellen des Eykerns völlig verdrängt; er allein erfüllt den vom Integument umschlossenen verhältnissmässig kleinen Hohlraum. Bei im Allgemeinen schlank kegeliger Gestalt zeigt er eine beträchtliche Ausbauchung an der der Raphe abgewendeten Seite; die Ansicht seines Längsdurchschnitts ist nahezu dreieckig (F. 8 *b*). Die Keimbläschen, zwei an der Zahl, haften im Mikropyle-Ende des Sacks der Innenwand desselben in verschiedener Höhe an. Der primäre Kern des Sackes liegt in der Mittelgegend des Sackes innerhalb derselben die Innenwand auskleidenden Protoplasmaschicht. Von Gegenfüsslerzellen der Keimbläschen ist nur eine vorhanden (F. 8 *b*).

---

*) Die Schildform der Eychen von Plantago macht die Herstellung feiner Durchschnitte senkrecht auf den grössten Querdurchmesser im höchsten Grade schwierig, wenn man nach der gewohnten Methode verfährt, das einzelne Eychen zwischen Daumen und Zeigefinger der linken Hand zu fassen. Plantago lanceolata ist deshalb die der Untersuchung am bequemsten sich darbietende Art der Gattung, weil hier die Eychen, nur eines in jedem Fruchtknotenfache, von bestimmter, äusserlich am Fruchtknoten erkennbarer Lage sind. Fertigt man Durchschnitte durch den ganzen Fruchtknoten, indem man das Messer parallel einer durch die Mittellinie beider Fächer gelegten Ebene führt, so hält es nicht allzu schwer, klare Bilder zu erlangen.

Nach der Ankunft des Pollenschlauchendes an der Aussenfläche des Embryosackscheitels, welche sehr bald nach Bestäubung der Narben erfolgt, wird der Embryosack, nach Verschwinden seines primären Kerns, durch eine Querwand, dicht oberhalb jener der Raphe abgewendeten Ausweitung in zwei Tochterzellen getheilt. Dieser Theilung folgt sehr bald eine neue Theilung derjenigen beider Tochterzellen, welche das Mikropyle-Ende des Embryosackes ausfüllt, durch eine auf der vorher entstandenen rechtwinklige, in Beziehung auf das gebogene mikropylare Ende des Sackes ebenfalls quere Wand (F. 9). Gleichzeitig nimmt die Ausweitung des Sackes an Umfang noch zu.

Von den beiden Tochterzellen des Embryosacks, welche dessen Mikropyle- und Chalaza-Ende ausfüllen, vermehrt fortan die Erstere sich nur durch einige wenige Theilungen, die letztere gar nicht, sie bleibt bis zur Samenreife zellenleer. Die mittlere der Tochterzellen dagegen, diejenige welche jene der Raphe abgewendete Ausweitung ausfüllt, verhält sich als Mutterzelle der Hauptmasse des Endosperms. Durch eine Reihe einander rasch folgender Zweitheilungen, während deren in ihrer die Keimbläschen einschliessenden Schwesterzelle nur noch eine Längs- und Quertheilung zu erfolgen pflegt, verwandelt sich jene in einen umfangreichen Zellenkörper (F. 10, 11), der zunächst vorzugsweise in die Dicke; in zum Längsdurchmesser und zum grössten Querdurchmesser des Eyes rechtwinkliger Richtung wächst (F. 12). Das junge Endosperm erscheint als ein abgeplattetes Ellipsoïd, dessen kleine Achse mit der Längsachse des Eys zusammenfällt.

Das untere Keimbläschen ist inzwischen zu einem Embryonalschlauche von mässiger Länge ausgewachsen, der bis etwas unter den Mittelpunkt des Eyweisskörpers herabsteigt, und hier durch eine sehr nahe über dem stumpfen Ende entstehende Querwand sich theilt (F. 10, 11). Die halbkugelige Endzelle theilt sich noch einigemale durch Querwände; die Schlusszelle der kurzen Reihe wird durch fortgesetzte, nach allen Richtungen hin erfolgende Zweitheilungen zum Embryokügelchen.

Jetzt ändert sich die Richtung der grössten Lebhaftigkeit der Zellvermehrung und des Wachsthums des Endosperms. Dasselbe nimmt fortan in Richtung der Länge und Breite des Eys rasch an Umfang zu, die Zellen des Integuments bis auf die äusserste Zellenlage desselben verdrängend und verflüssigend. Noch ehe am Embryokügelchen die Anlagen der Kotyledonen sichtbar werden, hat das Endosperm, nur von

einer dünneren Lage von Zellen überzogen, die Löffelform des reifen Samens (F. 13). — Die Membran, welche — als Rest des Integuments — das Endosperm umkleidet, besteht zu äusserst aus der Epidermis desselben, unter welchem eine dünne, bei der Samenreife tief gebräunte, Schicht von schwer zu entzifferndem Baue liegt: die bis zum Verschwinden des Inhaltsraumes zusammen gepressten, etwas verdickten Wände einer grossen Anzahl von Zellen des Integuments*).

Schon beim Beginn dieser Entwickelung des Endosperms in Länge und Breite sprossen aus den, dem Embryosackscheitel nächsten, nicht mit assimilirten Stoffen sich füllenden Tochterzellen der oberen der ersten drei Zellen in welche der Embryosack sich theilte, blinddarmförmige Auswüchse hervor (F. 12), deren eine aufwärts, die andere abwärts in das der Placenta angewachsene Gewebe des Integuments dringt; oft wunderlich gekrümmt (F. 12, 13). In diesen im Allgemeinen cylindrischen Ausstülpungen entsteht, noch vor dem Sichtbarwerden der Kotyledonen am Embryo, ein Netzwerk vielverästelter Querbalken aus Zellhautstoff, von dem bei Pedicularis sylvatica vorkommenden nur durch grössere Dünne der Balken verschieden.

## XI.

## Labiaten.

### Lamium purpureum und maculatum L.; Prostanthera violacea.

Taf. XXIV.

Stellung und wesentlichste Züge des inneren Baues der Eychen sind bei allen untersuchten Gattungen der grossen Familie in Uebereinstimmung. Die Eychen stehen einzeln an den eingeschlagenen Rändern der zwei Carpelle, welche den Fruchtknoten zusammensetzen; zwei Eychen also in jedem der beiden Fächer desselben. Jedes Fach ist durch eine falsche Scheidewand getheilt, der Fruchtknoten scheinbar vierfä-

*) Vergleiche meine Darstellung des Baues dieser Schicht bei Plantago Psyllium in Berichten K. Sächs. Ges. d. Wiss.: Math. phys. Cl. 1858.

cherig (F. 17).*) Die Eychen sind aufrecht, mehr oder minder gewendet und gekrümmt; dabei auch seitwärts abgelenkt. Eine durch den Eykern und den Mikropylekanal gelegte Ebene macht mit dem Spalt zwischen den Carpellen einen Winkel von etwa 45°. — Das einzige, sehr dicke Integument überzieht einen aus wenigen Zellen zusammengesetzten Eykern, aus welchem schon sehr früh der Embryosack hervor bricht, der im Laufe seiner Entwickelung die Zellen der Rindenschicht des Eykerns bis zum Verschwinden zusammendrückt.

Untergeordneter Formenverschiedenheiten zeigen die Eychen verschiedener Gattungen eine lange Reihe, als deren Endpunkte die in der Ueberschrift genannten Gattungen betrachtet werden können. Das Eychen von Lamium erhebt sich, auf verhältnissmässig schlankem, freiem Theile seines Funiculus vollständig über seine Anheftungsstelle; das Ey ist nicht gebogen, nur der Eykern gekrümmt; die Raphe ist völlig gerade (F. 1, 15). Aehnlich verhalten sich Galeopsis, Stachys, Dracocephalum**). Bei Prostanthera dagegen ist das Ey im Halbkreise nach abwärts gebogen; — eine Krümmung die so gut wie ausschliesslich von der Raphe beschrieben wird. Der Embryosack ist fast gerade (F. 15). Eine Mittelform zwischen beiden stellt Ajuga dar (F. 20). Die Aussenfläche des Eychens von Lamium purpureum trägt nicht selten Haare: eine Zellenreihe mit stark angeschwollener Endzelle (F. 1, 1 *b*); ein nirgend anderswo bemerktes Vorkommen.

Aehnliche Mannichfaltigkeit waltet ob in der Form der Embryosäcke. Der von Prostanthera hat die keulige Gestalt, wie sie der grossen Mehrzahl der Phanerogamen eigen ist (F. 16). Der von Ajuga ist gegen das Mikropyle-Ende hin kugelig angeschwollen (F. 20). Zwei solcher Anschwellungen, die eine am Mikropyle-Ende, die andere (oft von sehr beträchtlichem Umfange) an der Stelle der starken, spitzwinkligen Beugung des Sackes zeigt der von Lamium (F. 3, 8, 9, 12, 13) und verwandten Gattungen***); daneben auch häufig, nicht regelmässig, noch vor dem Eintritt der Befruchtung, kurze Ausstülpungen veränderlichen Ortes und Umfangs; — grössere nahe am Chalaza-Ende (F. 3); kleinere,

*) Vergleiche über diesen Gegenstand Schleiden, Grundz. II. Aufl. Bd. II. S. 310 Payer, Organogr. T. 114. F. 14—18, 22.

**) Vergleiche Tulasne in Ann. sc. nat. IV. S. T. 4, Tf. 7 u. ff.

***) Tulasne a. a. O.

der Aussenwand des Embryosacks dicht angedrückt, mit körnigem Protoplasma völlig erfüllt, an der oberen Ausweitung des Embryosackes (F. 3, 5)*).

Im Mikropyle-Ende des Embryosackes haften die Keimbläschen: zarte Zellen mit leichtzerfliessender Wand; bei Lamium (wo nie mehr als zwei beobachtet wurden, F. 2, 3, 12, 13) und bei Ajuga (F. 20) nur wenig gestreckt; bei Prostanthera (F. 16) mehr in die Länge gezogen. Der Kern des Embryosacks liegt bei den letztgenannten nahe unter den Keimbläschen; bei Lamium ihnen fern, an der Stelle der Umbiegung des Embryosacks (F. 3, 12, 13); — in allen Fällen der Wand des Sackes angeschmiegt und der Mittelpunkt mehr oder weniger zahlreicher Stränge körnigen Schleimes. Gegenfüsslerzellen der Keimbläschen fehlen entweder oder sind nur in Einzahl vorhanden (F. 9, 12, 16).

Der Pollenschlauch erreicht das Mikropyle-Ende des Embryosacks von Lamium purpureum und maculatum noch während der Frische der Corolle. Die Wand des Pollenschlauchs erscheint gleich bei seiner Ankunft hier stark verdickt; der Inhalt auf einen sehr engen cylindrischen Raum zusammengedrängt (F. 4—9). Das eine der Keimbläschen — das der Raphe nähere, dem Scheitelpunkt des Embryosackes fernere, streckt sich sofort in die Länge, meist indem es seine Spitze zitzenförmig verlängert (F. 5, 7), während das andere mehr oder weniger rasch zu einem Ballen grumöser Substanz zusammensinkt (F. 4, 7), und endlich verflüssigt wird. Durch schnell weiter fortschreitende Verlängerung des unteren Endes wird das befruchtete Keimbläschen zum Embryonalschlauche umgebildet. Diesem Längenwachsthum geht aber häufig (keineswegs immer) die Bildung einer Querwand im befruchteten Keimbläschen, dicht über dem unteren Ende, voraus (F. 4, 5). Beide Tochterzellen, die an festem Inhalt ärmere obere, wie die inhaltreichere untere, enthalten Zellkerne. In dem noch ungetheilten, aber bereits etwas gestreckten Keimbläschen wurden in einem Falle zwei Kerne beobachtet (F. 7). Diese frühe Quertheilung des befruchteten Keimbläschens von Lamium purpureum ist der einzige derartige Fall, der bei den Pflanzen mit ursprünglich einzelligem Endosperm und sehr gestrecktem Embryonalschlauch bekannt geworden ist.

*) An frei gelegten Embryosäcken, etwas von der Aussenfläche des Embryosacks weg gebogen dargestellt von Tulasne a. a. O. T. 10 F. 8 u. anderwärts.

Die Querwand einzelner befruchteter Kiembläschen bietet einen festen Punkt, dessen Dasein die Constatirung der Thatsache erlaubt, dass der Embryonalschlauch sich nicht nur durch Wachsthum an der Spitze, sondern auch durch Streckung älterer Theile verlängert. (Die Vergleichung der bei der nämlichen Vergrösserung gezeichneten Figuren 7 und 10 zeigt, dass die oberste Zelle des Embryoträgers nach ihrer Abscheidung von der nächstunteren cylindrischen Zelle noch beträchtlich in die Länge gewachsen ist.) Sehr bald nach Ankunft des Pollenschlauchs am oberen Ende des Sackes hat sich in der Erweiterung an der Beugungsstelle desselben die erste Zelle des Endosperms gebildet: von beträchtlicher Grösse, die Mittelgegend des Sackes völlig ausfüllend, einen grossen, kugeligen Kern einschliessend (F. 4). Das Endosperm ist durch wiederholte Zweitheilung etwa achtzellig geworden, wenn das untere Ende des Vorkeims bei ihm anlangt und zwischen seine Zellen eindringt (F. 8). Hier schwillt es sofort in die Breite an. Nach wiederholter Querwandbildung über dem stumpfen Ende geht aus der Terminalzelle das Embryokügelchen hervor (F. 9). Erst jetzt wird die Zellvermehrung im Endosperm lebhafter. Dieses Gewebe, bisher nur eine dünne Hülle um das Embryokügelchen darstellend (F. 9), wächst rasch an Masse, besonders oberhalb des Embryo (F. 10, 11, 15), von welchem es indess gegen die Samenreife hin grossentheils verdrängt und aufgezehrt wird.

Die obere Ausweitung des Embryosacks nimmt nach der Befruchtung noch beträchtlich an Umfang zu, vorwiegend in der Richtung von der Raphe abwärts (F. 9, 14, 15). In dieser Anschwellung des Sackes treten freie Zellkerne auf, oft schon sehr früh; diese ersten dann von beträchtlicher Grösse (F. 4, 7). Auf späteren Zuständen werden nur kleinere Kerne gefunden (F. 8, 9). Die Bildung geschlossenen Gewebes in der oberen Erweiterung des Sackes wurde nie beobachtet.

Die zahlreichen und genauen Untersuchungen befruchteter Eychen von Labiaten, welche wir T u l a s n e verdanken*), zeigen eine im Wesentlichen vollständige Uebereinstimmung des Entwickelungsganges der

*) Ann. sc. nat. IV. Série T. IV. p. 66 ff.; F. 7—10. — Dass Tulasne auch bei diesen neueren Untersuchungen vom Dasein der Keimbläschen vor der Befruchtung sich nicht zu überzeugen vermocht, messe ich auch hier seiner Untersuchungsmethode bei: der a u s s c h l i e s s l i c h e n Anwendung der Zergliederung, der Unterlassung des Anfertigens von Durchschnitten.

untersuchten Arten mit dem geschilderten des Lamium purpureum. Auffallende Abweichungen finden sich nur in der Form der Anhängsel der Embryosäcke (colossale einseitige Anschwellung der oberen Ausweitung an der der Raphe abgewandten Fläche bei Thymus Acynos L. und Dracocephalum peltatum, verbunden bei letzterem mit blinddarmähnlichen Ausstülpungen des unteren zellenleeren Endes des Sackes; — Doppelgabelung des seitlichen Auswuchses der oberen Erweiterung des Sackes bei Betonica officinalis; während Stachys sylvatica und Galeopsis Ladanum mit Lamium völlig übereinstimmen *). Um so auffallender ist es, dass die Entwickelung des befruchteten Embryosackes von Prostanthera violacea nicht eine der besonderen Eigenthümlichkeiten jener mitteleuropäischen Labiaten theilt.

Der Embryosack der Prostanthera violacea erscheint kurze Zeit nach der Befruchtung in seiner Gestalt nur wenig verändert, wohl aber beträchtlich vergrössert, in die Länge gestreckt, im oberen Theile etwas angeschwollen. Der Anhängsel, der einseitigen Ausstülpungen der Membran entbehrt er durchaus. Seine Mitte ist von einem, aus wenigen grossen Zellen zusammengesetzten Endosperm ausgefüllt. Die Anordnung der Zellen desselben lässt auf seine Entstehung durch wiederholte Theilung der einzigen Urmutterzelle schliessen (F. 18). Bis gegen das untere Ende des Endosperms reicht der lange, cylindrische Embryonalschlauch, der oben, schräg abgestutzt, mit langgezogener Ansatzfläche an der Innenwand des Embryosacks haftet (F. 18 *a*). Die Membran des Embryosackscheitels hat das Pollenschlauchende umwachsen, so dass dieses auf eine nicht unerhebliche Strecke in eine taschenförmige Einstülpung der Embryosackhaut eingeschlossen erscheint: ein Verhältniss, dem ähnlich, welches bei Narcissus **), Digitalis ***) und sehr ausgeprägt bei Campanula †) und bei Najas vorkommt. Das erweiterte obere Drittheil des Sackes ist zu dieser Zeit noch zellenleer. Später, nach der Anlegung des Embryokügelchens füllt es sich, wie es scheint durch freie

---

*) Ueber Stachys sylvatica vergleiche auch Deecke in Bot. Zeit. 1856, 121. Den Irrthum Deecke's, der Embryoträger und Pollenschlauchende im Zusammenhange darstellt, brauche ich nicht weiter zu erörtern.

**) Hofmeister Entstehung des Embryo. T. II. F. 39.

***) Tulasne Ann. sc. nat. III. Sér. XII. T. III. F. 8, 9.

†) Tulasne a. a. O. Tf. 5; XVIII. Abschnitt dieser Abhandlung.

Zellenbildung, mit lockerem weitzelligem Gewebe, das durch die Grösse seiner Zellkerne vom Endosperm auffällig sich unterscheidet (F. 19). Dieses Gewebe vertrocknet gegen die Samenreife hin, ebenso wie das zellenleere untere Ende des Embryosackes.

Es tritt bei Lamium wie bei Prostanthera ein Verhältniss mit besonderer Deutlichkeit hervor, welches auch vielfach anderwärts sich zeigt, und vielleicht eine ganz allgemeine Verbreitung hat: die unbefruchteten Keimbläschen sind von sichtlich grösserem Umfang (Breitendurchmesser) als das obere Ende des Vorkeims. Es bestehen nicht bloss Grössen-, sondern wesentliche Formunterschiede zwischen den unbefruchteten (unteren) Keimbläschen und der oberen Zelle des Vorkeims. Der letztere ist durchwegs von weit schlankerem Umriss; die Differenz des Durchmessers ihrer Ansatzfläche an der Embryosackhaut von dem grössten Querdurchmesser der Zelle ist geringer, die Entfernung der dicksten Stelle der Zelle von der Ansatzfläche ist grösser bei der obersten Zelle des Vorkeims (Embryoträgers), als bei unbefruchteten Keimbläschen — und dies nicht nur bei den genannten Labiaten, sondern auch bei Oenothera, Tropaeolum, Anemone, bei Gräsern, bei Funkia, und in vielen anderen Fällen. Der Versuch liegt nahe, diese Thatsache durch die Annahme zu erklären, dass die zartere, meist gallertweiche, halbflüssige Wand der unbefruchteten Keimbläschen durch den anschwellenden Inhalt ausgedehnt werde, der von dem Wasser aufnimmt, in welchem das Präparat liegt*). Diese Annahme ist aber unzulässig. Die Keimbläschen erscheinen nicht merklich kleiner, wenn die Präparate augenblicklich nach ihrer Anfertigung in Speichel, in Oel oder in concentrirter Lösung von kohlensaurem Ammoniak untersucht werden. Damit ist der Beweis für eine Verkleinerung des Keimbläschens, für ein Schrumpfen desselben während oder unmittelbar nach der Befruchtung gegeben. Diese Verkleinerung kann in keiner anderen Weise erfolgen, als durch Ausscheidung von Wasser. Es ist derselbe Vorgang, der die nothwendig mit Zusammenziehung des Inhalts verbundene endogene Vermehrung von Zellen ganz allgemein begleitet. Bei Pflanzen, deren

*) So Crüger in Bot. Zeit. 1851, 59. Tulasne hat in meinen früheren derartigen Beobachtungen einen Wahrscheinlichkeitsgrund gegen meine Darstellung von der Umwandlung eines der vor der Befruchtung vorhandenen Keimbläschen in die oberste Zelle des Vorkeims zu finden geglaubt.

Keimbläschen schon vor Ankunft des Pollenschlauchs am Embryosacke starre Zellstoffwände erhalten haben, wie z. B. Lathraea und Pedicularis, kann die elastische Haut sich nicht verkleinern, wenn auch der bildungsfähige Zellinhalt Wasser ausscheidet. Das Wasser wird hier in der Zellhöhle verbleiben; der Unterschied der Gestalt unbefruchteter und befruchteter Keimbläschen findet nicht statt.

## XII.

## Selagineen.

### Hebenstreitia dentata Thunb.

Taf. XXV. F. 1—6.

Das schlanke hängende Eychen (F. 2) dieser Selaginee enthält innerhalb des einzigen, dicken Integuments, dessen innerste Zellschicht aus horizontal gestreckten Zellen besteht, einen cylindrischen, am oberen Ende plötzlich zugespitzten Embryosack (F. 1), der vor der Befruchtung zahlreiche Amylumkörnchen dem Wandbeleg aus Protoplasma eingebettet enthält. Die zwei kurzen Keimbläschen haften in der Scheitelwölbung des Sackes ungleich hoch an dessen Innenwand. Der primäre Kern des Sacks ist klein, scheibenförmig (F. 1). Gegenfüsslerzellen der Keimbläschen sind bald in Ein-, bald in Dreizahl vorhanden; im unbefruchteten Embryosack gleich den Keimbläschen sehr kurz, fast kugelig (F. 1).

Der Pollenschlauch erreicht die Aussenfläche des Embryosackscheitels noch während der Frische der Corolle. Er haftet jetzt und fernerhin nur lose an der Haut des Sackes; bei der Freilegung des letzteren löset sich der Pollenschlauch von ihm ohne Ausnahme unverletzt bei leisem Ziehen. Erst später, zur Zeit da das Embryokügelchen angelegt wird, gelingt es, Embryosack und Pollenschlauchende im Zusammenhange frei zu legen (F. 6). Sofort nach seiner Ankunft beginnt eine starke Längsstreckung aller Theile des Embryosacks. Seine Mittelgegend schwillt dabei etwas an. Am oberen Ende dieser bauchigen Erweiterung

entsteht eine Querwand, welche den Embryosack in zwei Tochterzellen theilt, in deren unterer sofort neue Theilung durch Querwände erfolgt, entweder hintereinander wiederholt (F. 2), oder mit Längswänden wechselnd (F. 4, 5). Das befruchtete, untere Keimbläschen streckt sich inzwischen zu beträchtlicher Länge, während das andere zeitig verschwindet (F. 2, 3), oder noch einige Zeit unverändert sich erhält (F. 4, 5). Eine Längsstreckung, bald sehr beträchtlich (F. 2, 6), bald minder bedeutend (F. 3, 4, 5), tritt auch an den Gegenfüsslerzellen der Keimbläschen hervor.

Während fortdauernder Verlängerung des ganzen Embryosacks mehrt sich die Zahl der Zellen des, seine unteren zwei Drittel ausfüllenden Endosperms, vorwiegend in der Längsrichtung (F. 6). In das Gewebe desselben dringt das untere Ende des zum Embryonalschlauche umgewandelten Keimbläschens (F. 4, 6). Nachdem derselbe, die auf seinem Wege liegenden Endospermzellen zusammen drückend, bis auf ein Viertel der Länge der Endospermmasse in diese hinein gewachsen, entsteht über seinem zugerundeten Ende eine Querwand, welche den cylindrischen Raum des langen oberen Theils des Embryonalschlauchs von dem halbkugeligen unteren scheidet (F. 6). Die Endzelle schwillt an, und wird durch eine Reihe von Zweitheilungen zum Embryokügelchen. Der zellenleere obere Theil des Embryosacks bleibt während dieser Vorgänge ohne alle Anhängsel.

---

# XIII.

## Globulariaceen.

### Globularia vulgaris L.

Taf. XXV. F. 7.

In Form und Bau des Eychens und Embryosacks verhält sich Globularia mit Hebenstreitia völlig übereinstimmend. Auch die Entwickelung des Endosperms und des Embryo weicht nur in wenigen Punkten von jener ab. Es wird auch die oberste, die Keimbläschen einschliessende Zelle des Endosperms durch eine Längswand getheilt, an die ange-

schmiegt das zum Embryonalschlauche auswachsende befruchtete untere Keimbläschen zum Endosperm herab wächst. Das untere Ende des Embryosacks bleibt völlig zellenleer, auch die beiden untersten Zellenpaare des Endosperms vermehren sich nicht weiter, strecken sich aber dafür ganz ungewöhnlich in die Länge (F. 7 *x* und *y*), namentlich das unterste.

---

## XIV.

### Bignoniaceen.

---

#### Catalpa syringaefolia Sims.

Taf. XXIII. F. 7.

Das anatrope, nur schwach gekrümmte Ey zeigt schon im unbefruchteten Germen breit gezogene Form, die indess, jetzt sowohl als später, nur auf Entwickelung des einzigen dicken Integuments vorwiegend parallel der Fläche der Placenta beruht. Der vom Integument umschlossene Hohlraum ist langgezogen spindelförmig, schon früh lediglich vom Embryosacke allein ausgefüllt, welcher die übrigen Zellen des Eykerns völlig verdrängt hat.

Ausser ungewöhnlicher Längsstreckung zeigt der unbefruchtete Embryosack keine besonderen Eigenthümlichkeiten. Die Ansatzflächen der Keimbläschen sind breiter, als bei Globularieen und Selagineen; im Uebrigen Alles den dort beschriebenen Verhältnissen ähnlich. Sehr bald nach Ankunft des Pollenschlauchendes an der Aussenfläche des Embryosackscheitels schwellen das obere und das untere Ende des Sackes, während rascher und starker Grössezunahme aller Theile des Eychens, etwas an. In der oberen Anschwellung treten einige freie Zellkerne und Zellen auf, welche später wieder verschwinden, ohne geschlossenes Gewebe zu bilden. Die untere Anschwellung wird von einer einzigen grossen Zelle eingenommen, welche durch wiederholte quere, später auch durch Längstheilungen zu einem, vorerst keulenförmigen, aus vier Längsreihen von Zellen zusammengesetzten Endospermkörper

sich umbildet. In diesen dringt das untere Ende des zu einem überaus langen Embryonalschlauche gestreckten, befruchteten (unteren) Keimbläschens bis zur Mitte ein. Dann schwillt sein Ende an; bald ohne Weiteres (F. 7, 7*b* links), bald nach vorgängiger ein- oder mehrmaliger Querscheidewandbildung dicht oberhalb der Spitze (F. 7*b* rechts). Die Anschwellung wird durch fortgesetzte Zellvermehrung zum Embryokügelchen.

---

## XV.

## Hydrophylleen.

### Nemophila insignis Benth.

Taf. XXII. F. 16, 17.

Das anatrope Eychen von Nemophila sitzt mit tief eingeschnürter Verbindungsstelle am dicken freien Theile des Funiculus. Gleich denen der im Vorausgehenden und der Mehrzahl der im Folgenden besprochenen Formen entbehrt es der Gefässe. Es ist von einem einzigen, vergleichungsweise dünnen Integument bekleidet, dessen innerste Zellschicht aus quergestreckten kurz prismatischen Zellen besteht (F. 16). Der Embryosack füllt den Hohlraum innerhalb des Integuments vollständig aus. Er ist kurz und dick, ziemlich gleichweit. In seiner Scheitelwölbung haften zwei Keimbläschen; sein entgegengesetztes Ende wird von der einzigen Gegenfüsslerzelle derselben ausgefüllt; nicht selten fehlt diese letztere. Der grosse kugelige Kern des Sackes liegt in dessen Mittelgegend der Wand an. Verästelte Protoplasmafäden strahlen von ihm aus (F. 16 *b*). Nach Ankunft des Pollenschlauchendes an der Aussenfläche der nicht unbeträchtlich verdickten Membran des Embryosackscheitels erscheint in der anschwellenden Mittelgegend des Sackes, diese völlig ausfüllend, eine grosse Zelle; die Anfangszelle des Endosperms. Die erste der rasch einander folgenden Theilungen derselben geschieht durch eine Längswand (F. 17). Das eine Keimbläschen

verschwindet früh; das andere entwickelt sich langsam zu einem mässig langen Embryonalschlauche, welcher in das heranwachsende Endosperm eindringt. Das zellenleere untere Ende des Embryosacks schwillt während dieses Vorgangs zu einer ziemlich umfangreichen Blase an.

---

## XVI.

### Pyrolaceen.

---

#### Pyrola rotundifolia L.

Taf. XXV. F. 17—20.

Das Ey von Pyrola stimmt in allen Stücken genau überein mit dem von Monotropa*). Es ist sehr klein, vollkommen durchsichtig, anatrop, von nur einem, aus zwei Schichten tafelförmiger Zellen bestehenden Integumente bekleidet, dessen Hohlraum schon lange vor der Befruchtung vom Embryosacke allein ausgefüllt wird, der frühe die übrigen Zellen des Eykerns verdrängte (F. 17). Der Embryosack ist keulenförmig; er enthält im Mikropyle-Ende zwei, seltener drei der Innenwand ungleich hoch ansitzende, kurz birnförmige Keimbläschen; eine einzige, fast kugelige Gegenfüsslerzelle derselben, und in seiner Mittelgegend einen grossen, wandständigen Kern, von welchem Stränge körnigen Protoplasmas strahlig ausgehen. Nach Ankunft des Pollenschlauchs an der Aussenseite der Embryosackspitze theilt sich der Sack in seiner Mitte durch eine Querwand. Bisweilen zeigt sich noch eine zweite Querwand beinahe gleichzeitig dicht über der Gegenfüsslerzelle der Keimbläschen, so dass diese von der unteren der beiden Zellen ausgesperrt wird, in welche der Embryosack sich theilte. — Beide neu gebildete Zellen theilen sich sofort wieder durch Querwände: die obere meist nur einmal, die untere öfter. Die der Mitte des Embryosackes näheren Tochterzellen der letzteren werden darauf auch durch Längswände

---

*) Hofmeister Entstehung des Embryo. S. 34.

getheilt. Es entsteht ein ellipsoïdischer Zellkörper, der an einem oder beiden Enden in eine kurze Reihe linear geordneter Zellen ausgeht. Häufiger, als bei Monotropa, setzt sich bei Pyrola die Theilung durch Längswände bis in die untersten der wenigen Zellen dieses Endosperms fort (F. 20).

Das untere Keimbläschen beginnt erst dann zu einem Embryonalschlauche sich zu verlängern, wenn die Bildung des Endosperms schon ziemlich weit vorgerückt ist. Das obere, fehlschlagende Keimbläschen verschwindet früh. Der Embryonalschlauch wächst bis in die Mitte der ellipsoïdischen Endospermmasse; bildet darauf eine Querwand über seinem halbkugeligen Ende. Die so abgeschiedene Endzelle schwillt an, und wird durch eine Quertheilung, der nur eine oder zwei Längstheilungen folgen, zum vier- bis achtzelligen, kugeligen Embryo.

## XVII.

### Vaccinieen.

#### Vaccinium uliginosum L.

Taf. XXV. F. 14—16.

Die anatropen Eychen der einheimischen Vaccinien sind seitlich abgeplattet. Die Hauptmasse des Eys nimmt die Raphe ein; der Embryosack ist eng, schlank keulenförmig; das ihn umhüllende einzige Integument ist aus nur wenigen Zellenlagen gebildet, die indess, zahlreiche Stärkekügelchen enthaltend (namentlich soweit sie den Mikropylekanal und den oberen Theil des Embryosacks umgeben), trotz ihrer Dünne die Beschaffenheit des Embryosacks im unverletzten Ey nicht erkennen lassen. Es bedarf zur Untersuchung der Darstellung dünner Längsdurchschnitte, die aus den, weit grösseren, Eychen des Vaccinium uliginosum leichter sich herstellen lassen, als aus den sehr kleinen des Vacc. Myrtillus.

In der etwas erweiterten Scheitelgegend des Embryosackes haften die beiden Keimbläschen, verschieden hoch an der Innenseite der nicht

unbeträchtlich verdickten Wand: zartwandige, mehr quer als langgestreckte Zellen, einen dünnen Wandbeleg von feinkörnigem Protoplasma enthaltend, welchem der schwierig zu sehende Zellenkern eingebettet liegt (F. 14 *b*). Der primäre Kern des Sackes liegt in dessen Mittelgegend. Ein dicker Strang von Protoplasma führt von ihm aufwärts zu den Keimbläschen und abwärts zum Grunde des Sackes. Zahlreiche Stärkemehlkörner sind diesem Strange, wie auch dem Wandbelege des Sacks aus Protoplasma eingelagert. Gegenfüsslerzellen der Keimbläschen fehlen entweder gänzlich, oder nur eine einzige füllt das untere Ende des Sackes aus.

Der Pollenschlauch, dessen Wände sich zeitig stark verdicken, legt sich der Spitze des Embryosacks seitlich an (F. 15). Daranf verlängert sich das untere der Keimbläschen zu einem Embryonalschlauche von mässiger Länge, während das obere in einen unregelmässig begränzten Ballen grobkörnigen Schleims sich verwandelt (F. 15). Das Endosperm entsteht aus wiederholter Zweitheilung einer einzigen, die unteren zwei Drittel des Embryosackes einnehmenden Zelle. Nachdem der Embryonalschlauch bis zu diesem Gewebe herabgewachsen, bildet sich dicht über seinem halbkugeligen Ende eine Querwand. Nach ein- bis dreimaliger Wiederholung dieser Quertheilung in der, zwischen je zwei Theilungen etwas sich verlängernden Endzelle des Vorkeims entsteht durch allseitige Vermehrung des Endglieds der kurzen Zellreihe das Embryokügelchen (F. 16).

Uebereinstimmend in seinem Baue mit dem von Vaccinium ist das unbefruchtete Ey von Leiophyllum buxifolium (T. XXV. F. 22), Ledum palustre, Calluna vulgaris. Die Eychen von Epacris grandiflora (T. XXV. F. 21) schliessen in ihrer allgemeinen Gestaltung hier ebenfalls sich an, namentlich auch im Bau des sehr durchsichtigen Integuments. Die Beschaffenheit des Eykerns dagegen stellt einen Uebergang zu Drosera dar, indem auch bei Epacris der Embryosack nur in seiner Scheitelregion die ihn umhüllende Zellschicht des Eykerns vollständig verdrängt; weiter abwärts aber von ihr umhüllt bleibt.

---

## XVIII.

### Droseraceen.

---

#### Drosera rotundifolia L.

Taf. XXV. F. 23.

Das äussere Integument des sehr lang gestreckten, anatropen Eys von Drosera rotundifolia besteht aus nur wenigen Zellenlagen. Es umschliesst locker das, dem lang eyförmigen Eykern dicht anliegende, aus zwei Zellenlagen gebildete innere Integument. Das Endostom wird vom Exostom weit überragt.

Die ganze Längsachse des Eykerns wird von dem gestreckt leierförmigen Embryosacke eingenommen. Die Seiten desselben sind von einer einfachen Zellschicht umhüllt; seine Scheitelgegend berührt unmittelbar die Innenwölbung des inneren Integuments, ähnlich wie bei Epacris. Vor der Befruchtung haften zwei fast halbkugelige Keimbläschen in der Scheitelwölbung des Sackes. Gegenfüsslerzellen derselben wurden nicht beobachtet.

In jungen Samen, Blüthen entnommen deren Corolle nur eben welkte, erscheint der Innenraum des Embryosackes in eine Längsreihe von wenigen, zwei bis vier grossen Endospermzellen umgewandelt, die offenbar der wiederholten Zweitheilung des Embryosacks ihre Entstehung verdanken. Jede dieser Zellen enthält einen umfangreichen, abgeplatteten, an Umriss elliptischen Kern, von dem Protoplasmastränge ausstrahlen. Die oberste der Endospermzellen enthält das zum Vorkeim umgewandelte Keimbläschen. Es erscheint jetzt als eine zweigliedrige Längsreihe von Zellen, die mit breiter Ansatzfläche an der Innenwand des Embryosacks haftet. Nicht weit von dieser Stelle ist das Ende des Pollenschlauchs der Aussenwand des Sackes angeschmiegt.

Bei der weiteren Entwickelung verdrängt das heranwachsende, in rascher Zellvermehrung begriffene Endosperm sehr bald die einfache Zellschicht des Perisperms, während der Vorkeim tiefer in das Gewebe des Endosperms dringt, und seine Endzelle zum Embryokügelchen sich entwickelt.

---

# XIX.

## Campanulaceen.

Taf. XXVI.

Die Eychen der Campanulaceen bestehen aus einem schlanken Eykern, welchen ein einziges, mässig dickes Integument umkleidet. Die Zellen dieses letzteren führen nur wenige körnige Stoffe; die der innersten, dem Eykern angränzenden Schicht sind, wie bei den meisten Eychen mit nur einer Eyhülle, quer gestreckt, von prismatischer Form (F. 1). Die Eychen von Campanula, Adenophora, Prismatocarpus sind seitlich stark abgeplattet; die von Glossocomia und Codonopsis zeigen kreisförmigen Querschnitt. Der Embryosack wächst schon frühe aus der ihn umhüllenden und bedeckenden einzigen Rindenschicht von Zellen des Eykerns hervor. Unmittelbar vor der Blüthezeit ist nur sein unteres Ende von dieser Zellenlage umhüllt; vier Fünftheile (oft noch mehr) seiner Länge ragen frei in den vom Integument umschlossenen Hohlraum hinein. — Der Embryosack ist spindelförmig, am oberen Ende seitlich zusammengedrückt, derbwandig, besonders im zusammengedrückten Theile. Die Keimbläschen, langgestreckt birnförmig, mit sehr zarter, in Wasser rasch sich aufblähender und zerfliessender Wand, sind der Wand des Embryosacks auffällig verschieden hoch angeheftet (F. 2, 3, 4, 9, 12); das zusammengedrückte Mikropyle-Ende desselben lassen sie häufig leer (F. 2, 4). Unter ihnen liegt der primäre Kern des Sackes, ein gestrecktes Ellipsoïd, in der Regel mit zwei Kernkörperchen (F. 2, 4, 9, 12).

Unmittelbar nach der, noch während der vollen Frische der Corolle erfolgenden Ankunft des Pollenschlauchendes am Embryosack beginnt ein sehr lebhaftes Wachsthum (vorwiegend Längenwachsthum) aller Theile des befruchteten Eychens. Das Pollenschlauchende drängt sich zunächst nur eine kleine Strecke zwischen die Aussenseite des Embryosacks und die Innenfläche des Integuments; meist bis zu der Stelle, an welcher das untere Keimbläschen an der Innenseite der Embryosackhaut haftet. Bei dem raschen Wachsthum des Embryosacks in die Dicke und Länge wird das Pollenschlauchende bald in eine, vorerst seitliche (F. 5), taschenförmige Einstülpung der Embryosackhaut nach Innen einge-

schlossen. Diese Einstülpung des Sackes erscheint mehr und mehr scheitelständig, je mehr sie sich verlängert; ein je grösseres Stück des Pollenschlauchendes von der aufwärts wachsenden Embryosackspitze umscheidet wird. So erscheint sehr bald nach der Befruchtung das Pollenschlauchende eingeschlossen in einer mehr oder minder tiefen, genau ihm anpassenden Einsenkung der Embryosackhaut. Die Länge dieser Einstülpung ist bei ein und derselben Pflanze, in Eychen sogar die dem nämlichen Fruchtknoten entnommen sind, sehr veränderlich: in manchen Fällen kaum mehr als den Querdurchmesser des Pollenschlauchs betragend (F. 14), in anderen diesen um das Fünfzehnfache übertreffend*). Ebenso schwankend ist das Verhältniss der Keimbläschen zu der vom Pollenschlauchende ausgefüllten Einstülpung des Embryosacks. Der häufigste Fall ist der, dass der tiefste Punkt der Einstülpung mit der Anheftungsstelle des unteren, zum Befruchtetwerden bestimmten Keimbläschens zusammenfällt. Der Vorkeim haftet dann an dem unteren Ende der Einstülpung (F. 6, 11 *b*, 14, 15). Nicht selten ist indess das obere Ende des Vorkeims seitlich an der Einstülpung befestigt (F. 8, 10, 13). Bisweilen ragt die Einstülpung mit freiem Ende in den Raum des Embryosacks herein; der Vorkeim haftet seitwärts an einer ganz anderen Stelle der Innenwand des Sackes (F. 5, 7, 11).

Mit derselben Schnelligkeit, wie die Zunahme des Umfanges von Eychen und Embryosack, treten nach Ankunft des Pollenschlauchendes an der Aussenseite des Sackes, Veränderungen der Keimbläschen ein. Das obere derselben verliert seine scharfe Umgränzung, und verwandelt sich in einen Klumpen körnigen zähen Schleimes, der allmälig verflüssigt wird, bald früher, bald später (F. 5, 6, 7, 10, 14). Das untere Keim-

---

*) Tulasne, der zuerst dieses Verhältniss beobachtete (Ann. sc. nat. III Série. T. XII, p. 57; T. V. F. 2—10), fasst es auf als eine Einstülpung der Embryosackhaut durch das Pollenschlauchende. Ich glaube mit Unrecht; vergleichende Messungen zeigen bald, dass sich das Pollenschlauchende, von der Aussenmündung der Mikropyle an gemessen, nur wenig verlängert, während ein grösseres Stück seiner unteren Extremität dadurch frei wird, dass die Innenwand des Integuments sich stärker wölbt, und so ein beträchtlicher Theil der Wände des Mikropylekanals in die Bildung des den heranwachsenden Embryosack umschliessenden Hohlraums mit eingeht. Das Längenwachsthum des befruchteten Embryosacks ist dagegen sehr beträchtlich. — Schacht hat die Einsenkung des Embryosacks für einen Theil des Embryoträgers erklärt (in Pringsheim, Jahrbücher I, 206; Tf. XV. F. 11—14); — ein Irrthum, welcher durch das Vorausgeschickte widerlegt wird.

bläschen formt sich, durch rasches Spitzenwachsthum, zu einem Cylinder um, der in Kurzem bis gegen die Mitte des Embryosacks hin vordringt. Hier trifft er auf das inzwischen angelegte Endosperm. Die erste Zelle desselben füllt die Mittelgegend des Sackes vollständig aus (F. 6, 8). Der Augenschein zeigt, dass sie ihre Entstehung der Bildung zweier Querscheidewände im Embryosacke verdankt, deren untere die zuerst gebildete sein mag. Durch rasch einander folgende Zweitheilungen dieser Mutterzelle des Endosperms wird dasselbe binnen Kurzem zu einem vielzelligen Körper von beträchtlicher Länge; das Längenwachsthum des Embryosacks beschränkt sich fortan fast ausschliesslich auf den vom Endosperm ausgefüllten Theil desselben. In das Gewebe des Endosperms dringt die Spitze des Embryonalschlauchs, in welcher jetzt, oft schon früher (F. 6, 7) eine Querscheidewand entsteht, nachdem der grösste Theil des Protoplasma des Embryonalschlauchs in dessen Ende wanderte. Die obere Zelle des Vorkeims erscheint fortan farblos durchsichtig (F. 11 *b*, 13, 15). Die zunächst halbkugelige Endzelle entwickelt sich wieder zum Cylinder (bisweilen bauchig anschwellend, F. 11 *b*) gliedert ihr Ende durch eine Querwand vom cylindrischen Raume ab, und entwickelt aus dieser Endzelle, nach nochmaliger, selbst wiederholter Quertheilung derselben (F. 13, 14) das Embryokügelchen.

Die Zellen des Vorkeims unterscheiden sich auffällig von den sehr durchsichtigen des Endosperms durch ihren, von überaus zahlreichen Körnchen tief getrübten Wandbeleg aus Protoplasma (F. 11, 11*b*, 13, 14); mehr noch durch die leichte Zerfliesslichkeit ihrer Wandungen. Selbst die Wände der drei- bis vierzelligen Vorkeime von Campanula americana, Codenopsis viridiflora widerstehen nur kurze Zeit der Einwirkung des Wassers; dann bläht ihre Substanz sich auf und vertheilt sich in der umgebenden Flüssigkeit. Bei Campanula medium leisten die Zellhäute etwas besseren Widerstand. Bei Prismatocarpus Speculum dagegen, einer Art, welche vermöge der Grösse und des Baues ihrer Eychen sich besonders gut zur Untersuchung eignet, ist die Zerfliesslichkeit der Zellmembranen des Vorkeims so gross, dass es fast unmöglich ist, ein klares Bild des befruchteten Eychens sich zu verschaffen.

---

## XX.

### Loasaceen.

---

#### Loasa tricolor Lind.

Taf. XXVII. F. 2—6.

Loasa tricolor stimmt im Baue ihres Eychens vollständig mit Pedicularis sylvatica überein. Das Ey ist halb umgewendet, stark gekrümmt; das einzige Integument sehr dick. Der Embryosack hat zur Zeit der Befruchtung die übrigen Zellen des Eykerns vollständig verdrängt, und von seinem Scheitel aus, weit hinein in den langen, halbkreisförmig gekrümmten Mikropylekanal eine fädliche Fortsetzung getrieben. Der Sack ist nun von ungemeiner Länge, im unteren Theile bauchig, im oberen gekrümmten cylindrisch. Soweit das Integument der weiteren unteren Hälfte des Embryosacks angränzt, besteht eine innerste Zellschicht aus quergestreckten, prismatischen Zellen.

Der primäre Kern des Embryosacks liegt in dessen bauchigem unteren Theile. Die Keimbläschen, zwei bis drei, haften im Scheitel des Embryosacks; kurz vor der Befruchtung ist oft nur eines derselben vorhanden, die anderen zu formlosen Massen zusammen geschrumpft (F. 3). Gegenfüssler der Keimbläschen sind innerhalb einer Ausweitung des Grundes des Embryosacks in Mehrzahl anwesend. Da wo die untere Ausweitung des Sackes in dessen weiteren mittleren Theil einmündet, findet sich öfters eine grosse, diese Gegend des Embryosacks völlig ausfüllende Zelle (F. 3). An der Einmündungsstelle des cylindrischen oberen Theils des Sackes in dessen Mittelgegend zeigt sich noch vor der Befruchtung eine nur schwach hervortretende, gegen die Raphe gekehrte Ausstülpung der Membran (F. 3).

Nach Ankunft des Pollenschlauchendes an der Aussenseite der Embryosackspitze streckt sich das deren Innenwand am tiefsten angeheftete Keimbläschen (F. 4) zu einem Embryonalschlauche von sehr beträchtlicher Länge (F. 5). Während derselbe zu dem weiteren Theile des Embryosackes herabsteigt, entwickelt sich die kurze Ausstülpung an der Mündungsstelle der engen Embryosackhälfte in die weitere zu

einem umfangreichen blinddarmartigen Fortsatze, der tief in das Gewebe des Integuments nach der Anheftungsstelle des Eychens hin eindringt (F. 5). Ist die Spitze des Embryonalschlauchs an der Einmündung dieser Ausstülpung vorbei gewachsen, so trifft sie auf das, die bauchige untere Hälfte des Embryosacks ausfüllende Endosperm: eine cylindrische Masse, zusammengesetzt von einer einfachen Längsreihe scheibenförmiger Zellen (F. 5), der Nachkommenschaft einer wiederholt quer getheilten einzigen Urmutterzelle. Während dieses Gewebe durch lebhafte Zellvermehrung nach allen Richtungen an Umfang und Zellenzahl rasch zunimmt, dringt die Spitze des Embryonalschlauchs in dasselbe ein, und bildet sich bald zum Embryokügelchen um (F. 6).

Der innere Bau des Eychens, und die Entwickelung des Embryo der Cajophora lateritia sind dem der Loasa tricolor übereinstimmend. Das anatrope Ey (F. 1) umschliesst mit einzigem Integument einen langgestreckten, in der Mitte stark eingeschnürten Embryosack. Im Scheitel der oberen Erweiterung haften die zwei bis drei Keimbläschen, deren eines, nach der Befruchtung zu einem langen Embryonalschlauche umgebildet, in die untere, vom Endosperm erfüllte Erweiterung des Sackes herabwächst, zwischen die Zellen des Endosperms eindringt und den Embryo entwickelt. Gleich den Eychen von Loasa und Bartonia enthält auch das von Cajophora trotz beträchtlichen Umfanges kein Gefässbündel; — auch in dieser Beziehung eine Uebereinstimmung mit den Eychen der Orobancheen, Scrophularineen, Plantagineen und Labiaten zeigend.

# XXI.

## Bartonieen.

### Bartonia aurea Lindl.

Taf. XXVII. F. 7—11.

Bereits in einer früheren Veröffentlichung*) habe ich die auffallenden Eigenthümlichkeiten der Entwickelung des Eychens von Bartonia aurea geschildert. Der Embryosack, der frühzeitig die übrigen Zellen des Eykerns verdrängte, entwickelt nach Bildung der Keimbläschen eine scheitelständige, umfängliche, einen Zellenkern enthaltende, weit hinauf in den bauchig sich erweiternden Mikropylekanal reichende Ausstülpung. Die neuerdings mehrfach mir gelungene Freilegung des unverletzten unbefruchteten Embryosacks hat gezeigt, dass an der Verbindungsstelle der Ausstülpung mit dem ursprünglichen Raume des Sackes eine Querscheidewand sich befindet, unterhalb derer die Keimbläschen, deren in der Regel nur zwei vorhanden**), der Seitenwand des Sackes anhaften. Es unterliegt keinem Zweifel, dass diese meist etwas schräge Scheidewand sehr früh, gleich nach dem ersten Hervorsprossen der Aussackung***) gebildet wird. Der Unterschied der Entwickelung des Embryosacks von Bartonia von der des gleichen Organs von Loasa und Cajophora, das auch ein sehr beträchtliches nachträgliches Längenwachsthum des Scheitels zeigt, bei dem aber die Keimbläschen in dem Scheitel der auswachsenden Fortsetzung mit empor gehoben werden, lässt sich kurz so ausdrücken, dass bei Cajophora und Loasa das Längenwachsthum der Membran der Embryosackspitze ein intercalares ist, auftretend in einer dicht unter dem Scheitel und den Ansatzstellen der Keimbläschen gelegenen cylindrischen Zone; bei Bartonia dagegen ein rein apicales.

Bei Freilegung des Embryosacks von Bartonia aurea wird Protoplasma und Zellenkern der Keimbläschen durch den auf diese zarten

*) Hofmeister, Entstehung des Embryo. Leipzig 1849, S. 38 ff.

**) vergl. a. a. O. Tf. II. F. 37—40.

***) a. a. O. Tf. II. F. 35.

Zellen unabsichtlich geübten Druck in der Regel ausgetrieben. Die Membranen bleiben gleichwohl sehr deutlich kenntlich (F. 7—9), aber sie nehmen einen merklich kleineren Raum ein, als bei den unverletzten Keimbläschen. Dieser Umstand verdient Beachtung als ein Beweis für die Elasticität der Membranen der unbefruchteten Keimbläschen, und für den von ihrem Inhalt auf die Haut geübten Druck. —

Das Pollenschlauchende, noch während der Frische der Blumenkrone im Eymunde anlangend, drängt sich seitlich an der langen, scheitelständigen Ausstülpung des Embryosackes vorbei (F. 1)*); bis seine Spitze etwas unterhalb der Scheidewand anlangt, welche den ursprünglichen unteren Theil des Sackes von jener Aussackung trennt. Hier haftet die Pollenschlauchspitze der Aussenwand des Sackes an; bald inniger, bald lockerer, und in der Regel, wie auch anderwärts, an einer anderen Stelle als auf der Aussenseite der Berührungsstelle der Embryosackhaut mit dem zu befruchtenden Keimbläschen (F. 10, 11). Das untere Keimbläschen verlängert sich darauf zum kurzen Embryonalschlauche, während das obere verschwindet, und durch wiederholte Zweitheilung des ganzen Raumes des Embryosacks unterhalb der über dem Keimbläschen ausgespannten Querwand das Endosperm angelegt wird. — In Betreff der weiteren Entwickelung des Embryo und Samens verweise ich auf meine mehrerwähnte frühere Arbeit.

---

*) Früher hatte ich angegeben (a. a. O. S. 39) der Pollenschlauch dringe in diese Ausstülpung ein. Dies war ein Irrthum, hervorgerufen durch unvollständige Freilegung des Embryosackes.

# Erklärung der Abbildungen.

**Tafel I.**

Loranthus europaeus.

F. 1. Längsdurchschnitt der Anlage eines weiblichen Blüthenstandes, Mitte Juli des Jahres vor der Blüthe. In den Achseln der Deckblätter *b b* stehen die Anlagen der Blüthen *a a* von Form flacher, oberseits schwach vertiefter Warzen aus kleinzelligem, gleichartigem Gewebe. Vgr. 25.

- 2. Stück einer solchen Inflorescenz, einen Monat später, in perspectivischer Ansicht. *c* die Calyculus genannte wulstförmige Wucherung des Parenchyms des Blüthenbodens; *p* Perigonialblätter. Vgr. 10.

- 2 *b*. Ansicht von oben einer der Blüthen dieser Inflorescenz. Inmitten der zusammen neigenden 6 Perigonialblätter zeigen sich die 6 sterilen Staubfäden (S. 539) Vgr. 20.

- 3. Längsdurchschnitt einer solchen Blüthe; *c* Calyculus, *p* Perigonialblätter, *s* sterile Stamina, *v* fortwachsendes Ende der Blüthenachse. Vgr. 50.

- 4. Längsdurchschnitt einer weiblichen Blüthenknospe, Ende Aprils (1852). Zu den in den vorigen Abbildungen bemerklichen Organen sind noch die 3 Carpelle (*ca*) hinzugekommen, deren eines (rechts) vom Schnitte in seiner Mittellinie getroffen ist. Diesem gegenüber geht der Schnitt durch die bereits verwachsenen Seitenränder der beiden anderen Carpelle (bei *ca'*). Unterhalb der Einsenkung, welche die Carpelle umstehen, ist der halbmondförmige Durchschnitt der meniskenförmigen Gewebsstelle mit lufterfüllten Intercellularräumen sichtbar, welche die Chalaza bezeichnet. Vgr. 30.

- 5. Der Grund jener Einsenkung (das noch in Zellenvermehrung und Wachsthum begriffene Ende der Blüthenachse), in 120facher Vgr.

- 6. Aehnliches Präparat, wie F. 4, 9 Tage später, bei weiter vorgerückter Verwachsung der Carpelle unter sich. Vgr. 40.

- 7. Längsdurchschnitt einer weiblichen Blüthenknospe, am 12 Mai. Zwischen den bereits beträchtlich verlängerten und an den Rändern verwachsenen Carpellen hat das Ende der Blüthenachse zu einem flach kegelförmigen Wärzchen sich erhoben. Vgr. 10.

- 8. Dieses Ende der Blüthenachse in 80facher Vgr.

F. 9. Längsdurchschnitt (welcher keinen der sterilen Staubfäden traf) einer solchen Knospe, am 20. Mai. Der Griffelkanal ist noch offen. Vgr. 20.

- 10. Ein Theil des Gewebes oberhalb der halbmondförmigen dunkeln Stelle *ch* (der Chalaza) der vorigen Figur, der Art präparirt, dass die unteren Enden der bereits lang gestreckten Embryosäcke frei gelegt wurden. Vgr. 80.

- 11. Längsdurchschnittene weibliche Knospe am 28. Mai, dem Griffelkanal entlang der Art auseinander gelegt, dass Lage und Grösse der zwei Embryosäcke *e* deutlich wird. Vgr. 9.

- 12. Eine dem Aufbrechen nahe Knospe (vom nämlichen Tage) im Längsdurchschnitt. Der Griffelkanal von den verfilzten papillös gewordenen Zellen seiner Wandung bereits verschlossen, doch noch kenntlich. Die Embryosäcke (*e*), sehr gestreckt, liegen in einer spindelförmigen Masse durchscheinenderen Gewebes. Vgr. 18.

- 13. Das freigelegte obere Ende des Embryosacks, zwei Keimbläschen enthaltend, aus einer Knospe ähnlicher Entwickelung. Vgr. 160.

## Tafel II.

### Loranthus europaeus.

F. 1. Querdurchschnitt einer Anthere, Ende April. Vgr. 25.

- 1*b*. Ein Fach der in voriger Figur dargestellten Anthere in 75facher Vgr.

- 2. Perigonialblatt einer aufgeblühten weiblichen Blüthe von innen gesehen; *s* der sterile Staubfaden. Vgr. 15.

- 3. Anthere, einer dem Oeffnen nahen männlichen Blüthe entnommen, Seitenansicht. Vgr. 15.

- 4. Eine solche, quer durchschnitten. Gleiche Vgr.

- 5.6. Perigonialblätter männlicher Blüthen, aufgesprungene Antheren tragend, von der Seite gesehen. Vgr. 15.

- 7. Reifes Pollenkorn. Vgr. 120.

- 8. Längsdurchschnitt einer männlichen Blüthenknospe, Ende April. *c* Calyculus, *p* Perigonialblätter, *s* Staubfäden, *ca* Carpelle, bereits zum fehlschlagenden Pistill verwachsen. Vgr. 30.

- 9. Aehnliches Präparat, Anfang Mai. Gleiche Vgr.

- 10. Längsdurchschnitt einer weiblichen Blüthe am 8. Juni, zur Zeit da die Perigonialblätter welken und abzufallen beginnen. Der Griffelkanal unkenntlich. *e* Embryosäcke. Vgr. 22.

- 11. Ein Embryosack aus einer eben geöffneten Blüthe (Anfang Juni) völlig frei gelegt. Im erweiterten oberen Ende ist ein Keimbläschen sichtbar. Rechts haftet diesem Embryosacke ein Bruchstück eines zweiten, kürzeren an. Vgr. 180.

- 12. Drei Embryosäcke aus einer anderen Blüthe gleicher Entwickelung; im grösseren Theile ihrer Länge frei gelegt, gegen den Grund hin durch das angränzende Zellgewebe zusammen gehalten. Vgr. 180.

## Tafel III.

### Loranthus europaeus.

F. 1. Aus einer oben geöffneten Blüthe, Längsdurchschnitt der von durchscheinendem Gewebe erfüllten axilen Gegend des Germen (des mit den Innenflächen der Carpelle verwachsenen Eyes). *e* ein von den Schnitten blosgelegter Embryosack; — *ch* Chalaza.

- 2. Unterer Theil des Embryosacks aus einer Blüthe mit welkenden Perigonialblättern (am 13. Juni), beim Präpariren vom oberen Ende abgerissen. Aus der Rissstelle ragt ein Stück des bereits zweizelligen Vorkeims hervor; vielleicht aus seiner natürlichen Lage rückwärts geschoben. Im unteren Ende des Embryosacks die einzige Mutterzelle des Endosperms. Vgr. 250.

- 3. Ein Stück des Pollenschlauchs, nebst einigen der Wandzellen des obliterirten Griffelkanals, frei präparirt. Vgr. 120.

- 4. Embryosack aus einem befruchteten Germen (bei Abfall der Perigonialblätter am 15. Juni) frei gelegt. Dem unteren Ende nahe haften einige der benachbarten Zellen, zum Theil langgestreckte, zum Theil fast cubische, der Aussenfläche des Sackes an. *k* das zum langen Embryonalschlauche gestreckte befruchtete Keimbläschen; *edp* Endospermzellen. Vgr. 150.

- 5. Aehnliches Präparat. Dem Scheitel des Sackes haftet das Pollenschlauchende an. Vgr. 150.

- 6. Embryosack aus einem befruchteten Germen, am 20. Juni frei gelegt. Am Gipfel des Sackes haftet das Pollenschlauchende. Die Endospermzellen quer getheilt. Vgr. 150. Perspectivische Ansicht; die Umrisse des Vorkeims innerhalb des Endospermkörpers sind in punktirten Linien angedeutet.

- 7. Ein Stück einer längsdurchschnittenen weiblichen Blüthe, am 15. Juni. Die eine Längshälfte des Griffels, dessen Kanal von den zwei Parallelschnitten gestreift wurde, ist entfernt. Man sieht den Pollenschlauch *t* im Zusammenhang mit dem, im Griffelkanale weit empor gedrungenen Scheitel des Embryosacks *e*. Der untere Theil des Germen ist gänzlich entfernt. Auf der Narbe liegen Pollenkörner *g*. Vgr. 30.

- 8. Scheitel eines Embryosacks, mit dem ihm anhaftenden, ein Stück rückläufigen Pollenschlauchende *t*. Der Embryonalschlauch *k* hängt aus der Oeffnung des abgerissenen Sackes ein Stück hervor. Vgr. 200.

- 9. Der untere, erweiterte, mit Endosperm erfüllte Theil eines Embryosackes nebst einem Stücke des ihn überragenden cylindrischen Theiles, am 2. Juli frei gelegt und von aussen gesehen. Die Umrisse des durchschimmernden, zum Vorkeim umgewandelten Embryonalschlauches sind in punktirten Linien angegeben. Vgr. 150.

- 10. Aehnliches Präparat, am nämlichen Tage einem etwas weiter entwickelten Germen entnommen, im Längsschnitt. Gleiche Vgr.

## Tafel IV.

### Loranthus europaeus.

F. 1. Der wenigzellige, das untere Ende eines befruchteten Embryosackes ausfüllende Endospermkörper im Längsdurchschnitt. Er ist durchzogen von dem Vorkeime *k*, dessen untere, angeschwollene, durch das Endosperm bis auf die Haut des unteren Embryosackendes gedrungene Extremität in einer Protoplasmaansammlung zwei Zellenkerne zeigt. Am 3. Juli 1853 präparirt. Vgr. 150.

- 2. Aehnliches Präparat, am 12. desselben Monats dargestellt. Gleiche Vgr.

- 3. Aehnliches Präparat, einem etwas weiter vorgerückten Eychen am nämlichen Tage entnommen. Das angeschwollene untere Ende des Vorkeims ist bereits mehrzellig. Vgr. 120.

- 4. Längsdurchschnitt durch das vom Endosperm erfüllte erweiterte untere Ende eines Embryosacks, nebst dem umgebenden Gewebe des Germen, am 21. Juli. Die Vermehrung der Zellen des Endospermkörpers ist am oberen Ende desselben einseitig stärker, so dass der cylindrische, vom Embryoträger durchzogene obere Theil des Embryosacks, *f*, zur Seite geschoben erscheint. Der untere, dicke Theil des Vorkeims besteht aus vier Längsreihen von Zellen. *ch* ist die Gewebspartie, welche der Chalaza des Eychens entspricht. Vgr. 90.

- 4*b*. Der Vorkeim und die ihm angränzenden Zellen des Endosperms der vorigen Figur, 180fach vergrössert.

- 5. Längsdurchschnitt eines jungen Samens, am 30. Juli, in 16facher Vgr. Die vom Endospermkörper *ed* aufwärts verlaufende dunkle Linie *f* ist der cylindrische Theil des Embryosacks, welcher auch hier (und in der folgenden Figur) zur Seite geschoben erscheint. Vgr. 20.

- 5*b*. Der Vorkeim, nebst einigen Endospermzellen aus demselben Präparate, 60fach vgr. Eine (die vorderste) der vier Längsreihen von Zellen des Vorkeims ist in Anlegung des Embryokügelchens begriffen.

- 6. Längsdurchschnitt einer jungen Frucht am 23. August. Vgr. 10.

- 6*b*. Eyweisskörper, Embryo und Chalaza (*ch*) aus einem dem vorigen gleich entwickelten Germen gelöst, längsdurchschnitten und 40mal vgr.

- 7. Eyweisskörper im Längsdurchschnitt aus einer etwas weiter vorgerückten Frucht; — der Embryo ist bereits vom Endosperm wieder eingeschlossen. Seitlich am Embryoträger ist eine der drei Längsreihen von Zellen des Vorkeims bemerklich, in deren Endzellen die Zellvermehrung nach den drei Richtungen des Raums nicht eintrat. Vgr. 60.

- 8. Aehnliches Präparat, am 1. Sptbr. *ch* Chalaza. Vgr. 15.

- 9. Embryo aus einer reifen Frucht (29. Sptbr.) im Längsdurchschnitt *f* Embryoträger; *r* die im Radicularende eingeschlossene (endogene) Wurzel. Vgr. 10.

## Tafel V.

### Viscum album.

F. 1. Ein weiblicher Blüthenstand, Anfang März (1850), im Längsdurchschnitte durch die Medianen des unter ihm stehenden Paares von Laubblättern, 3fach vergrössert. *ll* sind die Stiele dieser Laubblätter, *x* die in ihren Achseln stehenden, zur Entfaltung während des bevorstehenden Sommers bestimmten Sprossen; *d* die längsdurchschnittenen beiden Bracteen der terminalen Blüthe. (Die lateralen beiden anderen Blüthen der armblüthigen Traube sind vom Schnitte nicht getroffen.) Vgr. 3.

- 2. Einer der in den Achseln der Laubblätter Anfang März stehenden Sprossen, die in der vorhergehenden Figur mit *x* bezeichnet sind, im Längsdurchschnitt parallel zur Fläche seiner und der Laubblätter des Tragblatts (rechtwinklig zum Längsschnitt der in der voraufgehenden Figur die Sprossen *x* traf). *aa* die schuppenförmigen, rechts und links vom Sprosse stehenden Vorblätter desselben; *b* das eine Laubblatt, von der Fläche gesehen; *c* die unteren Bracteen des zur Blüthe gelangenden Sprossendes, in deren Achseln die zwei seitenständigen Blüthen der Traube entstehen werden. Mit *x* ist die Stelle bezeichnet, an welcher (der Schnittfläche abgewandt) die Anlage des zur Entfaltung im zweitnächsten Jahre bestimmten Sprosses in der Achsel des Laubblatts *b* sitzt. Vgr. 30.

- 2*b*. Die Spitze der Endknospe dieses Präparats, 200fach vergr. Die Gränzen der dem genau axilen Schnitte von unten her zunächst angränzenden Zellen sind in zarteren Linien angegeben.

- 3. Längsdurchschnitt, gleichsinnig dem vorigen, durch den Theil oberhalb der Laubblätter eines in der Entfaltung begriffenen diesjährigen Sprosses, am 1. Mai (1850). *yy* die Anlagen der beiden axillaren Blüthen; *d* eine der Bracteen der terminalen, deren Anlage, der Scheitel des Stengelendes, jetzt als schwach vertiefte Fläche erscheint. (Beginn der Bildung der Perigonialblätter). *cc* hat die Bedeutung wie in voriger Figur. Gleiche Vgr.

- 4. Längsdurchschnitt derselben Theile, rechtwinklig zu den beiden vorhergehenden, am 9. Mai desselben Jahres. *x* die Anlagen der zur Entfaltung im nächsten Jahre bestimmten Sprossen mit ihren von der Fläche gesehenen Vorblättern. Bedeutung der übrigen Buchstaben wie vorher. Vgr. 15.

- 5. Längsdurchschnitt rechtwinklig zu diesem, gleichsinnig dem in F. 2 und 3 dargestellten, derselben Theile am 17. Juni desselben Jahres. Bedeutung der Buchstaben wie bei F. 3. Die Mitte des Stengelendes (Anlage der terminalen Blüthe) jetzt wieder convex, die äusseren Perigonialzipfel schon angedeutet. Noch deutlicher treten sie an den durchschnittenen seitlichen Blüthen *y* hervor. Vgr. 30.

- 5*b*. Eine solche seitliche Blüthe, auf derselben Entwickelungsstufe, gleichsinnig zu dem vorhergehenden Schnitte längs durchschnitten. Man sieht einen der äusseren Perigonialzipfel von der Innenfläche; die beiden inneren sind vom Schnitte getroffen. Vgr. 200.

F. 6. Dieselben wie die F. 5 dargestellten Theile, im in gleicher Weise geführter Längsdurchschnitte am 24. Juni. Vgr. 20.

- 7. Dieselben, in zu diesem rechtwinkligem Durchschnitte am 2. Juli. Vgr. 10.

## Tafel VI.

### Viscum album.

F. 1. Dieselben Theile wie F. 3—7 der vorausgehenden Tafel, im Längsdurchschnitt parallel den Flächen des Laubblätterpaares dieses Sprosses, rechtwinklig zu den Schnitten F. 4, 7, gleichsinnig denen F. 3, 5, 6 der Tafel V, am 2. Juli. Die Endblüthe ist vom Schnitte nur gestreift, so dass ihre vier Perigonialzipfel in perspectivischer Ansicht vorliegen. Vgr. 20.

- 2. Männliche Inflorescenz, zur nämlichen Zeit in gleicher Richtung längsdurchschnitten. Vgr. 5.

- 3. Weibliche Endblüthe, am 14. Juli längsdurchschnitten. Innerhalb der beiden äusseren Perigonialzipfel sind zwei kleine Höcker sichtbar, die Carpelle. Der Schnitt ist rechtwinklig zum vorigen. Vgr. 36.

- 3*b*. Spitze eines der Perigonialzipfel der vorigen Figur. Vgr. 180.

- 4. Weibliche Endblüthe, am 5. August längsdurchschnitten. Vgr. 30.

- 5. Narbe und axiler Theil des Germen einer solchen, am 10. August (1849) durch und durch noch aus gleichartigem Gewebe bestehend. Vgr. 150.

- 6. Laterale weibliche Blüthe, am 28. Septbr., im Längsschnitt. Die Umrisse des axilen durchsichtigeren Gewebes, welches die Embryosäcke einschliesst, sind angedeutet. Vgr. 20.

- 7. Weibliche Inflorescenz im Längsdurchschnitt parallel den Flächen der Laubblätter, Anfang October. Vgr. 8.

- 7*b*. Embryosack aus einer der seitlichen Blüthen dieses Präparats, frei gelegt. Er zeigt zwei völlig ausgebildete Keimbläschen. Vgr. 150.

- 8. Längsdurchschnitt der axilen Gewebmasse eines Germen am 12. Fbr. (1849). Der Schnitt hat die beiden Embryosäcke gestreift, so dass ihre Umrisse deutlich wahrzunehmen sind. Nicht nur die Keimbläschen, sondern auch ihre Gegenfüsslerzellen sind vorhanden. Vgr. 50.

- 8*b*. Das verjüngte untere Ende eines solchen Embryosacks frei präparirt (des rechts gelegenen). Vgr. 200.

- 8*c*. Dasselbe mit Chlorcalciumlösung behandelt. Der Inhalt der Gegenfüsslerzelle hat sich contrahirt.

- 9. Das obere Ende eines am 14. März frei präparirten Embryosacks, mit drei derbwandigen Keimbläschen. Vgr. 200.

## Tafel VII.

### Viscum album.

F. 1. Ein am 12. April (1849) freipräparirter Embryosack mit zwei Keimbläschen im Mikropyle-Ende, der Gegenfüsslerzellen derselben entbehrend. Neben ihm

sind die Umrisse des anderen Embryosacks desselben Germen angedeutet, in der Lage zu dem vollständig gezeichneten, wie sie vor der Freilegung des letzteren in dem nur durch Schnitte dargestellten, noch nicht mit der Nadel zergliederten Präparate war. Vgr. 200.

F. 2. Embryosack (unbefruchteter) am 19. Mai (1849) frei präparirt. Er enthält drei dünnwandige Keimbläschen. Vgr. 300.

- 3. Vor Kurzem befruchteter Embryosack, am 9. Mai (1852) frei präparirt. Das untere (befruchtete) der zwei Keimbläschen erscheint etwas verlängert; der Raum des Embryosacks durch zwei Querwände in drei Zellen getheilt. Vgr. 50.

- 3*b*. Der obere Theil des vorigen Präparats in 200facher Vgr.

- 4. Vor ganz Kurzem befruchteter Embryosack, am 21. Mai (1856) frei präparirt (das untere Ende des Sackes ist bei der Präparation abgerissen). Der Raum des Embryosacks durch eine Querwand in zwei Zellen getheilt. Der Pollenschlauch trifft mit einem kurzen seitlichen Fortsatze auf die Aussenseite eines der Tüpfel des Embryosackscheitels, und verläuft dann mit rechtwinkliger Biegung weiter, um zugerundet zu enden. Unter jenem Tüpfel das obere, unbefruchtet gebliebene Keimbläschen, bereits etwas zusammengeschrumpft und von grumösem Aussehen. Dahinter und etwas tiefer das befruchtete, mit grossem Zellenkern und einer Anordnung des Protoplasma zu von diesem Kern ausstrahlenden Strängen. Vgr. 200.

- 4*b* Die Scheitelgegend dieses Embryosacks nebst den Keimbläschen und dem Pollenschlauchende, 500fach vergrössert.

- 4*c*. Dasselbe Präparat, um 120° um seine Längsachse gedreht. Vgr. 200.

- 5. Das obere Ende eines zur nämlichen Zeit frei gelegten befruchteten Embryosacks mit befruchtetem und zwei unbefruchteten Keimbläschen, welche letztere in die über die Aussenfläche des Embryosacks vorragenden, die Tüpfel desselben verschliessenden Häutchen hinein reichen. Der Pollenschlauch ist abgetrennt. Vgr. 500.

- 6. Aehnliches Präparat, mit dem einzigen Tüpfel des Embryosacks anhaftendem Pollenschlauchende. Die oder das unbefruchtete Keimbläschen ist bereits verschwunden. Gleiche Vgr.

## Tafel VIII.

### Viscum album.

F. 1—6. Obere Enden befruchteter Embryosäcke, vom 21. bis 25. Mai (1856) frei präparirt, und 200mal vergrössert, um die verschiedenartige Weise des Antretens des Pollenschlauchs zu zeigen. *t* Pollenschlauchende; *k* unbefruchtete, *k'* befruchtete Keimbläschen, *p* Tüpfel der Embryosackhaut. F. 6 und 6 *b* sind die durch einen Längsschnitt getheilten beiden Hälften eines und desselben Embryosacks, von innen gesehen.

- 7. Befruchteter Embryosack, am 27. Mai (1849) frei präparirt. Vgr. 250.

- 8. Stück des Pollenschlauchs, aus dem Narbengewebe desselben Germens heraus präparirt. Vgr. 250.

F. 9. Aehnliches Präparat, einen Tag später frei gelegt. Gleiche Vgr.
- 9*b*. Das von diesem Embryosack unverletzt abgelöste Pollenschlauchende.
- 10. Aehnliches Präparat, am 9. Mai (1852) dargestellt. Vgr. 200.
- 11. Oberes Ende eines Embryosacks, in welchem das befruchtete Keimbläschen abnormer Weise sehr fern vom Scheitel des Sackes an der Wand desselben sitzt. Vgr. 200.
- 12. Befruchteter Embryosack, in welchem die Zellenvermehrung des oberen Endes in Richtung der Dicke schon weiter vorrückte, am 9. Mai 1852 frei gelegt. Vgr. 200.
- 13. Embryosack, am 16. Juni desselben Jahres frei präparirt. Vgr. 200.
- 14. 15. Obere Enden längsdurchschnittener befruchteter Embryosäcke, am 3. Juli 1851. Vgr. 200. *e* Embryo.

## Tafel IX.

### F. 1—6. Lepidoceras Kingii (nach Herbarienexemplaren).

F. 1 Längsdurchschnitt eines 1½ M.M. langen Germen, von dem vermuthlich ganz vor Kurzem erst die Perigonialblätter abfielen, 30fach vergrössert. Das lange, konische aufrechte Ey *g* ist von lockerem weitzelligem Gewebe *v* umgeben. Im Grunde des Eychens sind 3 Embryosäcke *e* bemerklich.
- 2. Ein solches Germen quer durchschnitten. Gleiche Vgr.
- 3. Aehnliches Präparat aus einem weiter entwickelten Fruchtknoten. Das Gewebe *v* der vorigen Figur ist nicht mehr vorhanden; ein Hohlraum umgiebt das Ey. Die bleibende Fruchtknotenwand hat sich zu drei Gewebschichten differenzirt. Die innerste, *a*, ist eine einfache Lage von Zellen mit verdickten Wänden. Die mittlere, *b*, besteht aus langgestreckten engen Zellen mit sehr hygroskopischen Wandungen. Die äusserste, *c*, ist derbes Parenchym. Vgr. 30.
- 4. Der in seinem unteren Theile von Endosperm erfüllte Embryosack aus dem vorigen Präparate, frei gelegt, mit Embryoträger und Embryo *k*. Vgr. 90.
- 5. Längsdurchschnitt eines ziemlich reifen Samens. *k* Embryo; *ed* Endosperm (eine dünne, nur aus zwei Zellenlagen bestehende Gewebschicht); übrige Buchstaben haben die Bedeutung wie bei F. 3. Die Aussenfläche der Frucht ist stark runzelig; im Leben vermuthlich etwas fleischig. Vgr. 10.
- 6. Ein Theil des vorigen Präparats in 150facher Vgr. *k* die Epidermis des Embryo (an der Einfügungsstelle des Kotyledon links); Bedeutung übriger Buchstaben wie bei F. 5.

### F. 7—10. Myzodendron quadriflorum (nach Herbarienexemplaren).

- 7. Längsdurchschnitt einer weiblichen Blüthe, bald nach erfolgter Befruchtung. *s* Griffel. *br* Bractee, *pl* Samenträger; *gg* zwei der drei Eychen. Vgr. 30.
- 8. Samenträger mit zwei Eychen (das dritte liegt nach hinten) aus einem Germen ähnlicher Entwickelung. Das Eychen *g* (links) ist unbefruchtet; der Embryosack *e* eingeschlossen. An dem Eychen *g'* (rechts) hängt ein Pollenschlauch *t*;

der befruchtete Embryosack *e* ist hervorgetreten und zeigt die Umrisse einiger Endospermzellen. Vgr. 150.

F. 9. Längsdurchschnitt einer ziemlich reifen Frucht. *k* Embryo, *e* Endosperm; Bedeutung der übrigen Buchstaben wie bei F. 7. Vgr. 15.

– 10. Samenträger mit längsdurchschnittenem Samen aus einer Frucht gleicher Entwickelung frei gelegt. *g* ein abortirtes Eychen. Gleiche Vgr.

## F. 11, 12. Myzodendron linariaefolium (nach Herbarienexemplaren).

– 11. Junger Embryo, frei präparirt. *cc* Anlage der Kotyledonen, *p* Endknospe, *x* papillös werdende Zellen um das Wurzelende her; *y* diese Zellen umgebende Hautfalte. Vgr. 45.

– 12. Reifer Embryo, von einem Längsschnitte gestreift. *r* Wurzelende, *x* dasselbe umgebende Haare; *y* diese Haare einhüllende Hautfalte, *c* Kotyledonen; die durch deren Masse scheinende, die Endknospe *p* einschliessende Höhlung ist in punktirten Linien angedeutet. Gleiche Vgr.

(Nach diesen Beobachtungen ist es ausser Zweifel, dass die Entwickelung des Samens von Myzodendron in der gleichen Weise erfolgt, wie die von Thesium.)

## Tafel X.

## F. 1—5. Thesium alpinum.

F. 1. Längsdurchschnitt eines unbefruchteten Eychens mit eingeschlossenem Embryosack *e* und einem Theil des Samenträgers *pl*, Anfang Juni 1854. Vgr. 150, wie auch der folgenden drei Figuren.

– 2. Längsdurchschnitt eines eben befruchteten Eychens, aus welchem der Embryosack *e* hervorgetreten ist, die umhüllende Zellschicht durchbrechend. *k* zwei Keimbläschen, *t* Pollenschlauch.

– 3. Etwas weiter vorgerückter Zustand. Der hervorgetretene Theil des Embryosacks vom übrigen durch eine Querwand geschieden und mit Endosperm erfüllt.

– 4. Noch weiter entwickeltes Eychen, ebenfalls im Längsschnitt. Die Embryoanlage bereits dreizellig und stark nach unten gekrümmt. Das zellenleere hintere Ende des Embryosacks beginnt einen Fortsatz abwärts in das Gewebe des Samenträgers zu treiben.

– 5. Längsdurchschnitt durch einen jungen Samen nebst Samenträger. *g* ein unbefruchtet gebliebenes, vom Schnitte nur gestreiftes Eychen. Vgr. 100.

– 6. Thesium intermedium. Längsdurchschnitt eines befruchteten Eychens, dessen Entwickelung zwischen der der beiden vorigen Figuren in der Mitte steht. Vgr. 150.

## F. 7, 8. Aristolochia Clematitis.

– 7. Längsdurchschnitt eines befruchteten Eychens, senkrecht auf dessen Fläche (Anf. August 1853), *e* Endosperm. Vgr. 30.

F. 7*b*. Ein solches Eychen, im Längsdurchschnitt parallel der Fläche, die Lage des jungen Endosperms zu zeigen. 2fach vergrössert.

- 8. Längsdurchschnitt des oberen Theiles des frei gelegten Eykerns, etwas weiterer Entwickelung; von der Fläche (rechtwinklig zum Schnitte F. 7) gesehen. *m* Kernwarze, *e* Endosperm, *k* befruchtetes Keimbläschen. Vgr. 90.

## F. 9—12. Asarum canadense.

- 9. Längsdurchschnitt eines unbefruchteten Eychens, Anfang Mai (1852). *x* grosse Zellen, die von einer Lage kleiner Zellen umhüllt das Anhängsel der Raphe bilden. *ie* äusseres, *ii* inneres Integument; *k* Keimbläschen, *a* Gegenfüsslerzellen derselben. Vgr. 40.
- 9*b*. Die Scheitelregion des Embryosacks nebst den Keimbläschen desselben Präparats, bei 120facher Vgr. gezeichnet.
- 10. Ein Embryosack ähnlicher Entwickelung, mit zahlreicheren Gegenfüsslerzellen der Keimbläschen. Vgr. 80.
- 11. Embryosack mit Kernwarze, welche vom Pollenschlauch *t* noch nicht völlig durchbohrt ist. Der Raum des Embryosacks erscheint bereits durch eine Querwand in zwei kernhaltige Zellen getheilt. Gegenfüssler der Keimbläschen fehlen. Gleiche Vgr.
- 12. Aehnliches Präparat, etwas weiter vorgerückter Zustand. *t* Pollenschlauch, *e* Endosperm, *k* Keimbläschen, *a* Gegenfüssler derselben. Vgr. 150.

## F. 13—16. Asarum europaeum.

- 13. Längsdurchschnitt eines halbreifen Samens, Ende Mai 1853. *x* Anhängsel der Raphe; *e* Endosperm; *a* die vertrocknenden, sehr gewachsenen Gegenfüsslerzellen der Keimbläschen. Vgr. 10.
- 14. Embryo aus einem solchen Samen, nebst einigen der angränzenden Endospermzellen frei gelegt. Vgr. 150.
- 15.16. Embryonen ziemlich reifer Samen, frei gelegt. Gleiche Vgr.

## F. 17—25. Cytinus Hypocistis Tommasini.

- 17.18. Samenträger aus quer durchschnittenen jungen Ovarien, 10fach vgr.
- 19. Zwei junge Eychen, Längsdurchschnittsansicht. Vgr. 120, wie auch der folgenden Figuren.
- 20. Ein solches, weiter entwickelt.
- 21. Längsdurchschnittsansicht des Kerns eines weiter entwickelten Eychens, in dessen Embryosack die Bildung der Kerne der Keimbläschen erfolgte.
- 22—24. Dergleichen, von zur Befruchtung bereiten Eychen.
- 25. Pollenkorn; 25*b* ein solches, einen Pollenschlauch treibend.

## Tafel XI.

### Cynomorium coccineum Mich.

F. 1. Weibliche Blüthe unmittelbar vor der Befruchtung, der untere Theil im Längsdurchschnitt, der keines der Perigonialblätter traf und beiderseits an der Einfügung des Griffels vorbei ging, ihn unverletzt lassend. Die durch die Oberhaut des rechtswendig gedrehten Griffels, nach dessen Bleichung mit in wässeriger Salpetersäure gelöstem chlorsaurem Kali und nachherigem Auswaschen mit Ammoniak, durchscheinenden Gefässbündel sind in der Zeichnung durch punktirte Doppellinien ausgedrückt. Auf der Narbe einzelne Pollenkörner, welche Schläuche getrieben haben. *i* Integument des Eys; *e* Embryosack, *m* Mikropyle. Vgr. 30.

- 2. Eine ähnliche Blüthe (letzte Verzweigung eines der Dichasien, ohne alle Perigonialblätter) in genau durch den Griffelkanal gelegtem Längsdurchschnitt. Gleiche Vgr.

- 3. Perspectivische Ansicht eines vor Kurzem befruchteten Embryosacks, völlig frei präparirt. Primordialschläuche der Endospermzellen contrahirt (Folge der Aufbewahrung in Alkohol). So auch bei den folgenden Figuren. *k* Befruchtetes Keimbläschen. Die dem Objectträger parallelen Längsscheidewände der obersten Endospermzellen schneiden die nach oben gekehrte Aussenfläche des Embryosackes etwas unterhalb des Scheitels desselben. Vgr. 210.

- 4. Oberer Theil eines etwas weiter entwickelten, frei präparirten Embryosacks, mit anhängendem Pollenschlauchende (*t*). Vgr. 150.

- 5. Ein Theil des Integuments, mit der Mikropyle *m* im Längsschnitt, darunter einige Zellen vom Scheitel des Eykerns; unter diesen der von ihnen los präparirte obere Theil des befruchteten Embryosackes *e*, der mittelst des ihm anhaftenden Pollenschlauchendes *t* an jenen Zellen der Kernwarze lose hängt. *k* das befruchtete Keimbläschen, noch einzellig. Vgr. 120.

- 6. Längsdurchschnitt eines befruchteten Germen. Zwei Perigonialblätter, ein völlig entwickeltes (*a*) und ein rudimentäres (*b*) sind vom Schnitte getroffen. Vgr. 30.

- 7. Oberer Theil eines frei präparirten Embryosacks, der während des Freilegens zerriss. Durch das mit dem Präpariren verbundene Zerren und Quetschen wurden die Endospermzellen aus dem Verband unter sich und mit der Embryosackhaut gelöst; auch aus dem Risse derselben zum Theil hervorgetrieben. Drei derselben sind sichtbar, zwischen ihnen die dreizellige Embryoanlage *k*. Vgr. 250.

- 8. Oberer Theil eines frei präparirten Embryosacks mit vierzelliger Embryoanlage. Vgr. 150.

- 9. Oberer Theil des Eykerns nebst befruchtetem Embryosacke im Längsschnitt. Bedeutung der Buchstaben wie vorher. Vgr. 120.

## Tafel XII.

### Langsdorffia hypogaea Mart.

F. 1. Der Theil eines zarten Längsdurchschnitts einer weiblichen Inflorescenz, welcher einer axil vom Schnitt getroffenen weiblichen Blüthe entspricht. Im oberen, zellig gezeichneten, wachshaltigen Theil des Germen ist etwas Substanz der Nachbarblüthen mit gezeichnet. *c* Fruchtknotenhöhle. *s* Griffelkanal. Vgr. 30.

- 2. Oberes Ende und Griffel einer solchen Blüthe, im Längsdurchschnitt. *s* Cuticula, *y* verdickte, *x* dünnwandige Prosenchymzellen. Vgr. 200.

- 3. Sehr zarter Längsschnitt aus einer solchen Blüthe, Gegend der Fruchtknotenhöhle. Die Zellen derselben sind zum Theil mit der Präparirnadel entfernt, um die Anheftung des Eys deutlicher zu zeigen. *e* Ey (= Embryosack); *f* dessen Stielzelle. Vgr. 250.

- 4. Der gleiche Theil des Längsdurchschnitts einer andern Blüthe, nach Behandlung mit kalter Salpetersäure in der chlorsaures Kali gelöst, und Ammonia. Bedeutung der Buchstaben die gleiche. Gleiche Vgr.

- 5. Befruchteter Embryosack, halb frei präparirt. Gleiche Vgr.

- 6. Aehnliches Präparat, gleiche Vgr. *t* Pollenschlauch, *k* befruchtetes Keimbläschen.

- 7. Der einer einzelnen Frucht entsprechende Theil eines Längsschnitts durch den reifen Fruchtstand. *pt* Steinschale, *edp* Endosperm, *e* Embryo, *sp* dessen Träger. Vgr. 50.

- 8. Oberer Theil eines längsdurchschnittenen reifen Endospermkörpers (Samens). Der Träger des Embryo biegt sich über der Stelle, wo die punktirte Linie ihn trifft, nach abwärts und ist der dem Objectiv abgekehrten Wand des Embryosacks angesetzt. Vgr. 200.

## Tafel XIII.

### Sarcophyte sanguinea Sparrm.

F. 1. Längsdurchschnitt einer weiblichen Blüthe kurz nach der Bestäubung. *s* Griffelkanal, *g* Fruchtknotenhöhle, *o* Eychen. Vgr. 50.

- 1*b*. Fruchtknotenhöhle und Eychen der vorigen Figur, in 350facher Vgr. *t* Pollenschlauch, *k* Keimbläschen.

- 2. Aehnliches Präparat aus einem anderen Germen in gleicher Vgr.

- 3. Fruchtknoten mit zweifächerigem Germen im Längsdurchschnitt. Vgr. 35.

- 4. Reife Frucht im Längsdurchschnitt. *edp* Endosperm, *c* Embryo, *p* Steinschale. Vgr. 10.

- 5. Aehnliches Präparat. Vgr. 20.

- 6. Same im Längsdurchschnitt, parallel den breiten Flächen. Vgr. 30.

- 7. Embryo nebst Stück seines Trägers und einigen Endospermzellen aus einem anderen längsdurchschnittenen Samen. Der Embryo zeigt Andeutungen zweier Kotyledonen. Vgr. 150.

F. 8. Längsdurchschnitt eines dreikantigen, schlanken Samens. Vgr. 60.
- 9.10. Stücken der Steinschale normaler Früchte im Längsschnitt. Vgr. 300.
- 11. Verholzter Scheinsame im Längsdurchschnitt. Vgr. 40.

## Tafel XIV.

### F. 1—3. Balanophora dioïca R. Br.

F. 1. Sehr junges Germen, von einem Längsschnitt getroffen. Vgr. 300.
- 2. Ein solches, von aussen gesehen. Die Anfangszelle des Eys scheint durch. Gleiche Vgr.
- 3. Spitze des Griffels einer solchen, Durchschnittsansicht. Gleiche Vgr.

### F. 4, 5. Balanophora fungosa Forst.

- 4. Junges Germen, von aussen gesehen. Gleiche Vgr. 200.
- 5. Monströses Germen, mit zwei Griffeln. Aus der nämlichen Inflorescenz wie F. 4. Vgr. 200.

### F. 6—8. Balanophora involucrata Hook. f.

- 6.7. Längsdurchschnitte (erhalten in der S. 585 angegebenen Weise; so auch die folgenden) junger Fruchtknoten. *o* Eychen, *st* Griffelkanal. Vgr. 200.
- 8. Unterer Theil eines weiter entwickelten Germen. Der Schnitt, welcher die Fruchtknotenhöhle öffnete, liess den Griffel unverletzt. Dieser ist von aussen gesehen. *e* Embryosack. Vgr. 20.

### F. 9—11. Balanophora polyandra Griff.

- 9. Theil eines zarten Längsdurchschnitts eines weiblichen Blüthenstandes. Zwischen und an den durchschnittenen kolbenförmigen Sprossungen der Hauptachse stehen die, durch den Schnitt zum Theil geöffneten Blüthen. Vgr. 20.
- 10. Oberes Ende eines Griffels. Auf seinem Scheitel ein Pollenkorn, das in den Griffelkanal einen Schlauch getrieben hat (nach einem durch gelindes Erwärmen in der Schultze'schen Macerationsflüssigkeit und nachheriges Auswaschen mit Ammoniak durchsichtiger gemachten Präparate). Vgr. 160.
- 11. Längsdurchschnitt eines unbefruchteten Fruchtknotens. Die Anheftungsstelle des Eys ist nicht vom Schnitt getroffen. Das Präparat behandelt wie das vorhergehende. Vgr. 200.

## Tafel XV.

### F. 1—5. Balanophora polyandra Griff.

F. 1. Unbefruchtetes Germen im Längsdurchschnitt, der nicht die Anheftungsstelle des Eys traf. Vgr. 120.
- 2. Vor Kurzem befruchtetes solches, im Längsschnitt. Embryosack in zwei Endospermzellen getheilt. Gleiche Vgr.

F. 3. Aehnliches Präparat. Der Schnitt ist durch die Anheftungsstelle des Eychens gegangen. Vgr. 160.

- 4. Längsdurchschnittener, in vier Endospermzellen getheilter Embryosack mit anhaftenden mehreren Zellen des Eys und Pollenschlauchende *t*, frei gelegt. *k* befruchtetes Keimbläschen. Vgr. 300.

- 5. Frei gelegter, von Endosperm ausgefüllter Embryosack, von aussen gesehen. Bedeutung der Buchstaben wie zuvor. (Das Präparat war in oben angegebener Weise durchsichtiger gemacht.) Gleiche Vgr.

### F. 6—11. Balanophora fungosa Forst.

- 6. Vor Kurzem befruchtetes Germen im Längsdurchschnitt. *k* Keimbläschen. Vgr. 120.

- 7. Der längsdurchschnittene von Endosperm erfüllte Embryosack eines solchen, frei gelegt. Gleiche Vgr.

- 8. Oberer Theil der Fruchtknotenhöhle eines längsdurchschnittenen ähnlichen Germen. Der Pollenschlauch *t* ist ein weites Stück im Griffelkanale zu verfolgen. Vgr. 250.

- 9. Minder entwickeltes Germen, im Längsdurchschnitt. Vgr. die gleiche.

- 10. Weiter vorgerücktes Germen, längsdurchschnitten. Vgr. 120.

- 11. Hälfte eines durch einen Längsschnitt, der den Griffel entfernte, getheilten Germen weiterer Entwickelung, von innen gesehen. Der Vorkeim *k* bereits zweizellig. Vgr. 100.

### F. 12, 13. Balanophora dioïca R. Br.

- 12. Halbreifes Germen, durch einen Längsschnitt geöffnet und von innen gesehen. *x* einige noch erhaltene Zellen des Eys; *k* Embryo-Anlage. Vgr. 200.

- 13. Reifes Germen in axilem Längsdurchschnitte. *k* der am Embryoträger hängende Embryo. Gleiche Vgr.

## Tafel XVI.

### F. 1—3. Helosis mexicana Liebm.

F. 1. Sehr junge weibliche Blüthe im Längsschnitt (das Präparat mit der Schultze'schen Macerationsflüssigkeit und Ammoniak gebleicht). *cc* die Carpelle; *p* Perianthium; *o* das aufrechte Ey. Vgr. 200.

- 2. Weibliche Blüthe, zur Befruchtung bereit, und die Spreuschuppen zu ihrer Rechten und Linken im zarten Längsschnitt. Die eine Spreuschuppe *x* ist perspectivisch gezeichnet, um die Felderung ihrer Cuticula zu zeigen. *ch* die Chalazagegend. Vgr. 100.

- 3. Embryosack aus einer ähnlichen weiblichen Blüthe, frei präparirt. Vgr. 300.

### F. 4, 5. Helosis guyanensis Rich.

- 4. Reife Frucht im Längsdurchschnitt. Vgr. 100.

F. 5. Der obere Theil des Endosperms nebst dem Embryo einer eben solchen Frucht; im Längsdurchschnitt. Vgr. 350.

F. 6, 7, 8. Rhopalocnemis phalloïdes Jungh.

- 6. Reife Frucht im Längsschnitt parallel den breiten Flächen. *p* Pericarp, *edp* Endosperm, *k* Embryo. Vgr. 45.
- 7. Reife Frucht im Längsschnitt senkrecht auf die breiten Flächen. Bedeutung der Buchstaben wie vorher. Vgr. 90.
- 8. Querdurchschnitt einer solchen Frucht. Gleiche Vgr.
- 9. Corynea crassa Hook. f. Freigelegter unbefruchteter Embryosack, dessen zerrissene Haut in Fetzen umherhängt, während der in Essig erhärtete Primordialschlauch die ursprüngliche Form des Embryosacks zeigt. *k* die Keimbläschen. Vgr. 300.

## Tafel XVII.

F. 1—6. Scybalium fungiforme Schott und Endl.

F. 1. Weibliche Blüthe, unbefruchtet, in durch beide Griffel gelegtem Längsdurchschnitte. *o* Ey, *ch* Chalaza, *e* Embryosäcke. Vgr. 70.
- 2. Eben solche, Längsdurchschnitt rechtwinklig zu vorigem. Gleiche Vgr.
- 3. Eben solche, Querdurchschnitt aus der Gegend der Embryosäcke. Vgr. 70.
- *4ab*. Querdurchschnitte von Spreuschuppen; an *4b* aussen die Cuticula angedeutet. Vgr. 100.
- 5. Junge Frucht im Längsdurchschnitt, dessen Führung dem F. 1 abgebildeten übereinstimmend ist. Rechts im Innern ein befruchteter, endospermerfüllter Embryosack, links ein fehlschlagender. Vgr. 30.
- 6. Längsdurchschnitt einer der Reife nahen Frucht. Vgr. 40.
- *6b*. Oberer Theil des Endosperms nebst Embryo aus dem nämlichen Präparat. Vgr. 150.

F. 7, 8. Phyllocoryne jamaïcensis Hook. f.

- 7. Längsdurchschnittenes Endosperm mit dreizelligem Vorkeim. Vgr. 200.
- 8. Junge Frucht im Längsdurchschnitt, gebleicht. Daneben eine längsdurchschnittene Spreuschuppe. Bedeutung der Buchstaben wie früher. Vgr. 100.

## Tafel XVIII.

Lathraea squamaria L.

F. 1. Eykern und Embryosack eines unbefruchteten Eychens frei präparirt; aus einer dem Aufblühen nahen Knospe, deren Antheren noch geschlossen waren. Zelleninhalt des Sackes und der Keimbläschen sind wenig in ihrer Anordnung gestört. Die Ansatzflächen beider Keimbläschen haften an der nach oben gekehrten Seite des Embryosacks. Am 24. April 1854. Vgr. 280.

F. 2. Embryosack aus einem ähnlichen Eychen. Der Inhalt des Embryosacks ist ausgetrieben. Die Ansatzflächen der Keimbläschen nehmen die ganze Scheitelregion des Sackes ein; jede der Ansatzstellen ist nur zur Hälfte, im Profil, zu sehen. Am 21. April 1854. Gleiche Vgr.

- 3. Aehnliches Präparat. Der Embryosack völlig unverletzt. Anheftung der Keimbläschen wie bei F. 2. Gleiche Vgr.

- 4. Oberer Theil des frei gelegten Embryosacks aus einem ähnlichen Eychen. Die Ansatzfläche des oberen Keimbläschen ist von vorn, die des unteren im Profil gesehen. Gleiche Vgr.

- 5. Aehnliches Präparat. Am 17. April 1856. Gleiche Vgr.

- 6. Frei gelegter Embryosack aus einem Eychen, in dessen Mikropyle ein Pollenschlauch (offenbar erst vor Kurzem) eingetreten war. An der Stelle des primären Kerns sind jetzt zwei Zellenkerne sichtbar; sie sind durch Wasser, welches während des Freipräparirens des Sackes durch einen zufällig entstandenen Riss in denselben drang, etwas zum Zusammenschrumpfen gebracht. Am 28. April 1853. Vgr. 200.

- 7. Frei gelegter Embryosack, aus einem vor Kurzem befruchteten (11 Stunden nach künstlicher Bestäubung der Narbe aus dem Germen genommenen) Eychen. Dem Scheitel des Sackes haftet das Ende eines Pollenschlauchs an. Keimbläschen unverändert; der Embryosack durch eine Querwand getheilt. Am 18. April 1853. Gleiche Vgr.

- 8. Oberer Theil des frei gelegten Embryosacks aus einem ähnlichen Eychen; am Scheitel des Sackes ein hakenförmiges Anhängsel seiner Wand. Daneben der abgelöste, an der Spitze zweiarmige Pollenschlauch. Gleiche Vgr.

- 9. Frei gelegter ganzer Embryosack aus einem ähnlichen Eychen. Das befruchtete Keimbläschen etwas gestreckt; das unbefruchtete verschwunden. Im Mittelraume des Sackes zwei Querscheidewände. Ueber dem Scheitel des Sackes das unverletzt abgelöste Pollenschlauchende. Am 16. April 1854. Gleiche Vgr.

- 10. Frei gelegter, eben befruchteter Embryosack, von welchem der Pollenschlauch abgetrennt. Anheftung der Keimbläschen wie bei F. 1. Die Primordialschläuche der beiden Zellen, in welche der Embryosack getheilt ist, sind contrahirt. Am 25. April 1854. Vgr. 280.

- 11. Weiter entwickelter Embryosack, mit anhaftendem, tief herabgedrungenem Pollenschlauche. In den zwei mittleren Endospermzellen ist bereits Längstheilung erfolgt; in der obersten noch nicht. Die Primordialschläuche sämmtlicher Endospermzellen sind zusammengezogen. Das befruchtete, untere Keimbläschen ist merklich gestreckt. Ende April 1854. Vgr. 200.

- 12. Aehnliches Präparat, mit unverändertem Inhalte der Endospermzellen, auch deren oberste, die Keimbläschen einschliessende bereits durch eine Längswand getheilt ist. Am 27. April 1855. Gleiche Vgr.

- 13. Weiter vorgerückter Embryosack, frei gelegt; das Pollenschlauchende abgetrennt. Der Zelleninhalt ist nicht mit gezeichnet; ebenso bei mehreren der folgenden Figuren. Ende April 1853. Gleiche Vgr.

- 14. Aehnliches Präparat, mit dem Sacke anhaftendem Pollenschlauchende. Am 13. April 1853. Gleiche Vgr.

F. 15. Oberes Ende eines frei gelegten Embryosacks, mit ungewöhnlich angeschwollenem fehlschlagendem (oberem) Keimbläschen. Der Pollenschlauch ist abgelöst und entfernt. Am 11. April 1853. Gleiche Vgr.

- 16. Oberes Ende eines frei gelegten Embryosacks; dicht neben dessen Scheitel das abgetrennte Pollenschlauchende. Eine der obersten Endospermzellen beginnt die Entwickelung der seitlichen Ausstülpung. Am 20. April 1853. Gleiche Vgr.

- 17. Ganzer Embryosack frei gelegt, daneben der abgelöste Pollenschlauch. Die Entwickelungsstufe hält die Mitte zwischen denen der Fig. 13 und 14. Mitte April 1853. Gleiche Vgr.

- 18. Oberes Ende eines Embryosacks; darüber der abgetrennte Pollenschlauch. Die seitliche Ausstülpung der einen oberen Endospermzelle ist zerrissen. Gleiche Vgr.

- 19. Ganzer Embryosack, frei gelegt, mit anhaftendem Pollenschlauchende, aus einem weiter entwickelten Eychen. Beide oberste Endospermzellen haben Ausstülpungen getrieben. Diese Ausstülpungen, wie auch die umfangreiche der zellenleeren unteren Hälfte des Embryosacks, haben die Lage wie im unverletzten Eychen. Am 26. April 1853. Gleiche Vgr.

- 20. Oberer Theil eines frei gelegten befruchteten Embryosacks mit sehr geringer seitlicher Ausstülpung der obersten Endospermzelle. Ueber dem Scheitel des Sackes der abgelöste Pollenschlauch. Ende April 1853. Gleiche Vgr.

- 21. Frei gelegter Embryosack eines weiter entwickelten Eychens; Endosperm schon vielzellig. Die Entwickelung einer Ausstülpung aus einer der oberen Endospermzellen ist abnormer Weise völlig unterblieben. Neben dem Scheitel des Sackes, dessen Haut sehr stark verdickt, haftet das Pollenschlauchende. Anf. Mai 1852. Gleiche Vgr.

- 22. Frei gelegtes oberes Ende eines weiter entwickelten Embryosacks; dessen seitliche Ausstülpung in Fetzen zerrissen. Neben dem Embryosackscheitel das sehr unscheinbar gewordene Pollenschlauchende. Mitte Mai 1852. Gleiche Vgr.

- 23. Frei gelegtes oberes Ende eines Embryosacks mit anhaftendem Pollenschlauche; — Entwickelung etwas weiter vorgerückt als die der Fig. 19. Gleiche Vgr.

- 24. Frei gelegte Embryosackspitze aus einem weiter vorgerückten Eychen, in welchem bereits das Embryokügelchen angelegt war. Die Einmündung der seitlichen Ausstülpung der einen obersten Endospermzelle in deren ursprünglichen Raum ist nach oben gewendet, die darmförmige Ausstülpung (in der Zeichnung ist ihr äusseres Ende weggelassen) ist zur Seite geschlagen. In Folge davon scheint es auf den ersten Blick, als rage das vom obersten Theile des Embryoträgers völlig ausgefüllte äusserste Ende des Embryosackes aus einer Hautfalte desselben hervor. Am Scheitel des Sackes haftet ein Rest des Pollenschlauchendes. Nach einem Präparate Schacht's, dessen Ansicht mir verstattet wurde. Gleiche Vgr.

## Tafel XIX.

### Lathraea squamaria.

F. 1. Embryosack mit anhaftendem Pollenschlauch, frei präparirt, Entwickelung dem

F. 19 vorhergehender Tafel abgebildeten gleich. Nur die Umrisse der Zellen sind gezeichnet. Vgr. 360.

F. 2. Oberes Ende eines weiter vorgerückten, frei präparirten Embryosackes mit anhaftendem Pollenschlauch; perspectivische Ansicht. Vgr. 480.

- 3. Ganzer Embryosack, gleicher Entwickelung, durch einen Längsschnitt halbirt und darauf frei gelegt, um den Verlauf des Embryoträgers innerhalb des Endosperms zu zeigen. Vgr. 170.

- 4. Ganzes Eychen ähnlicher Entwickelung, im Längsdurchschnitt. Vgr. 60.

- 5. Oberes Ende eines weiter entwickelten, halbirten und frei gelegten Embryosackes. Neben dem Embryoträger zwei unbefruchtet gebliebene, wenig gestreckte Keimbläschen. Vgr. 200.

- 6. Dieselben Theile eines Embryosackes gleicher Entwickelung mit anhaftendem Pollenschlauchende. Vgr. 200.

- 7. Embryokügelchen, mit Träger, aus etwas weiter entwickeltem Eychen, frei gelegt. Vgr. 250.

- 8. Oberes Ende eines frei präparirten, unbefruchteten Embryosackes (einem Eychen aus einer noch geschlossenen Blüthenknospe entnommen). Der Inhalt des Sackes sowohl, als der Keimbläschen ist bei der Präparation ausgetrieben worden; nur die elastischen Zellmembranen sind erhalten. Nach einem, fünf Jahre in Chlorcalciumlösung aufbewahrten Präparate gezeichnet. Vgr. 600.

## Tafel XX.

### Pedicularis sylvatica.

F. 1. Eykern, am 19. Mai (1856) aus dem Integumente geschält, einer Knospe entnommen, deren Corolle nur erst einen leisen rothen Anflug zeigte. Die Zellen der peripherischen Zellenlage zeigen sehr deutlich eine Anordnung, welche aus wiederholter Quertheilung ursprünglich weniger einzelner Zellen hervorging. Durch diese einfache Zellschicht schimmert der Embryosack hindurch. Vgr. 120.

- 2. Eykern aus einer wenig weiter entwickelten Knospe. An seinem Scheitel ist die peripherische Zellschicht aufgebrochen und der obere Theil des Embryosacks aus ihr hervorgewachsen. Gleiche Vgr.

- 3. Eychen aus einem 7 Stunden vorher bestäubten Pistill im Längsdurchschnitt. Ein Pollenschlauch *t* ist bereits in den Eymund gelangt, aber noch nicht bis an den Embryosack. Der grosse Zellenkern des Embryosacks ist noch vorhanden. Vgr. 20.

- 4-7. Obere Hälften frei gelegter Embryosäcke von Eychen aus Knospen, deren Antheren noch geschlossen waren. In F. 6 drei, in den übrigen je 2 Keimbläschen. Vgr. von F. 4—150, der übrigen 120.

- 8. Eykern nebst Embryosack aus einem Eychen aus einem, etwa 24 Stunden zuvor bestäubten Pistill, am 23. Mai 1855 völlig frei gelegt. *t* Pollenschlauch, *k* das unentwickelt bleibende obere, *k'* das befruchtete untere Keimbläschen, welches zum Embryonalschlauche sich zu verlängern beginnt. *ed* das bereits zweizellig gewordene Endosperm. Vgr. 150.

F. 9-14. Frei gelegte obere Enden von Embryosäcken mit unbefruchtetem oberen und befruchtetem unteren Keimbläschen, aus 12 bis 24 Stunden zuvor geöffneten Blüthen in der Zeit vom 19.—30. Mai (1854 u. 55) präparirt; Fig. 9, 11 u. 14 mit unverletzt abgetrenntem, die übrigen mit anhaftendem Pollenschlauchende *t*. Vgr. 120.

- 15.16. Aehnliche Präparate aus etwas weiter in der Entwickelung vorgerückten Eychen. Das unbefruchtete Keimbläschen bereits verschwunden. Gleiche Vgr.
- 17. Aehnliches Präparat, das unbefruchtete Keimbläschen noch erhalten; das befruchtete bereits stärker verlängert. Vgr. 150.

## Tafel XXI.

### F. 1—7. Pedicularis sylvatica.

F. 1.2. Frei gelegte obere Enden befruchteter Embryosäcke mit anhaftendem Pollenschlauchende *t*, befruchtetem und unbefruchtetem Keimbläschen, aus Blüthen mit welkender Corolle. Vgr. 120.

- 3. Frei gelegter ganzer Embryosack aus einer Blume mit verwelkter Corolle. Der anhaftende Pollenschlauch *t* ist stark gekrümmt, ein Stück rückläufig; das Endosperm 8zellig. Vier dieser Zellen sind in der Seitenansicht sichtbar. Gleiche Vgr.
- 4. Oberes Ende eines frei gelegten Embryosacks, gegen den Scheitel hin umgeknickt, eine Knickung die sich auch auf den noch kurzen Embryonalschlauch erstreckt. Gleiche Vgr.
- 5. Oberes Ende des Embryosacks aus einem Eychen gleicher Entwickelung. Neben dem Embryonalschlauche das noch unveränderte unbefruchtete Keimbläschen. Der Pollenschlauch *t* ist unverletzt von der Aussenfläche des Sackes abgelöst. Gleiche Vgr.
- 6. Ganzes Eychen im Längsdurchschnitt, etwa 18 Tage zuvor befruchtet. *e* der Embryosack mit seiner blinddarmförmigen, gegen die Raphe gerichteten Aussackung. *ed* Endosperm. Vgr. 35.
- 7. Oberstes Stück des Embryosacks nebst dem ganzen Embryoträger und dem Embryo aus einem Eychen ähnlicher Entwickelung, völlig frei gelegt. Vgr. 120.

### F. 8—10. Pedicularis comosa.

- 8. Unbefruchteter Embryosack, einer noch geschlossenen Knospe entnommen, völlig frei gelegt. Er enthält zwei Keimbläschen. Vgr. 120.
- 9. Oberes Ende eines befruchteten Embryosacks mit aussen anhaftendem Pollenschlauche, unbefruchtetem und zum Embryonalschlauche gestrecktem befruchtetem Keimbläschen, frei gelegt. Das Präparat entspricht dem Fig. 5 von Pedicularis sylvatica abgebildeten. Vgr. 120.
- 10. Scheitelregion des Embryosacks mit Ansatzstelle des Embryonalschlauches aus einem weiter entwickelten Eychen. Gleiche Vgr.
- 11. Dieselben Theile aus einem jungen Samen, dessen Entwickelungsgrad dem-

jenigen des Fig. 6 von Pedicularis sylvatica abgebildeten ungefähr gleich war. Gleiche Vgr.

F. 12. Oberer Theil des Embryosacks aus einem jungen Samen der Euphrasia officinalis, frei gelegt. *ed* Endosperm. *k* Embryoträger (dessen oberes Ende sehr aufgebläht erscheint). *t* Pollenschlauch. Die seitliche Aussackung des Embryosacks, nach hinten gelegen, ist nicht mit gezeichnet. Vgr. 120.

### F. 13—16. Mazus rugosus.

- 13. Unbefruchteter Embryosack mit zwei Keimbläschen, nahe dem unteren Ende des Sackes dessen Zellenkern, frei gelegt. Vgr. 120.
- 14. Vor Kurzem befruchteter Embryosack, mit achtzelligem Endosperm, frei gelegt. Der Pollenschlauch ist bei der Präparation abgetrennt worden; so auch bei den als Fig. 15 und 16 abgebildeten Präparaten. Gleiche Vgr.
- 15. Aehnliches Präparat aus einem weiter vorgerückten Eychen. Das untere Keimbläschen bereits zum Embryonalschlauche verlängert; eine der obersten vier Zellen des Endosperms beginnt eine seitliche Ausstülpung zu treiben.
- 16. Embryosack aus einem halbreifen Samen, frei gelegt. Jede der obersten vier Endospermzellen hat eine lange Aussackung getrieben. Die eine derselben ist unverletzt, die anderen drei sind abgerissen. Gleiche Vgr.

## Tafel XXII.

### F. 1—3. Rhinanthus hirsutus.

F. 1. Embryosack aus einem unbefruchteten Eychen. Der Sack ist durch einen der durch das Ey geführten beiden Längsschnitte in der Gegend seiner Mitte gestreift*), die Anordnung seines Inhalts aber wenig dadurch gestört. Vgr. 200.

- 2. Vor Kurzem befruchteter Embryosack, völlig frei präparirt. Der Pollenschlauch hat sich abgelöst. Der Inhalt der den oberen Theil des Sackes einnehmenden Endospermzellen und des befruchteten Keimbläschens (*k*) ist bei der Präparation ausgetrieben worden; die untere Hälfte des Sackes dagegen zeigt noch ihren vollständigen Inhalt. Vgr. 150. (Ende Juni 1853.)
- 3. Gipfel eines weiter vorgerückten Embryosacks, frei präparirt. Links oben haftet das Pollenschlauchende *p*; nach rechts ist die grosse seitliche Ausweitung einer der oberen Endospermzellen sichtbar. Vgr. 300.

### F. 4, 5. Rhinanthus minor.

- 4. Unbefruchteter Embryosack, aus der Mittellamelle eines mit zwei Längsschnitten präparirten Eychens. Vgr. 200.
- 5. Vor Kurzem befruchteter Embryosack, völlig frei gelegt. Neben dem Scheitel haftet das Pollenschlauchende *p*. Unter diesem das bereits etwas gestreckte,

*) In diesem Sinne ist der Ausdruck „längsdurchschnittene Eychen" hier überhaupt zu verstehen.

befruchtete Keimbläschen *k*. Das unbefruchtete ist verschwunden. Vgr. 200. (Anf. Juni 1854.)

## F. 6—11. Veronica Buxbaumii.
(Mitte Mai 1854.)

F. 6*a*. Embryosack aus einem längsdurchschnittenen Eychen, einer Knospe entnommen, die kaum eine Färbung der Corolle zeigte. Vgr. 250.

- 6*b*. Embryosack aus einer weiter entwickelten Knospe. Gleiche Vgr.

- 7. Embryosack aus einer dem Aufblühen ganz nahen Knospe. Gleiche Vgr.

- 8. Embryosack und benachbarte Theile des Integuments aus der Mittellamelle eines vor Kurzem befruchteten, durch zwei Längsschnitte präparirten Eychens. Vgr. die gleiche.

- 9. Aehnliches Präparat, gleicher Entwickelungszustand. Die mittlere Anschwellung des Embryosacks füllt die ihm entsprechende Erweiterung des vom Integument umschlossenen Hohlraumes nicht völlig aus. Mikropyle und Pollenschlauch sind nicht mitgezeichnet. Gleiche Vgr.

- 10. Endospermkörper und zwischen seine Zellen eingedrungener Vorkeim; Theile eines auf die nämliche Art aus einem weiter vorgeschrittenen Eychen dargestellten Präparats. Gleiche Vgr.

- 11. Embryosack aus einem weiter entwickelten jungen Samen im Längsdurchschnitt. Vgr. 180.

- 12.13. Embryosäcke mit anhaftenden Pollenschläuchen (*p*) von Veronica hederaefolia, Anfang Mai 1855 frei präparirt. F. 12 mit einzelligem Endosperm und noch kurzem befruchteten Keimbläschen (*k*); F. 13 mit mehrzelligem Endosperm und zu einem langen Embryonalschlauche entwickeltem befruchteten Keimbläschen. Vgr. 200.

## F. 14, 15. Veronica triphyllos.
(Anfang Mai 1854.)

- 14. Oberer Theil eines vor einiger Zeit befruchteten, frei präparirten Embryosackes. Die Längsscheidewand der oberen Anschwellung des Sackes ist parallel zur Augenachse. Der Embryonalschlauch (*k*) ist dieser Wand angeschmiegt. Vgr. 180.

- 15. Obere Anschwellung eines anderen frei präparirten Embryosacks; — die Längsscheidewand derselben ist der Ebene des Objectträgers parallel. Gleiche Vgr.

- 15*b*. Theil der oberen Anschwellung des Embryosackes eines weiter entwickelten jungen Samens im Längsdurchschnitt. Das Netz aus Zellhautstoffbalken hat sich, nach längerem Liegen des Präparats in Glycerin, an einer Stelle von der Embryosackhaut gelöst. Vgr. 350.

- 15*c*. Stück eines ähnlichen Präparats aus einem jungen Samen nach weiter vorgerückter Entwickelung. Vgr. 500.

## F. 16, 17. Nemophila insignis.

- 16. Unbefruchtetes Eychen im Längsdurchschnitt. Vgr. 30.

- 16*b*. Embryosack daraus, 100fach vergrössert.

F. 17. Frei präparirter Embryosack eines vor Kurzem befruchteten Eychens Vgr. 120.

## Tafel XXIII.

### F. 1—6. Melampyrum nemorosum.

(Ende Juli 1855.)

F. 1. Unbefruchtetes Ey im Längsdurchschnitt. Vgr. 35.
- 2. Embryosack daraus. Vgr. 125.
- 3. Innerste Zellschicht der Mikropyle (vom Pollenschlauch durchzogen) und daran haftendes oberes Ende eines vor Kurzem befruchteten Embryosacks, frei präparirt. Vgr. 250.
- 4. Aehnliches Präparat; Embryosack völlig unverletzt. Gleiche Vgr.
- 5. Längsdurchschnitt eines frei präparirten, im oberen Theile vom bereits umfangreichen Endosperm erfüllten Embryosacks aus einem weiter entwickelten jungen Samen. Vgr. 25.
- 5*b*. Der Scheitel dieses Embryosackes vom Endosperm abgelöst, in 120facher Vgr. Im innern der scheitelständigen Ausstülpung des Sackes sind die Reste des Zellcylinders eingeschlossen, welcher die Wand des Mikropylekanals bildete. Darunter haftet der Embryoträger an der Innenwand des Sackes; — an seinem unteren Ende hängt das aus dem Endosperm hervorgezogene Embryokügelchen.
- 6. Dasselbe Präparat, von seiner unteren Fläche gesehen. In der Mitte der Figur das Embryokügelchen. Vgr. 120.
- 7. Catalpa syringaefolia, Längsdurchschnitt eines vor nicht langer Zeit befruchteten Eychens (am 6. Septbr. 1854), in 50facher Vgr.
- 7*b*. Terminale Anschwellung des Embryonalschlauchs aus demselben Präparat. Daneben Ende des Vorkeims aus einem anderen, weiter vorgerückten Eychen. Vgr. 200.
- 8. Acanthus spinosus, Längsdurchschnitt eines eben befruchteten Eychens (Anfang Juli 1855). Vgr. 25.
- 9. Unterer Theil des Embryosacks aus einem Eychen etwas weiter vorgerückter Entwickelung, frei präparirt. *e* Endosperm, *k* unteres Ende des Embryonalschlauches. Vgr. 200.

## Tafel XXIV.

### F. 1—12. Lamium purpureum.

(Anfang Mai 1853.)

F. 1. Längsdurchschnitt eines unbefruchteten Eychens. Vgr. 30.
- 1*b*. Stück der längsdurchschnittenen Epidermis mit einem der ihr aufsitzenden Haare. Vgr. 120.
- 2. Embryosackspitze desselben Präparats. Vgr. 120.
- 3. Ganzer Embryosack aus einem längsdurchschnittenen Ey. Vgr. 150.

F. 4. Vor Kurzem befruchteter Embryosack, aus einem rechtwinklig zur Medianebene längsdurchschnittenen Ey (das umgebogene untere Ende des Sackes ist durch den Schnitt entfernt). Vgr. 120.
- 5.6.7. Obere Enden der Embryosäcke aus ähnlichen Präparaten. Vgr. 150.
- 8.9. Embryosäcke im Längsdurchschnitt, weiter vorgerückte Zustände. Vgr. 120.
- 10. Noch weiter entwickelter Embryosack, frei präparirt und von der Vorderfläche gesehen. Vgr. 90.
- 11. Längsdurchschnitt des Endospermkörpers und Embryokügelchens aus einem jungen Samen ähnlicher Entwickelung. Vgr. 60.

### F. 12—15. Lamium maculatum.

- 12.13. Unbefruchtete Embryosäcke aus längsdurchschnittenen Eychen. Vgr. 150.
- 14. Pollenschlauch, obere Anschwellung des Embryosacks und Stück des Embryonalschlauchs aus einem vor Kurzem befruchteten, längsdurchschnittenen Eychen. Gleiche Vgr.
- 15. Junger Same, längsdurchschnitten, in 15facher Vgr. Die schattirte Stelle ist Endosperm; in ihm das Embryokügelchen. Der Verlauf des Trägers desselben ist durch eine dunkle Linie bezeichnet. Die Hauptmasse des jungen Samens ist das herangewachsene Parenchym des Integuments.

### F. 16—19. Prostanthera violacea.

- 16. Längsdurchschnitt eines Fruchtknotenfachs und unbefruchteten Eychens. Vgr. 35.
- 16*b*. Embryosack aus diesem Präparat. Vgr. 150.
- 17. Querdurchschnitt eines Fruchtknotens. 8fach vgr.
- 18. Vor nicht Langem befruchteter Embryosack, frei präparirt, in Längsdurchschnittsansicht. Vgr. 150.
- 19. Obere zwei Dritttheile eines weiter vorgerückten, frei gelegten Embryosacks. Gleiche Vgr.
- 20. Ajuga reptans. Fruchtknotenfach und unbefruchtetes Eychen im Längsdurchschnitt. Vgr. 50.

## Tafel XXV.

### F. 1—6. Hebenstreitia dentata.

(Anfang September 1854.)

F. 1. Embryosack und innerste Zellschicht des Integuments aus einem unbefruchteten (einer geschlossenen Knospe entnommenen) längsdurchschnittenen Eychen. Vgr. 150.
- 2. Vor Kurzem befruchtetes Eychen im Längsdurchschnitt, gleiche Vgr.
- 3. Embryosack und Pollenschlauchende aus einem ähnlichen, minder weit entwickelten Präparate. Gleiche Vgr.
- 4.5. Befruchtete Embryosäcke, völlig frei präparirt. Gleiche Vgr.

F. 6. Embryosack aus einem weiter vorgerückten Eychen, nebst anhaftendem Pollenschlauchende, frei präparirt. Vgr. die nämliche.
- 7. Globularia vulgaris. Embryosack aus einem nicht lange zuvor befruchteten Eychen, frei präparirt. Gleiche Vgr. (Am 1. Juni 1855.)

### F. 8—12. Plantago lanceolata.
(Juli 1855 und 1858.)

- 8. Unbefruchtetes Eychen und Theil der Placenta im Längsdurchschnitt. Vgr. 50
- 8b. Der Embryosack aus diesem Präparat, in 200facher Vgr.
- 9. Vor Kurzem befruchteter Embryosack, aus einem längsdurchschnittenen Eychen Gleiche Vgr.
- 10. Aehnliches Präparat, aus einem in der Entwickelung weiter vorgerückten Eychen. Gleiche Vgr.
- 11. Embryosack, noch etwas weiter entwickelt, längsdurchschnitten und nebst anhaftendem Pollenschlauchende frei präparirt. Vgr. 100.
- 12. Junger Same im Längsdurchschnitt. *e* Endosperm, *k* Embryokügelchen, *a* zellenleere Ausstülpungen des Embryosacks. Vgr. 30.
- 13. Weiter vorgerückter Same, nebst einem Theil der Placenta (*pl*) im Längsdurchschnitt. Gleiche Vgr.

### F. 14—16. Vaccinium uliginosum.
(Mitte Juni 1853.)

- 14. Unbefruchtetes Ey im Längsdurchschnitt. Vgr. 50.
- 14b. Gipfel des Embryosacks aus diesem Präparat. Vgr. 250.
- 15. Scheitel eines befruchteten Embryosacks, nebst anhaftendem Pollenschlauche, frei präparirt. *k* oberes Ende des befruchteten, zum Embryonalschlauche gestreckten Keimbläschens; *k'* fehlgeschlagenes Keimbläschen; *p* Pollenschlauch. Gleiche Vgr.
- 16. Embryokügelchen nebst Träger, frei präparirt. Vgr. 125.

### F. 17, 18, 19. Pyrola rotundifolia.
(Juni 1853.)

- 17. Unbefruchtetes Eychen, Längsdurchschnittsansicht. Vgr. 80.
- 18. Embryosack aus einem solchen, drei Keimbläschen enthaltend. Vgr. 120.
- 19. Embryosack nebst Pollenschlauchende aus einem vor Kurzem befruchteten Eychen. Gleiche Vgr.
- 20. Die nämlichen Theile aus einem weiter vorgerückten Eychen. Die Gränzen der anstossenden Zellen des Integuments sind angedeutet. Gleiche Vgr.
- 21. Epacris grandiflora. Längsdurchschnitt eines unbefruchteten Eychens. Vgr. 120. (Ende Mai 1854.)
- 22. Leiophyllum buxifolium. Längsdurchschnitt eines unbefruchteten Eychens. Vgr. 100. (Ende Mai 1854.)
- 23. Drosera rotundifolia. Inneres Integument und Eykern aus einem vor Kurzem befruchteten Eychen im Längsschnitt; im Endostom das Pollenschlauchende. Vgr. 150. (August 1855.)

## Tafel XXVI.

### F. 1—5. Campanula americana.
(Anfang Juli 1854.)

F. 1. Unbefruchtetes Eychen im Längsdurchschnitte. Vgr. 30.
- 2.3. Eykern und Embryosack aus solchen. Vgr. 180.
- 4. Desgleichen. Vgr. 240.

### F. 6—8. Campanula Medium.
(Anfang Juli 1854.)

- 5. Oberes Ende eines frei gelegten, vor Kurzem befruchteten Embryosacks. Der Pollenschlauch ist abgetrennt; die Einsenkung der Haut des Embryosackscheitels, welche er ausfüllte, ist leer. Keines der Keimbläschen haftet am unteren Ende dieser Einsenkung. Vgr. 180.
- 6. Aehnliches Präparat, aus einem weiter entwickelten Eychen. Das Pollenschlauchende steckt in der, hier tieferen, Einsenkung des Embryosackscheitels, an deren unterem Ende das zum Embryonalschlauche gestreckte Keimbläschen haftet. Oberhalb der Ansatzstelle desselben sind die Reste des unbefruchteten Keimbläschen sichtbar. Unter dem Ende des Embryonalschlauchs, welches bereits eine Querwand enthält, geht quer durch den Embryosack die Scheidewand, welche die Anfangszelle des Endosperms von der der Erweiterung des oberen Embryosackendes trennt. Vgr. 120.
- 7. Oberes Embryosackende, ähnlicher Entwickelung, frei präparirt. Der Embryonalschlauch ist der nach vorn gewendeten Fläche des Sackes angesetzt, in einiger Entfernung vom unteren Ende der vom Pollenschlauch ausgefüllten, tiefen Einstülpung des Embryosackscheitels. Vgr. 180.
- 8. Ganzer Embryosack, etwas minderer Entwickelung; frei gelegt. Das Pollenschlauchende hat sich bei der Präparation aus der Einstülpung des Embryosackscheitels gelöst. Gleiche Vgr.

### F. 9—11. Glossocomia clematidea.
(Anfang Juli 1854.)

- 9. Embryosack aus einem längsdurchschnittenen, unbefruchteten Eychen. Vgr. 200.
- 10. Oberes Ende eines frei präparirten, vor Kurzem befruchteten Embryosackes. Gleiche Vgr.
- 11. Dieselben Theile aus einem weiter entwickelten Eychen. Die vom Pollenschlauch ausgefüllte Einstülpung des Embryosacks ist sehr lang. Der Embryonalschlauch haftet, fern von deren unterem Ende, an der Seitenwand des Sackes. Gleiche Vgr.
- 11*b*. Aehnliches Präparat, weiter vorgerückter Zustand. Der Embryonalschlauch ist stark angeschwollen. Vgr. 120.

### F. 12—15. Codonopsis viridiflora.

(Anfang Juli 1854.)

F. 12. Embryosack aus einem längsdurchschnittenen unbefruchteten Eychen. Vgr. 180.
- 13-15. Obere Enden frei präparirter Embryosäcke. Bei F. 14 ist die den Pollenschlauch umscheidende Einstülpung des Embryosackscheitels sehr kurz; bei F. 13 und 15 dagegen sehr lang. Vgr. 200.

## Tafel XXVII.

F. 1. Cajophora lateritia. Unbefruchtetes Eychen im Längsdurchschnitt. Vgr. 60. (Anfang August 1854.)

### F. 2—6. Loasa tricolor.

(Anfang August 1854.)

- 2. Unbefruchtetes Ey im Längsdurchschnitt. Vgr. 20.
- 3. Embryosack daraus. Vgr. 100.
- 4. Scheitel eines eben befruchteten Embryosacks, nebst anhaftendem Pollenschlauchende frei präparirt. Gleiche Vgr.
- 5. Vor Kurzem befruchteter Embryosack, nebst dem Scheitel anhaftendem Pollenschlauchende, unverletzt frei präparirt. Gleiche Vgr.
- 6. Oberes Ende des Endospermkörpers nebst Embryokügelchen und Stück des Embryoträgers, aus einem längsdurchschnittenen jungen Samen. Vgr. 150.

### F. 7—11. Bartonia aurea.

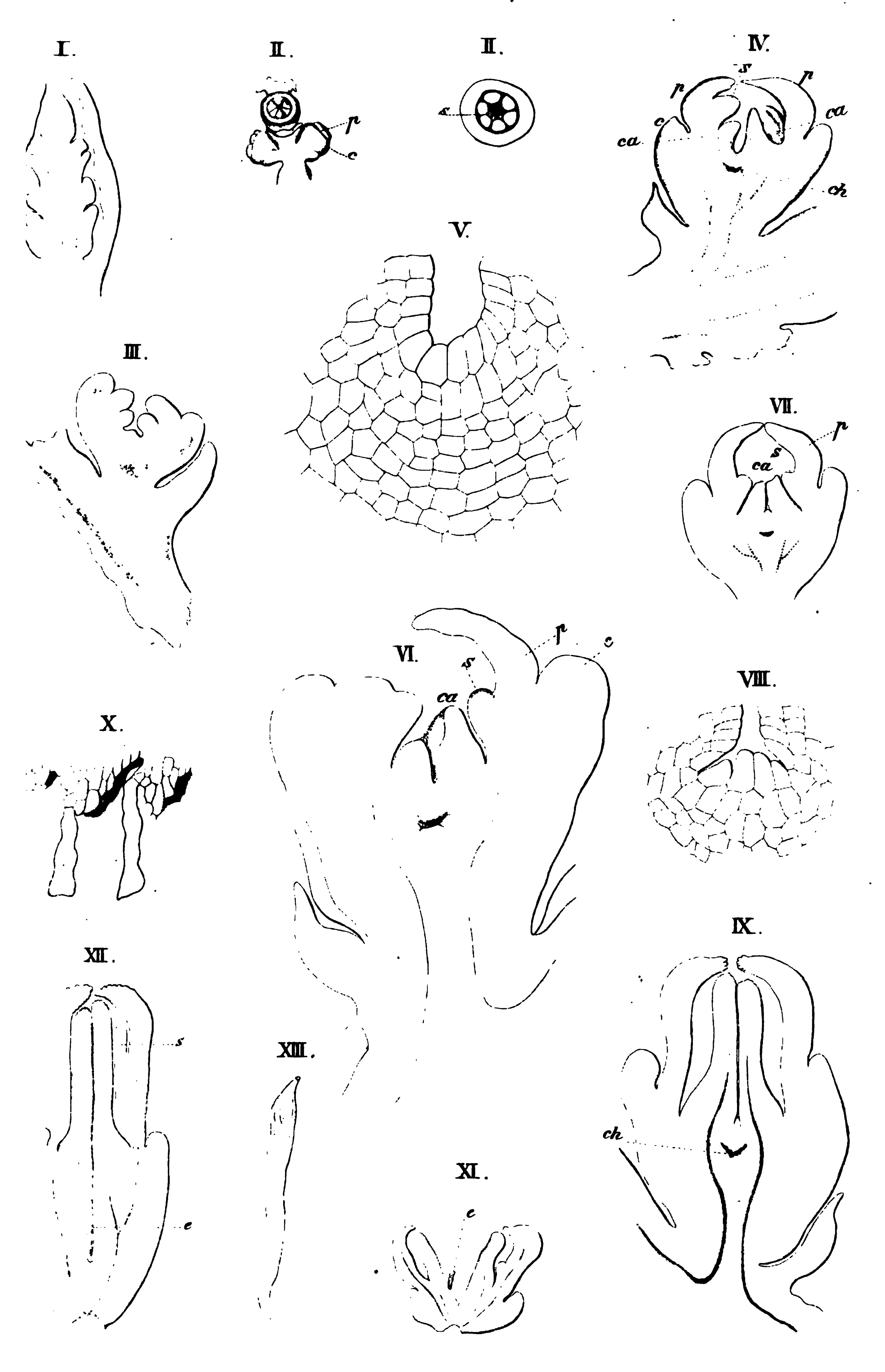
(Mitte Juli 1854.)

- 7.8.9. Unbefruchtete Embryosäcke, unverletzt frei präparirt. Vgr. 150.
- 10. Vor Kurzem befruchteter Embryosack, frei präparirt. Das Stück des scheitelständigen Anhängsels desselben, an welchem der daneben herabsteigende Pollenschlauch haftet, ist abgerissen und liegt links neben der Rissstelle. Gleiche Vgr.
- 11. Oberer Theil eines etwas weiter vorgerückten, frei präparirten Embryosacks. Das scheitelständige Anhängsel desselben ist völlig unverletzt. Die Spitze des Pollenschlauchs (*p*) haftet etwas unterhalb der Ansatzfläche des befruchteten Keimbläschens (*k*) an der Aussenseite des Embryosacks. Bei der Präparation ist der Pollenschlauch von der Embryosackoberfläche hinweg gebogen worden, der er vorher dicht anlag. Gleiche Vgr.

# Index.

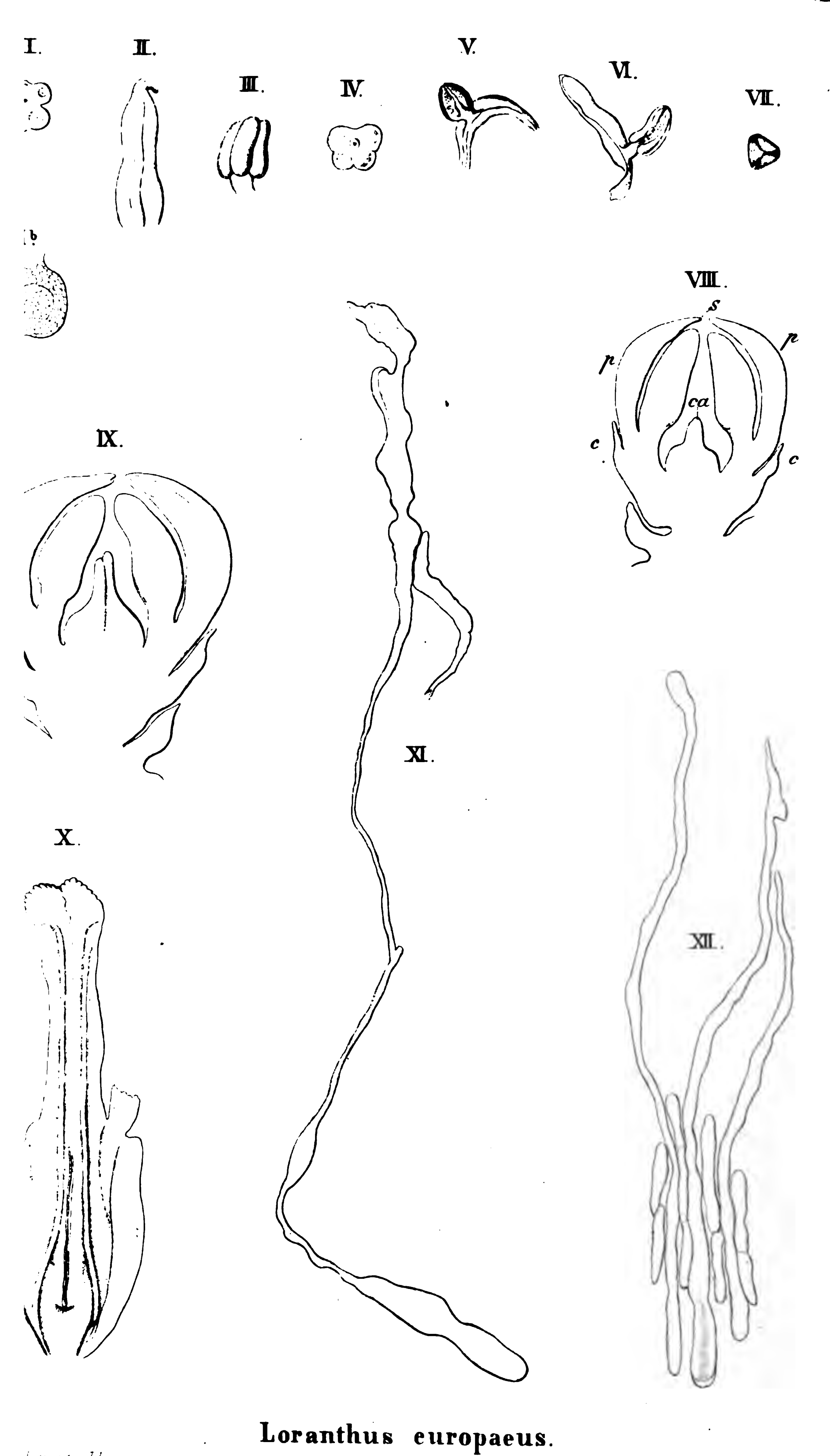
Berichtigung. S. 610—612 lies statt Taf. XIV. . . . Taf. XX.
,, XV. . . . ,, XXI.

Druck von Breitkopf und Härtel in Leipzig.

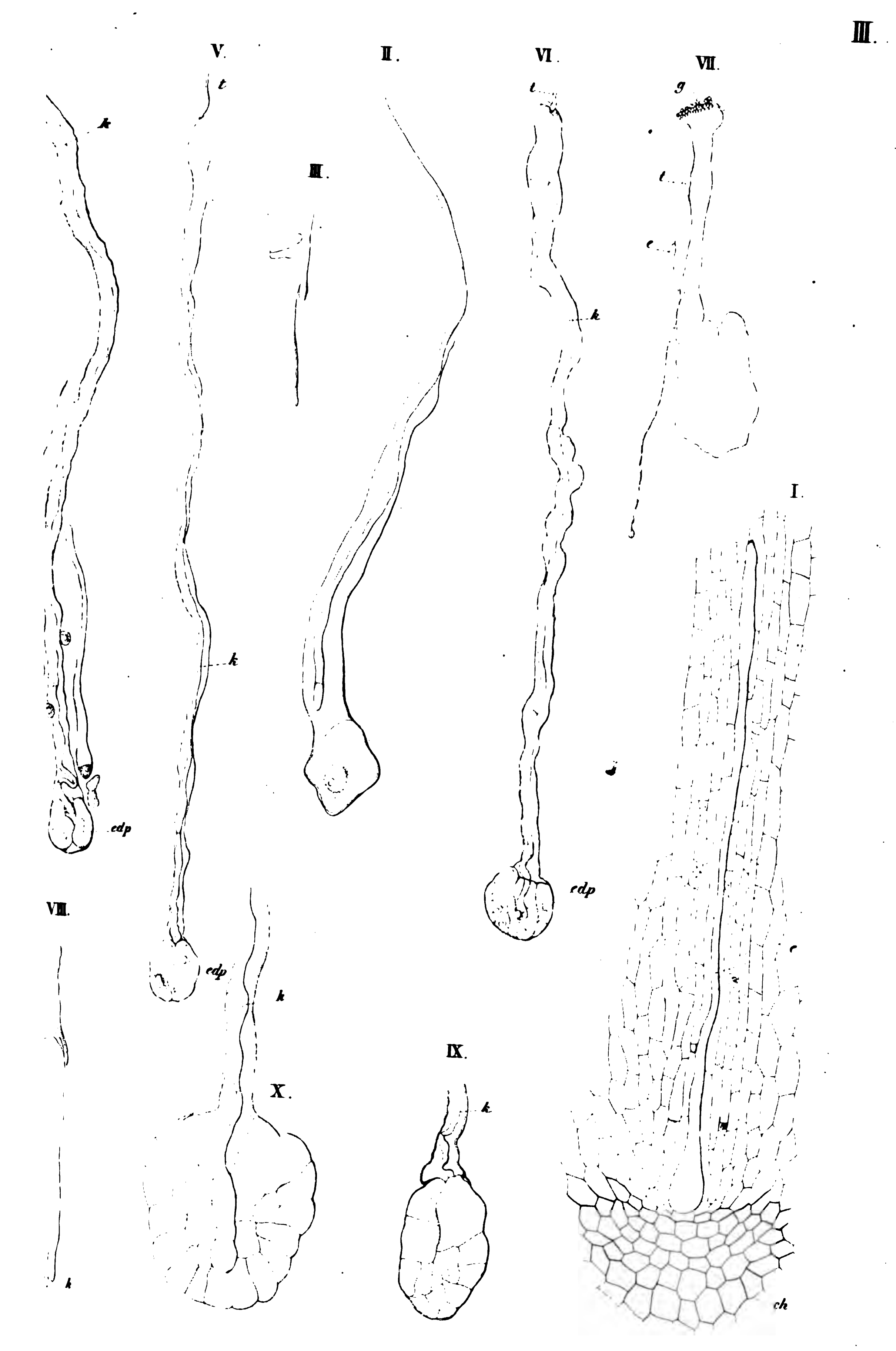



**Loranthus europaeus.**

Lith. Anst. v. W. Bencher: Leipzig

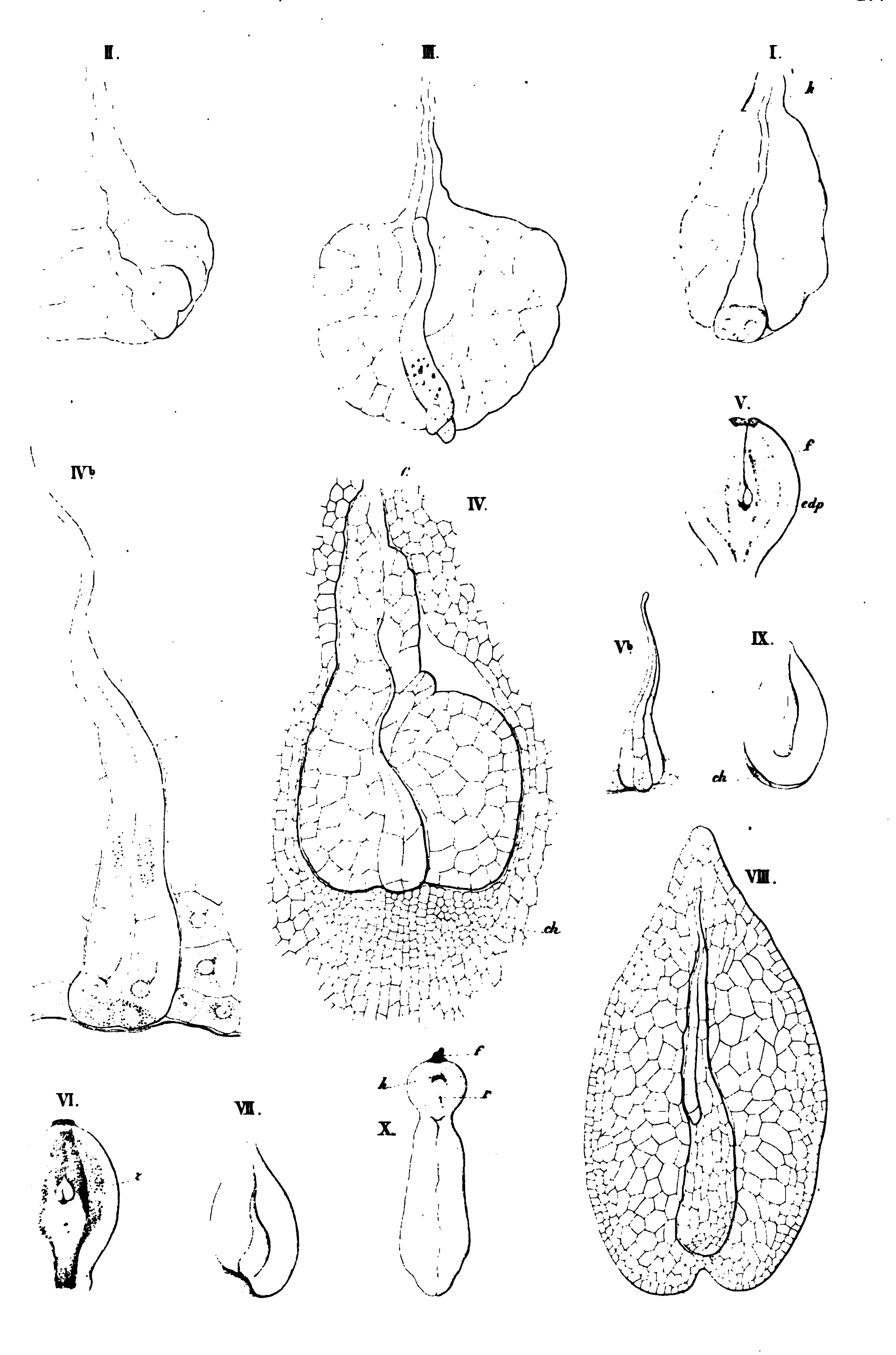



**Loranthus europaeus.**



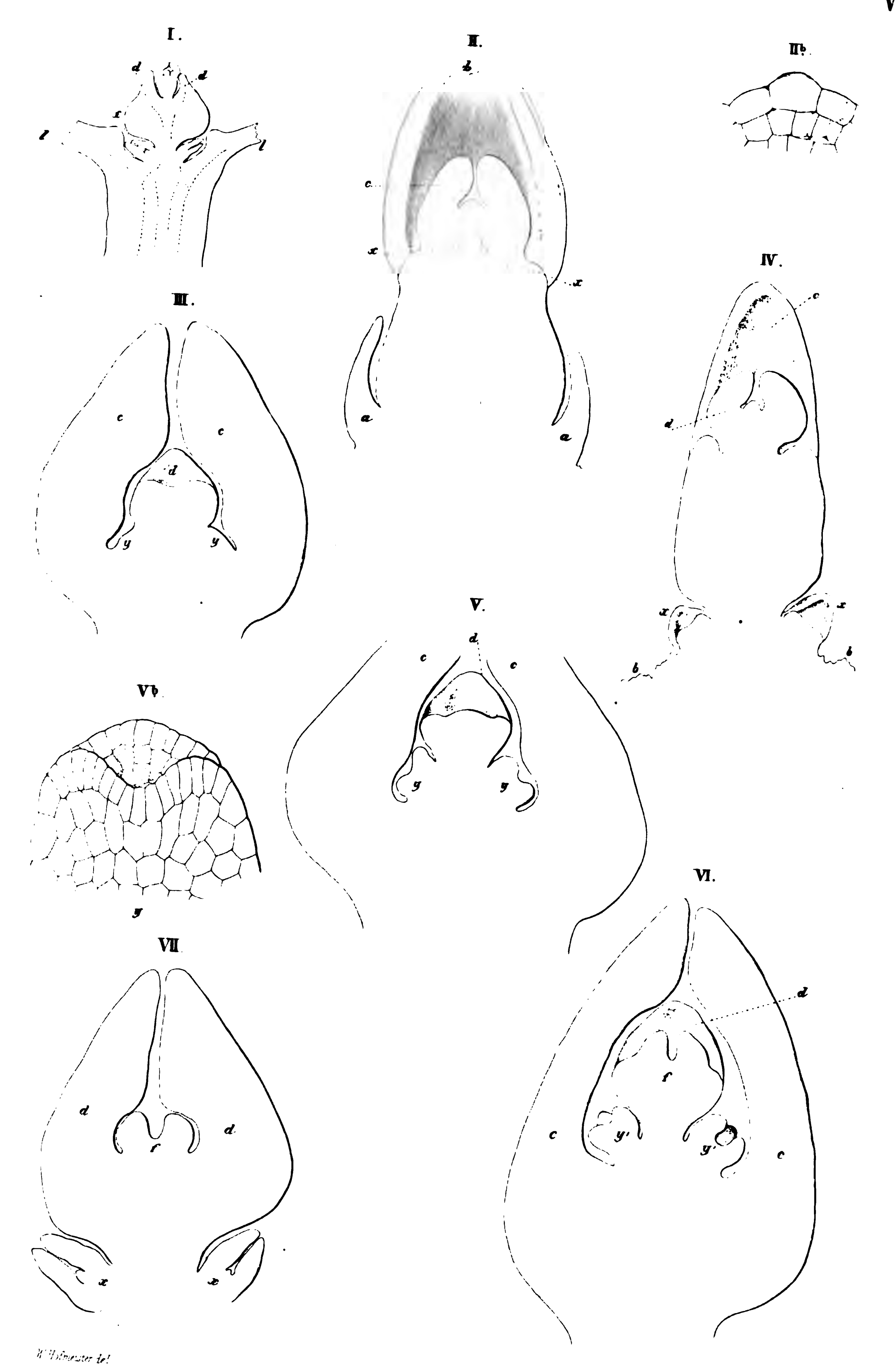

Loranthus europaeus.

IV.




Lith. Anst. v. C. Fischer & Leipzig

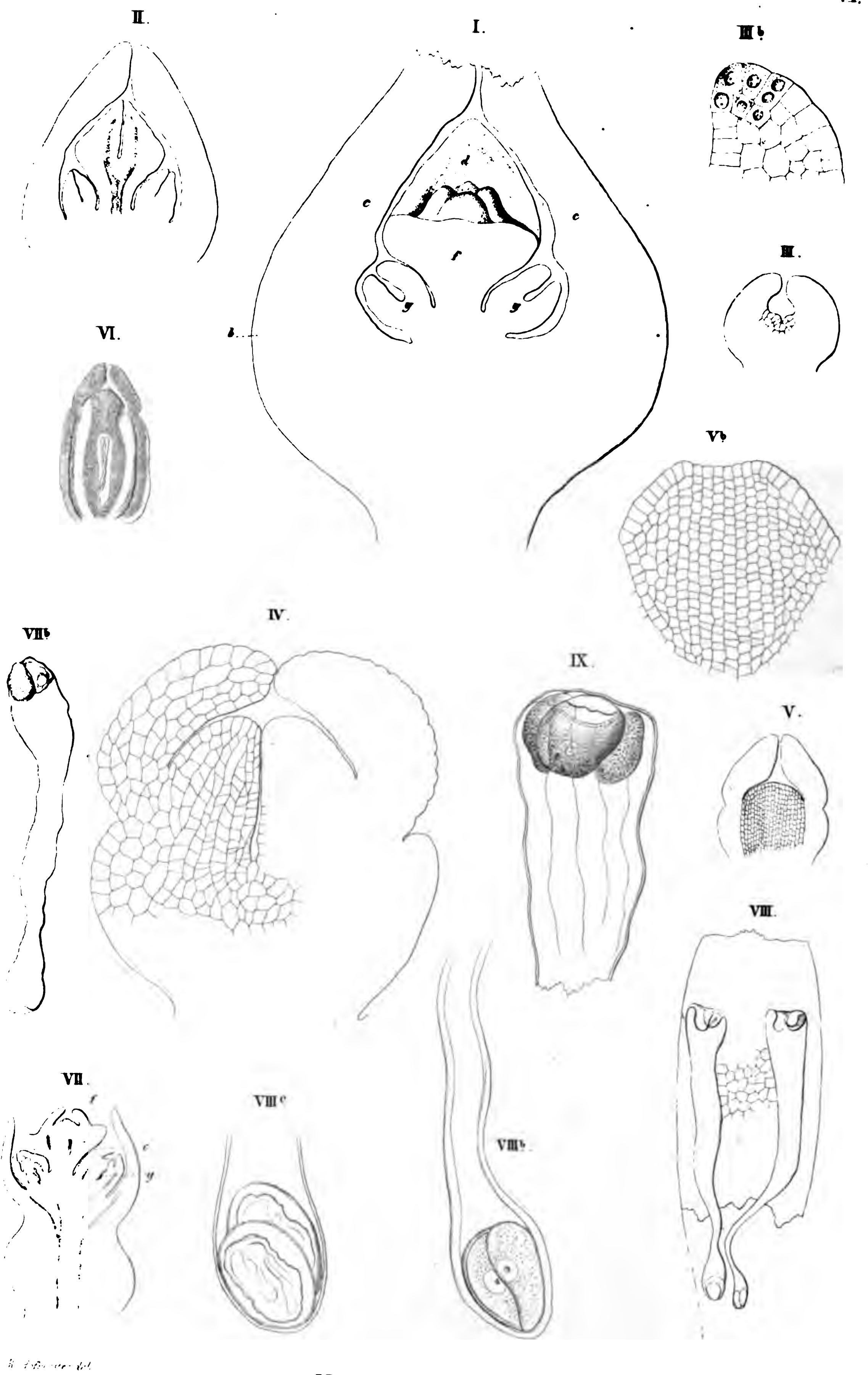
V.




W. Hofmeister del.

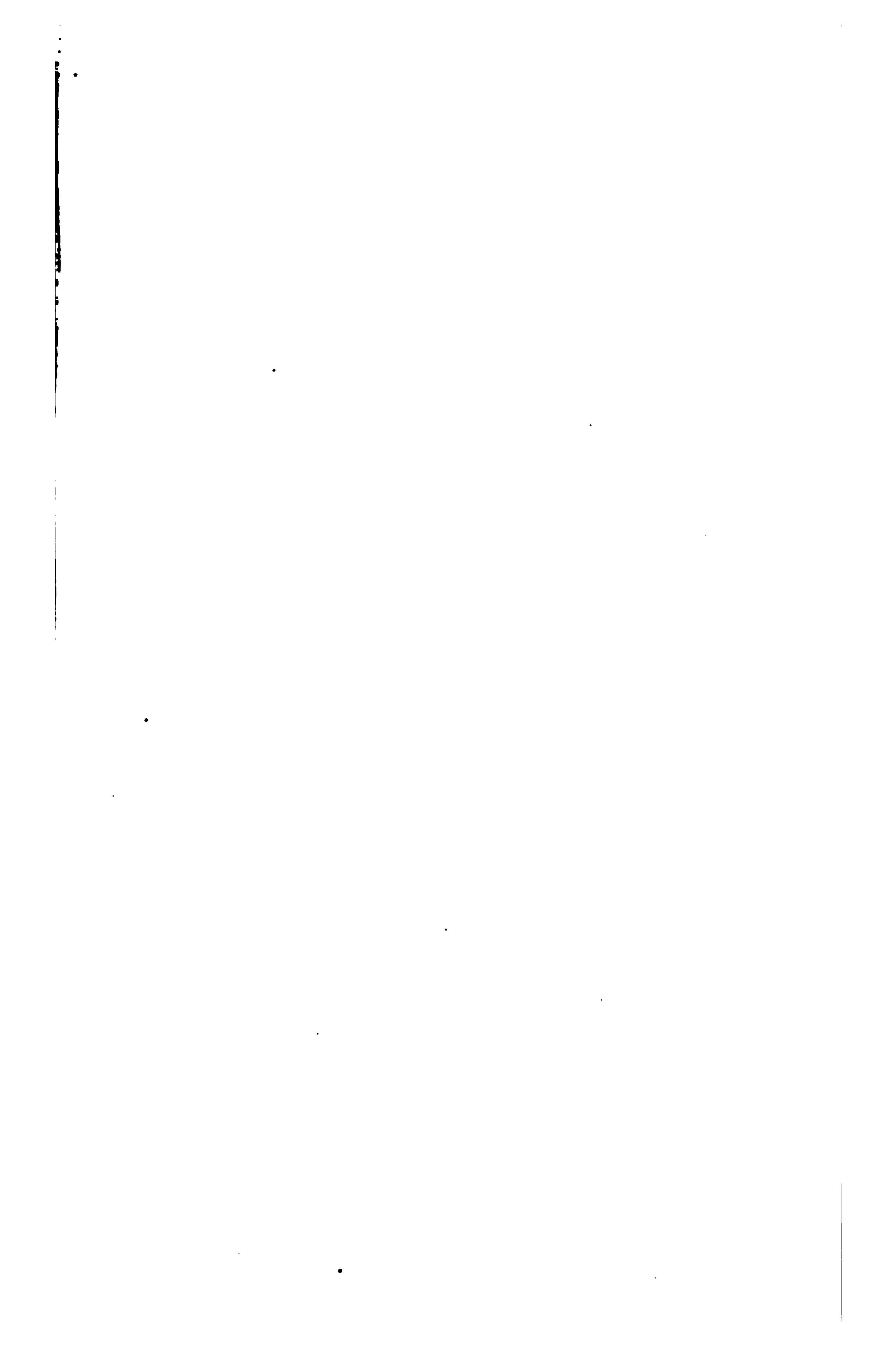
**Viscum album.**

Lith. Anst. v. M. ... Leipzig




Viscum album.

Lith. Anst. v. H. Hascher i. Leipzig

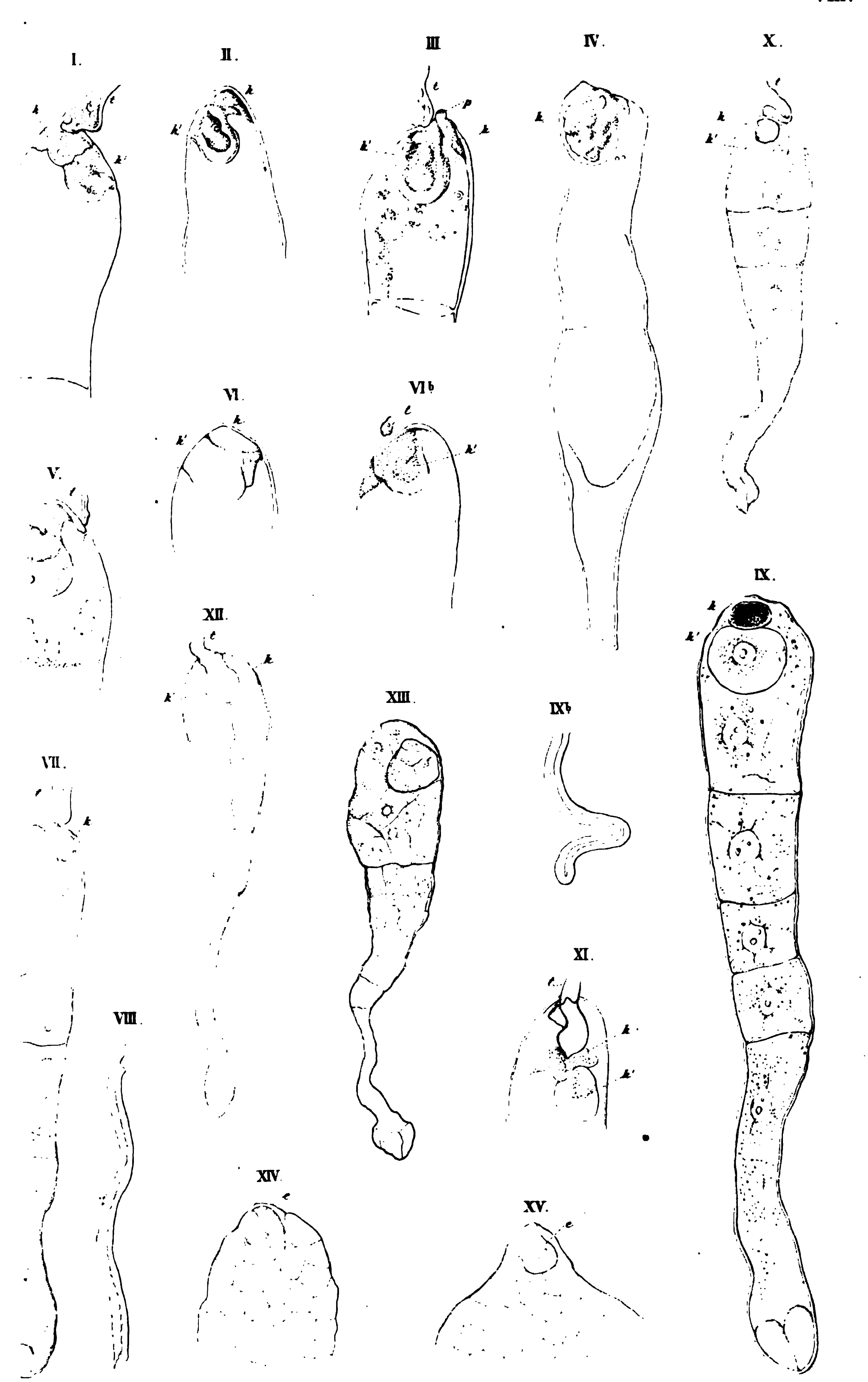


VII.

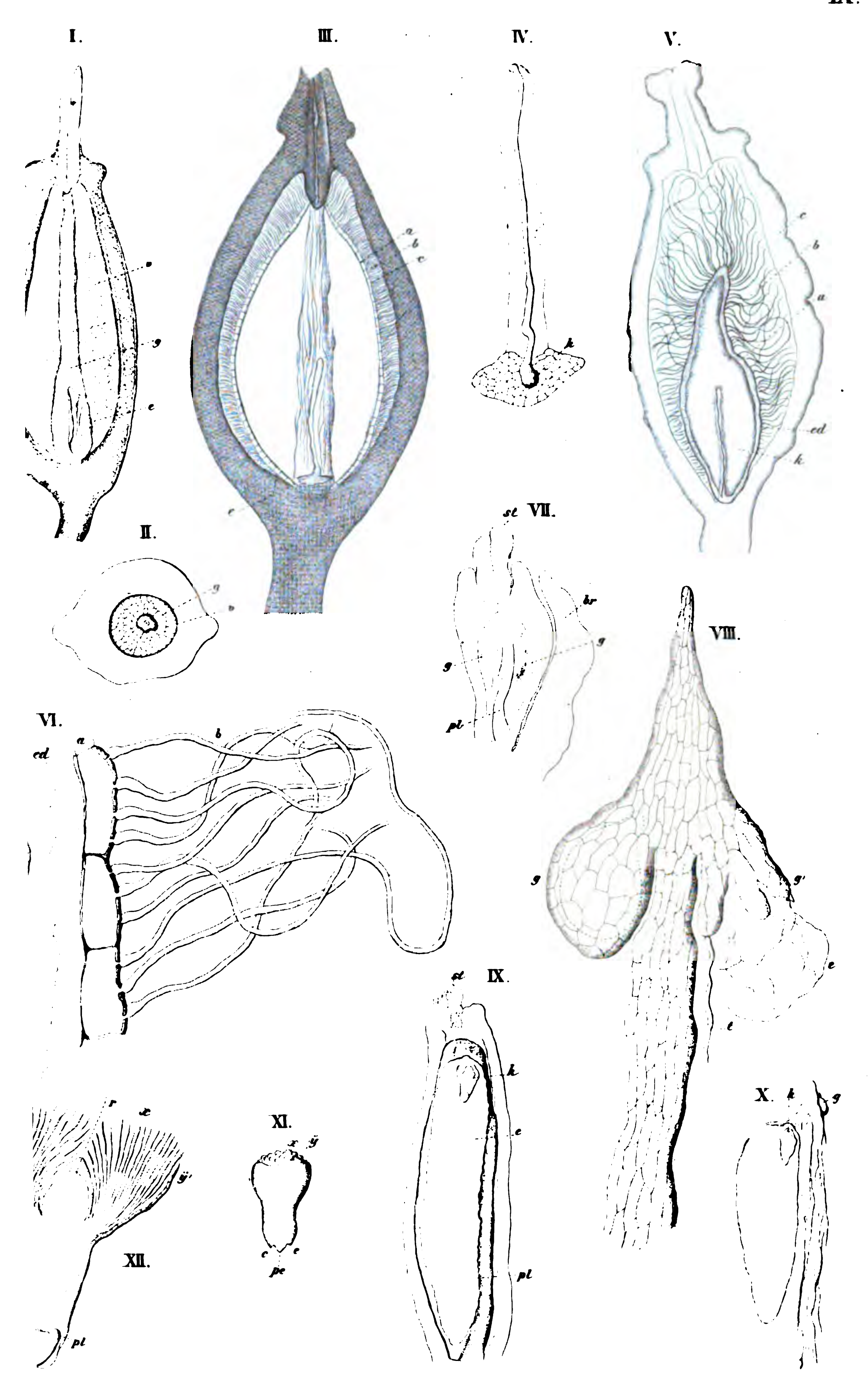



Viscum album.

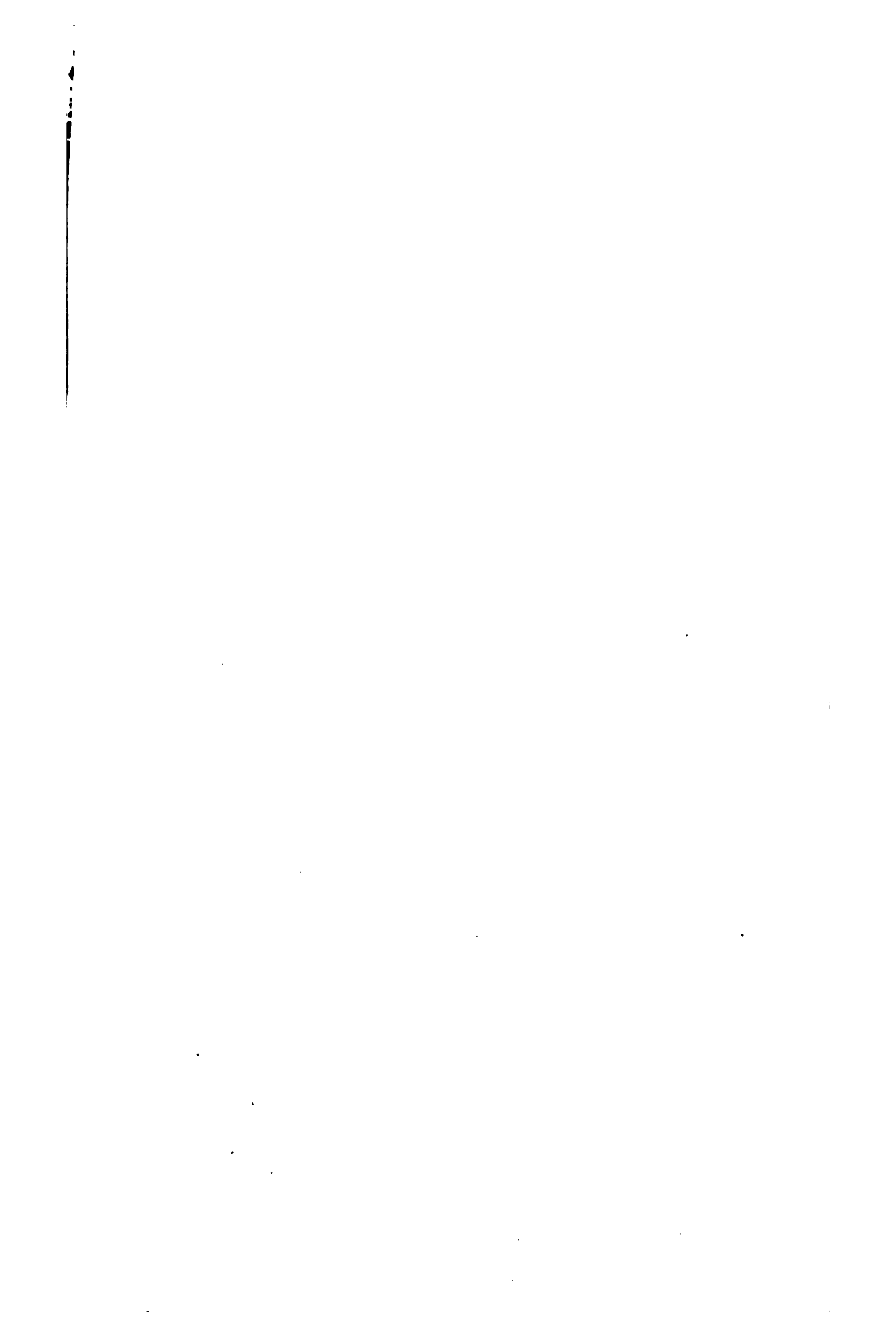


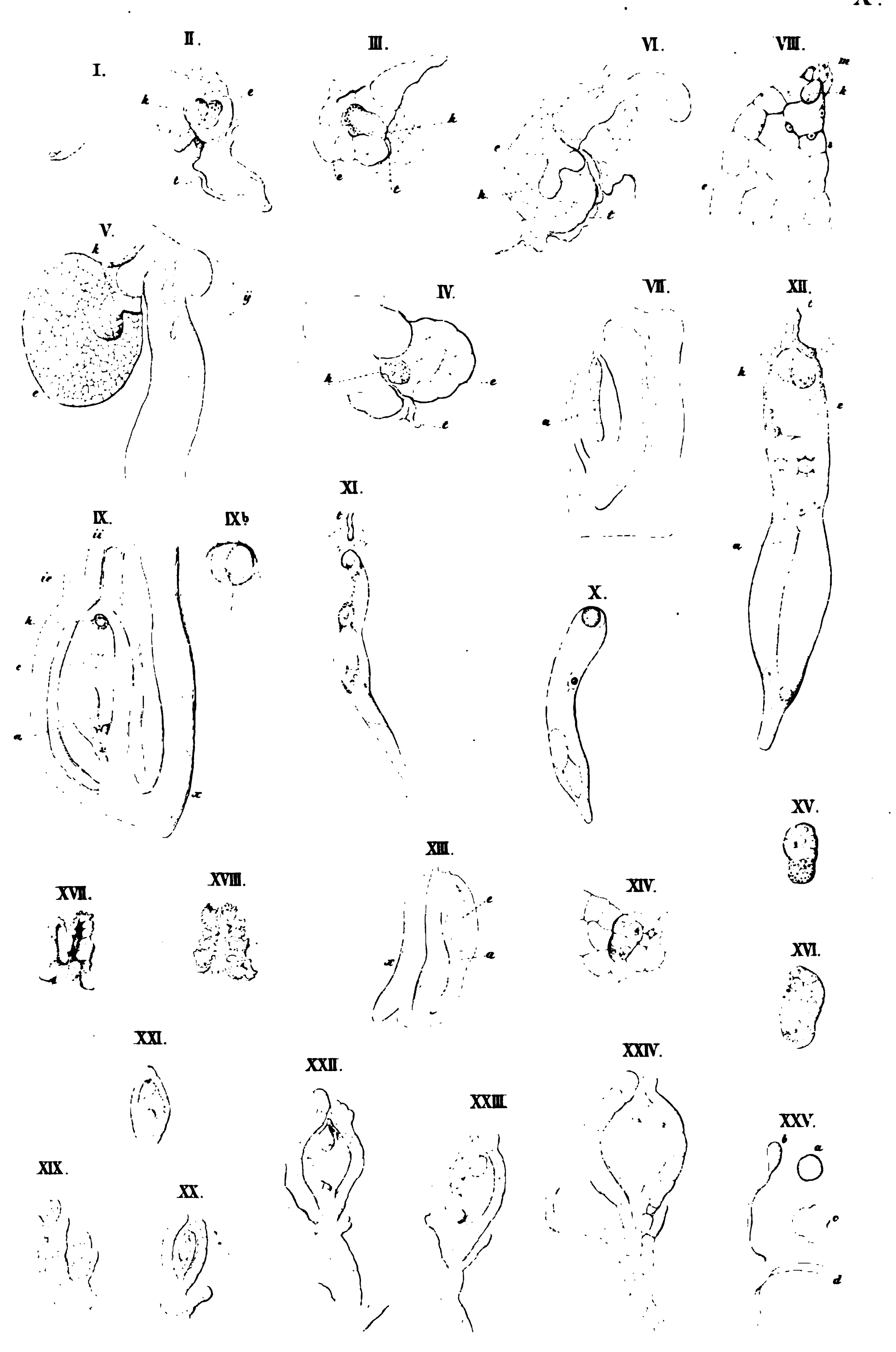



Viscum album

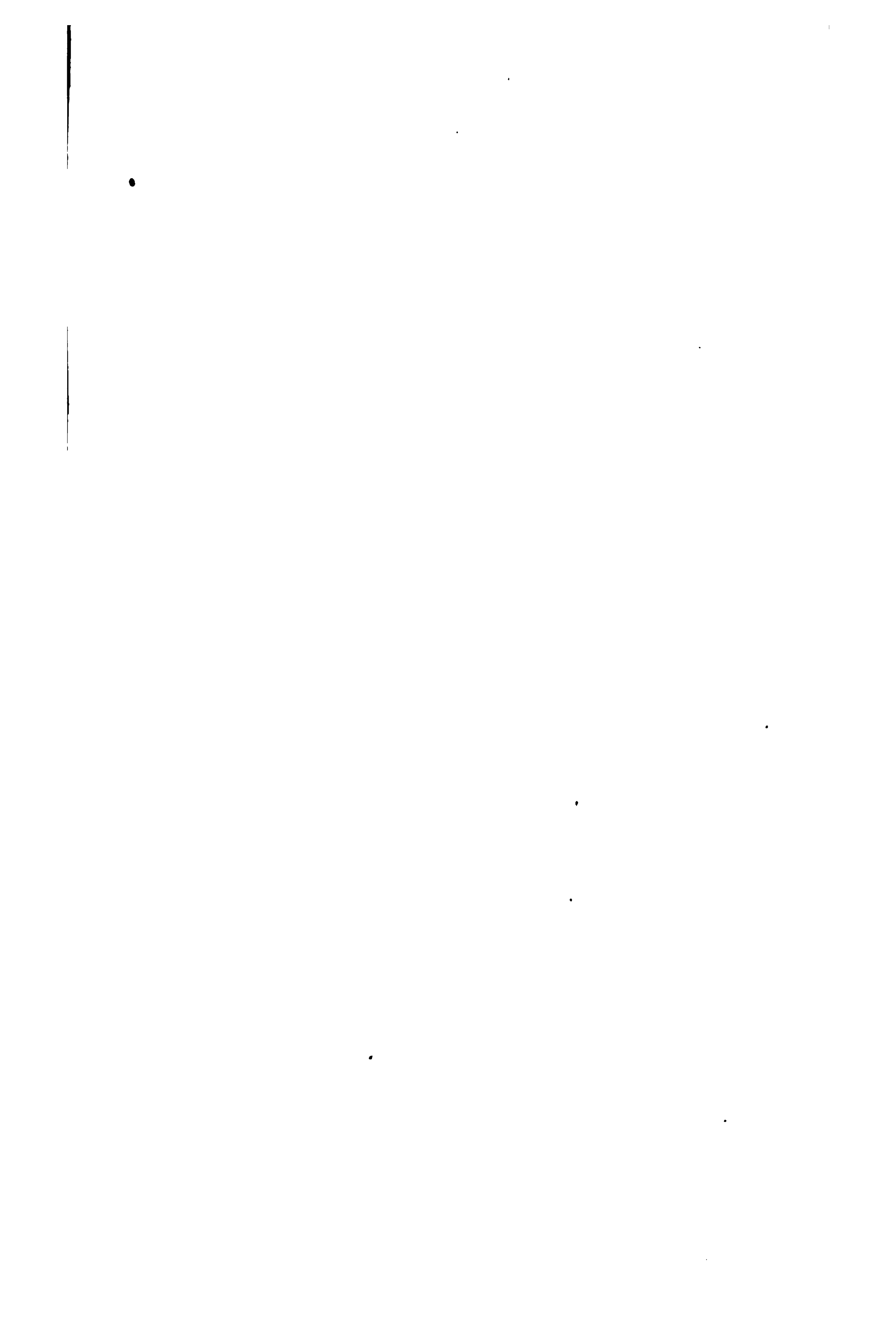


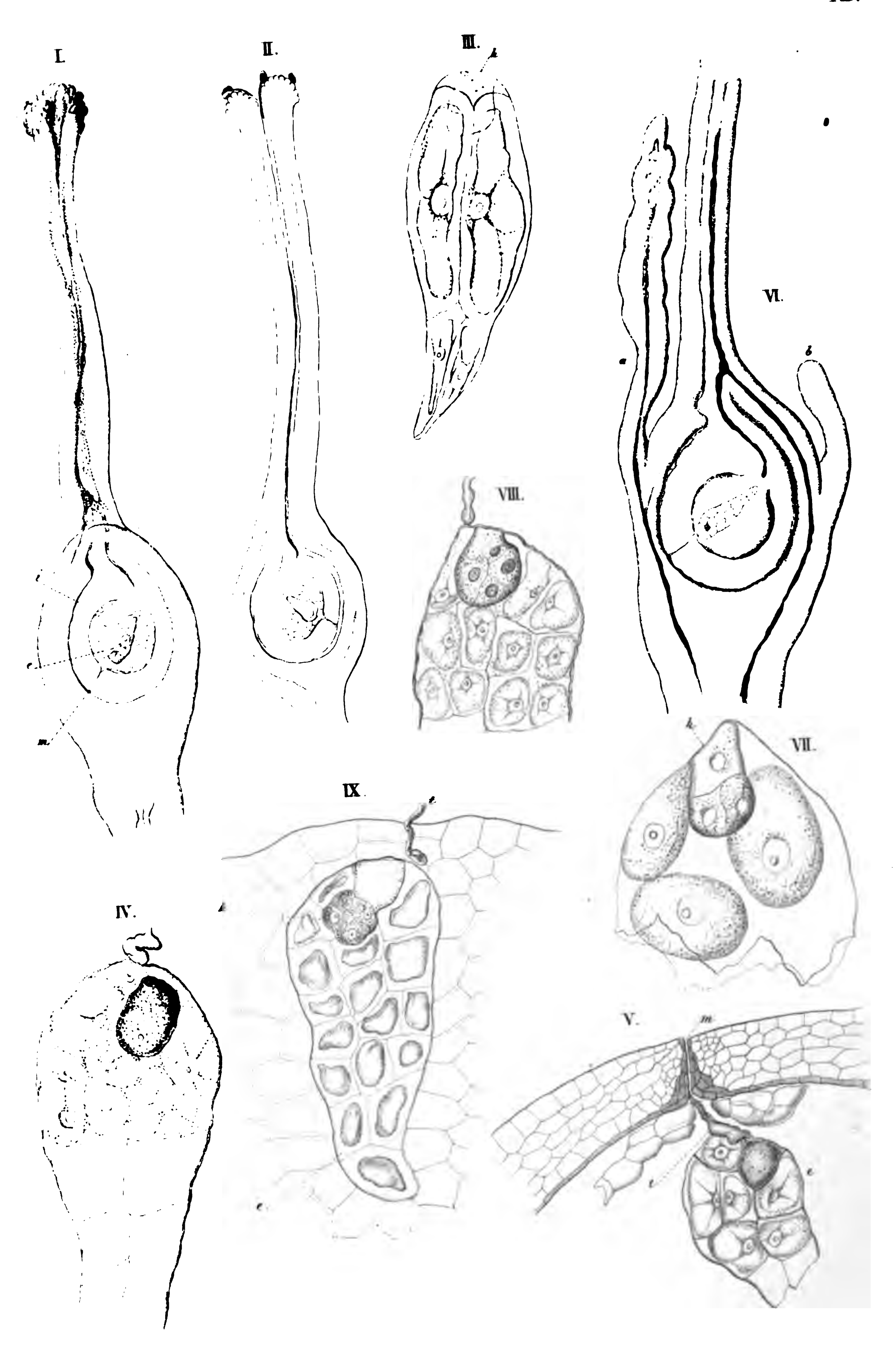

I Lepidoceras Kingii. VII–X Myzodendron quadriflorum. XI. XII. Myzodendron linariaefolium.





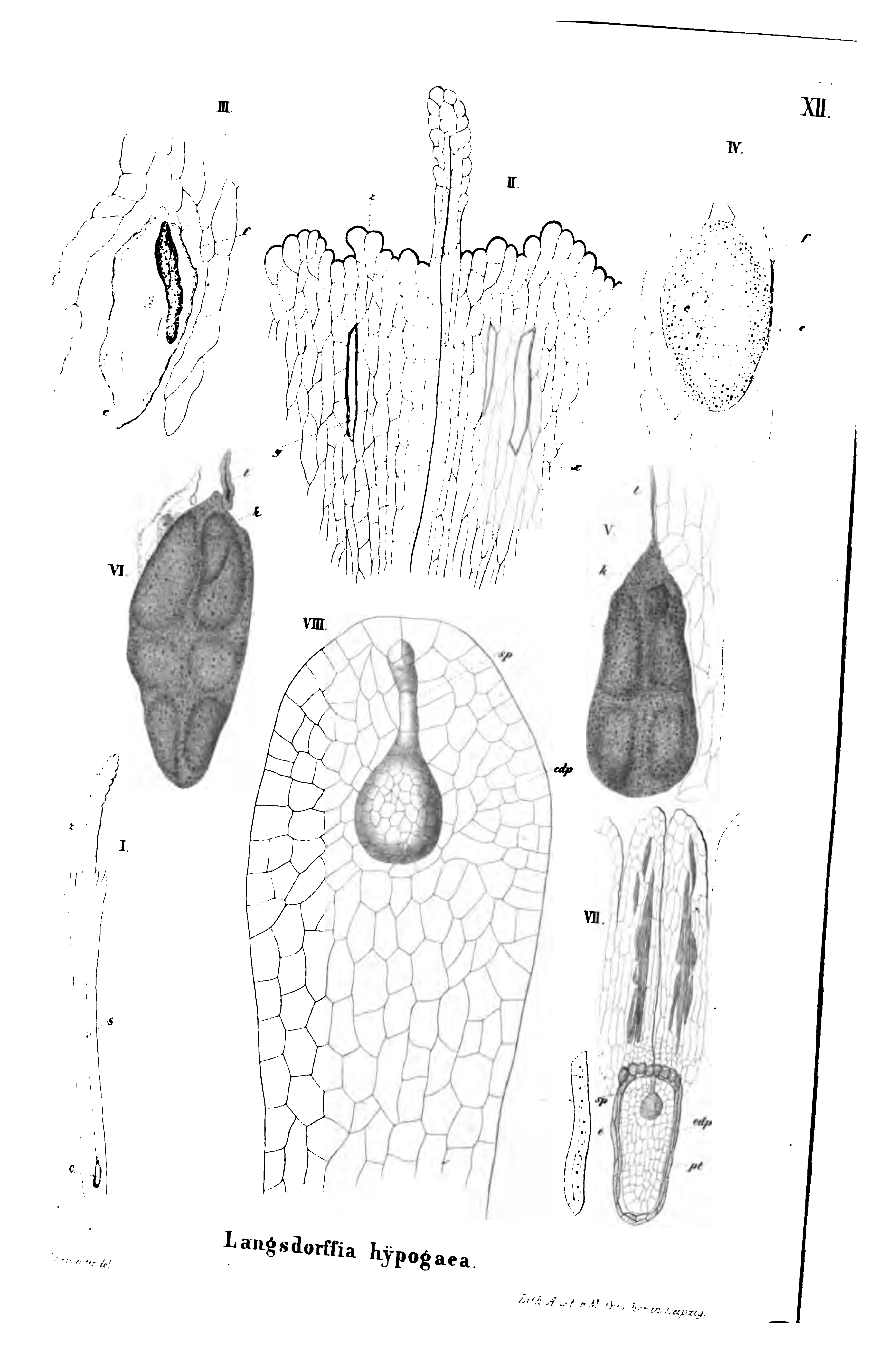

I–V Thesium alpinum. VI Thesium intermedium. VII. VIII Aristolochia clematitis.
X–XII Asarum canadense. IX XIII–XVI Asarum europaeum. XVII–XXV Cytinus Hypo=

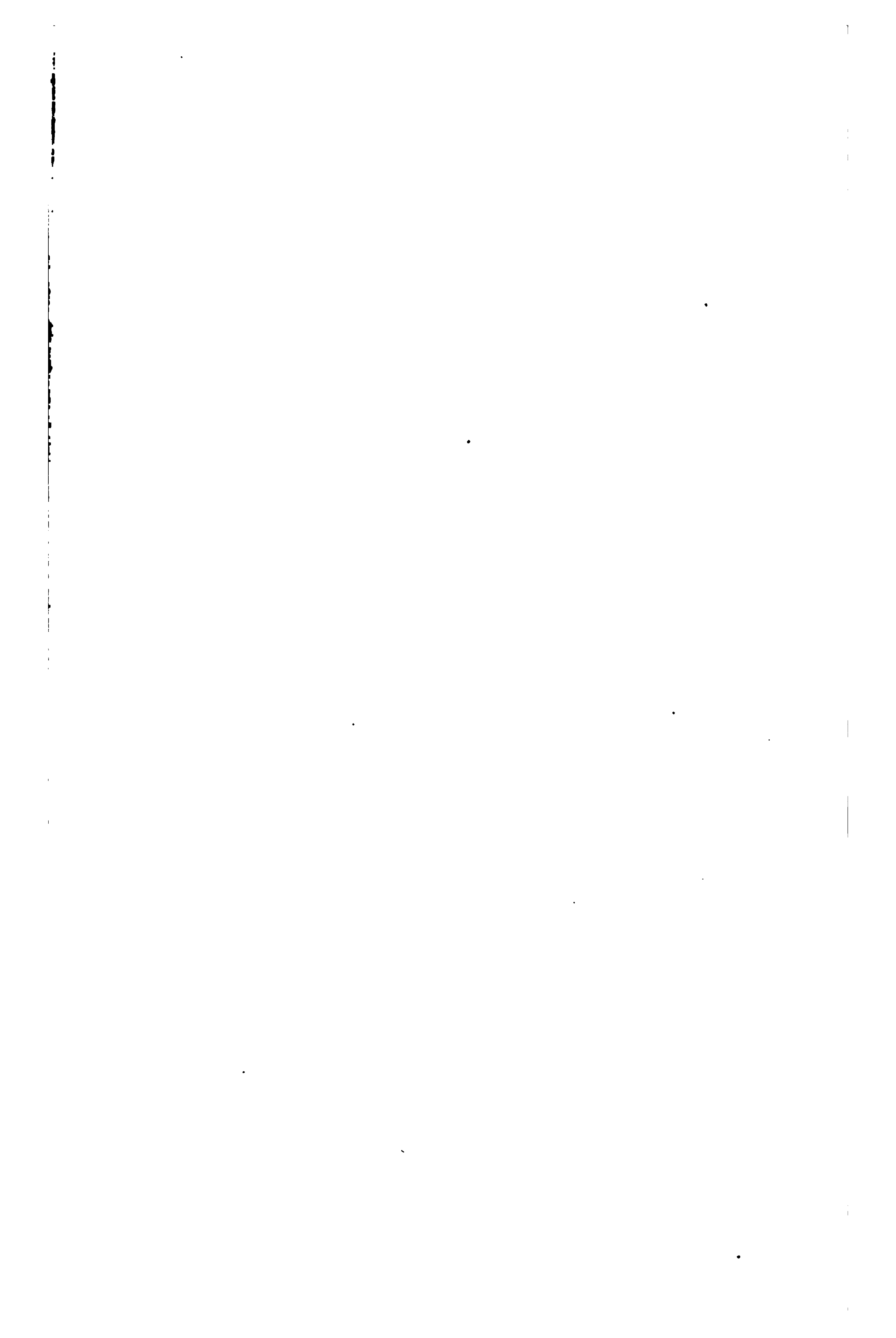





Cÿnomorium coccineum.

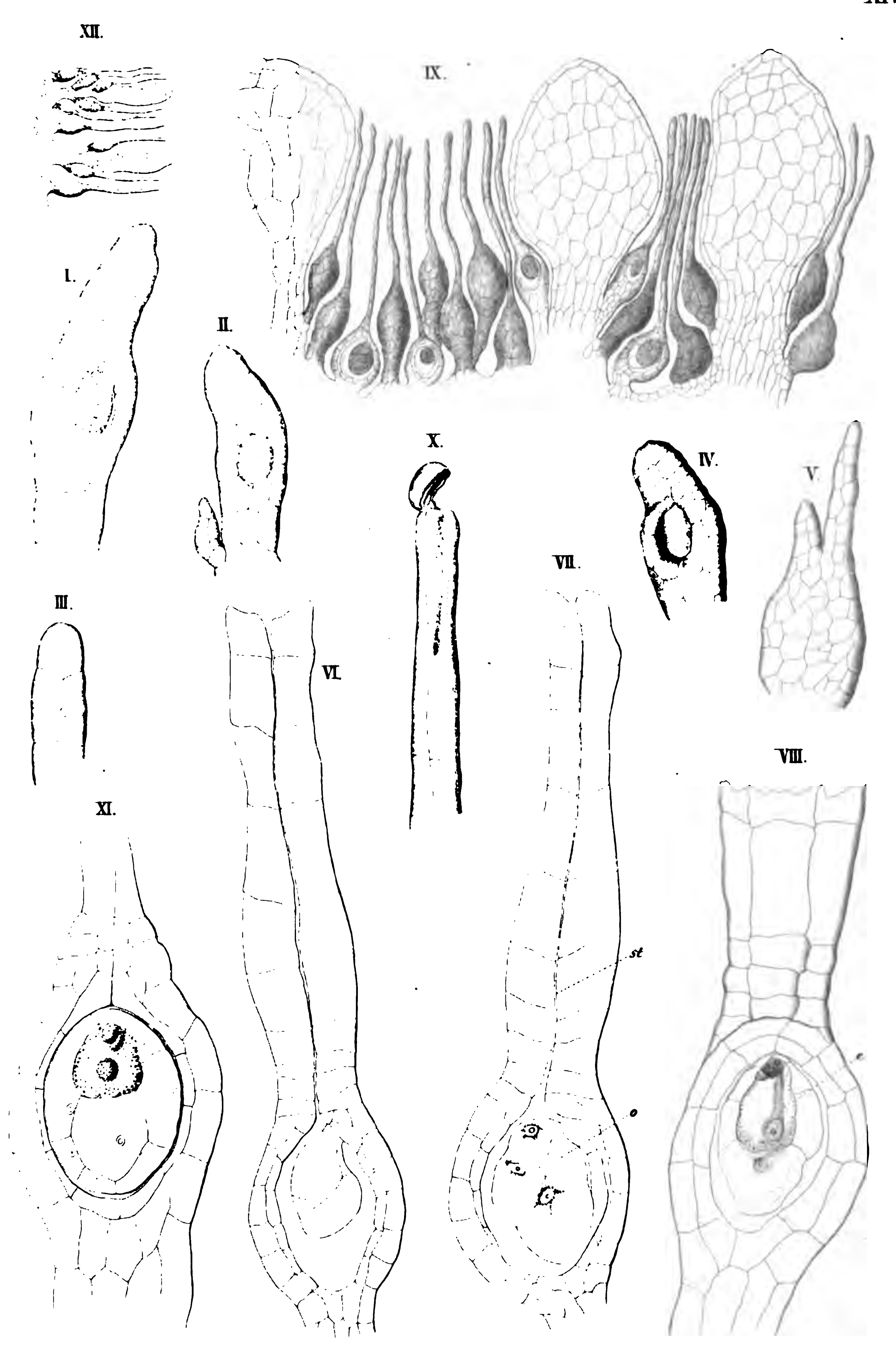
Lith. Anst. v. M. Drescher in Leipzig


XII.
III.
II.
IV.
I.
V.
VI.
VII.
VIII.
Langsdorffia hypogaea.



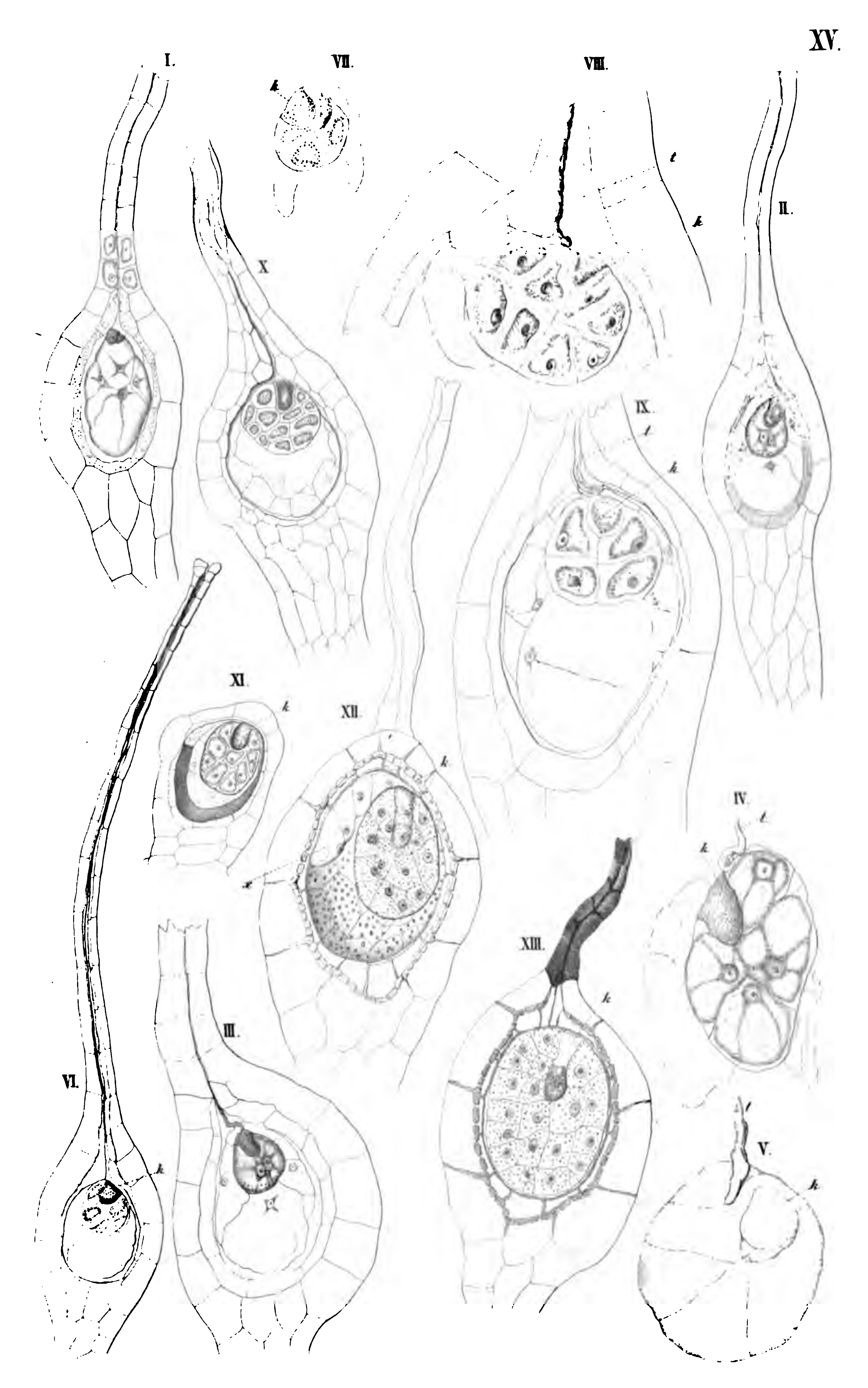



**Sarcophyte sanguinea.**




I–III Balanophora dioica. IV. V. XII. B. fungosa. VI. VII. VIII. B. involucrata. IX–XI. B. polyandra.

Lith. Anst. v. M. Frescher in Leipzig

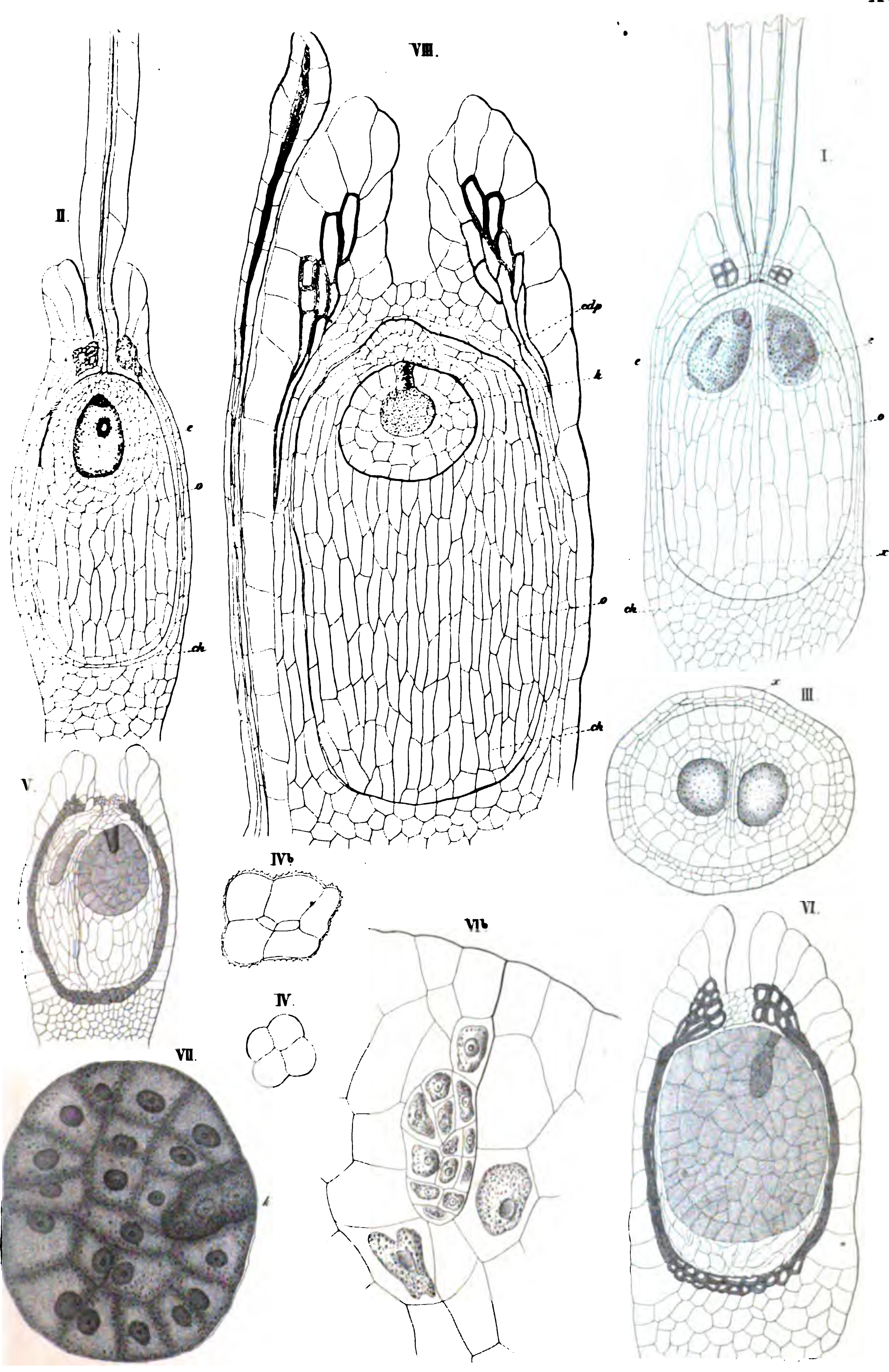



I–V. Balanophora polyandra. VI–XI. B. fungosa. XII. XIII. B. dioica.

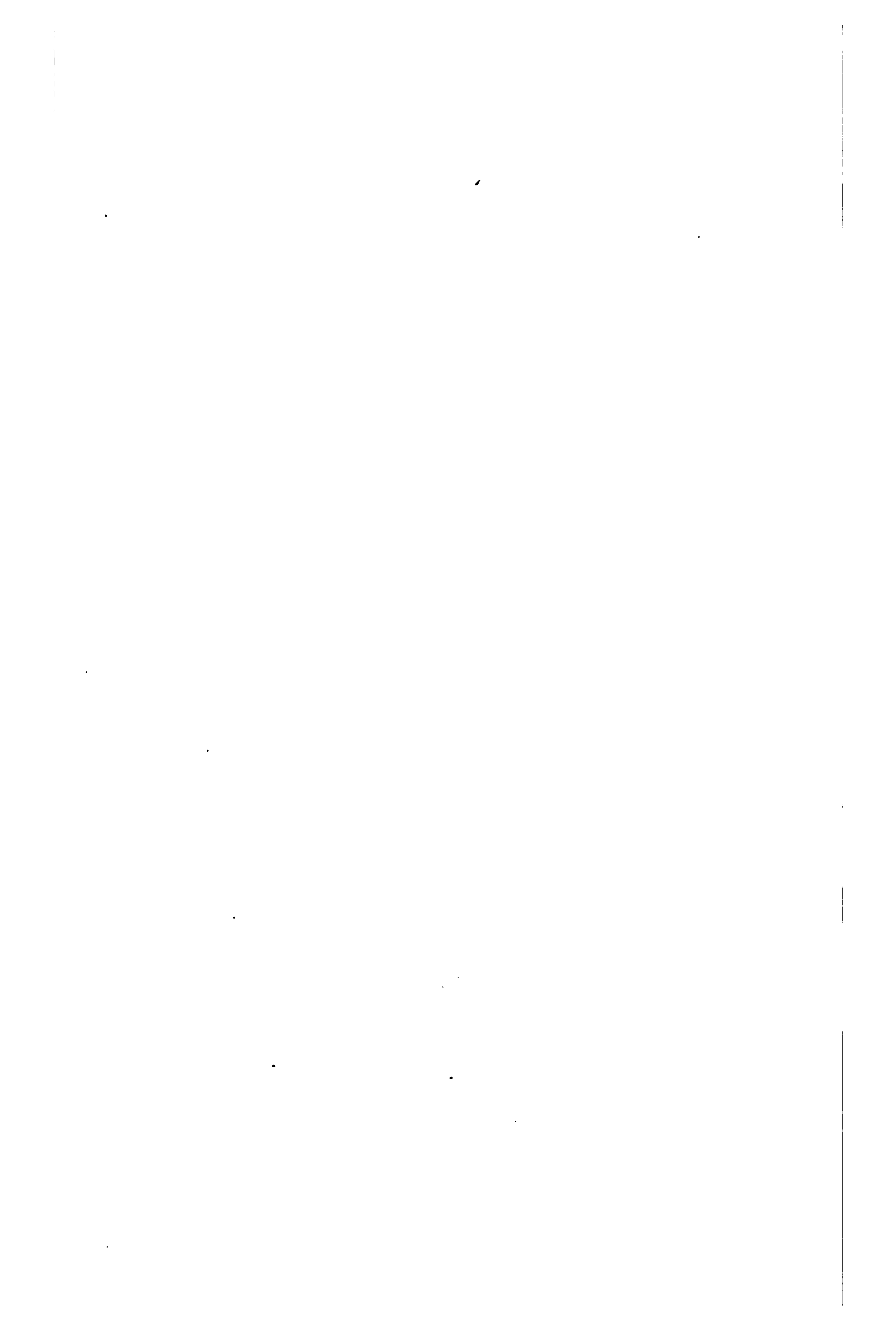


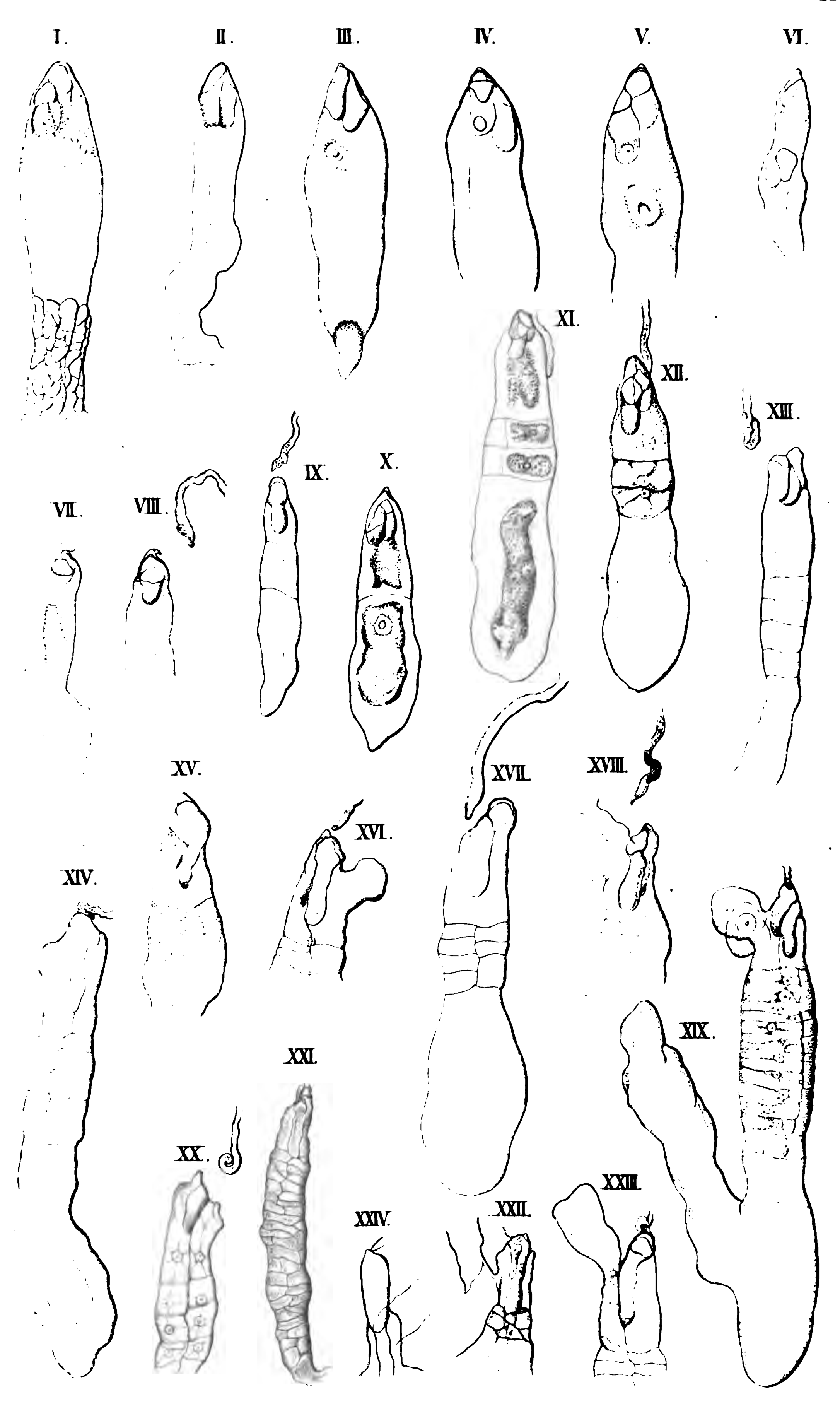


I-III Helosis mexicana. IV.V. H. guyanensis. VI-VIII. Rhopalocnemis phalloides. IX. Corynea crassa



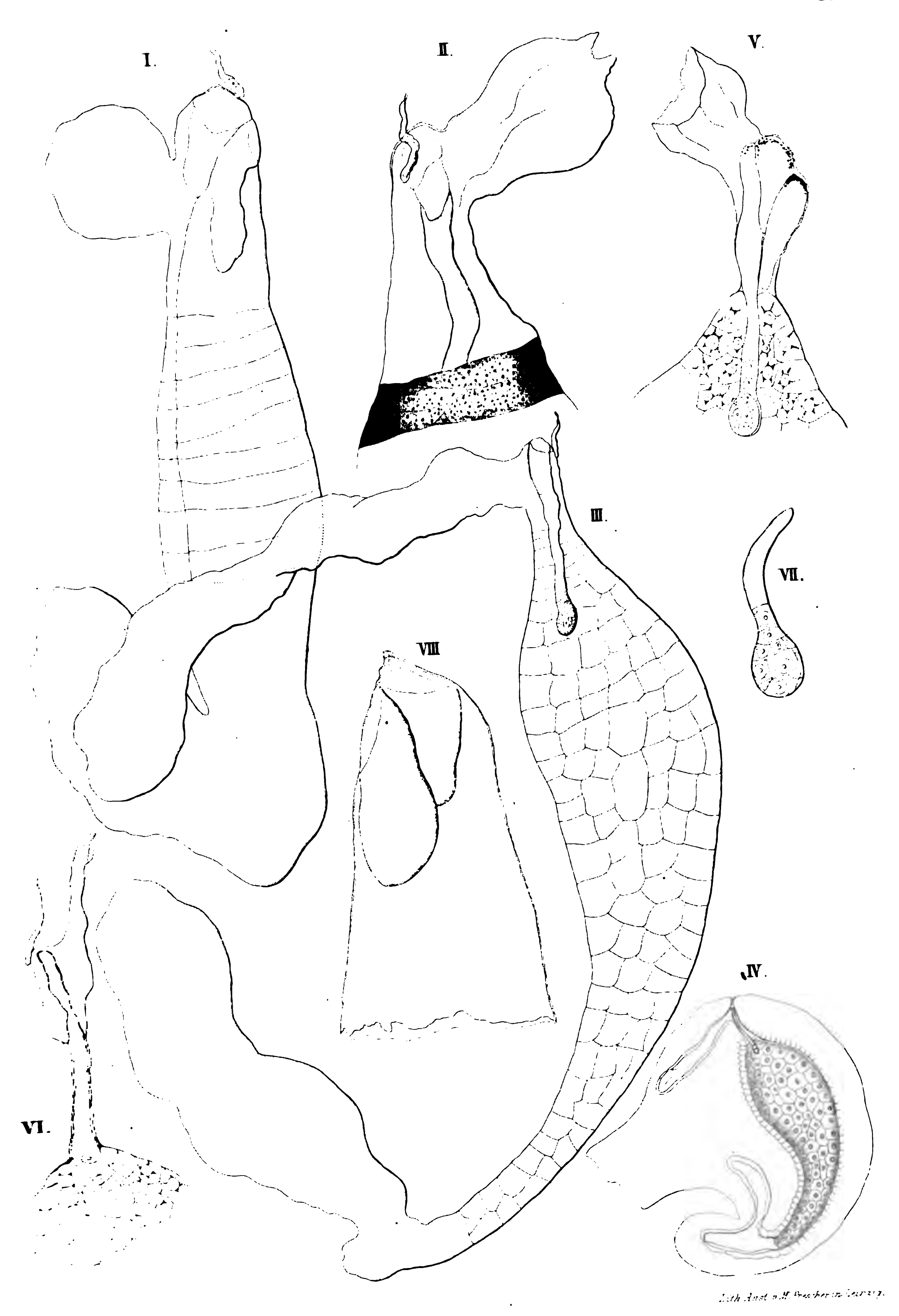

I–VI Scÿbalium fungiforme. VII. VIII. Phÿllocorÿne jamaicensis.



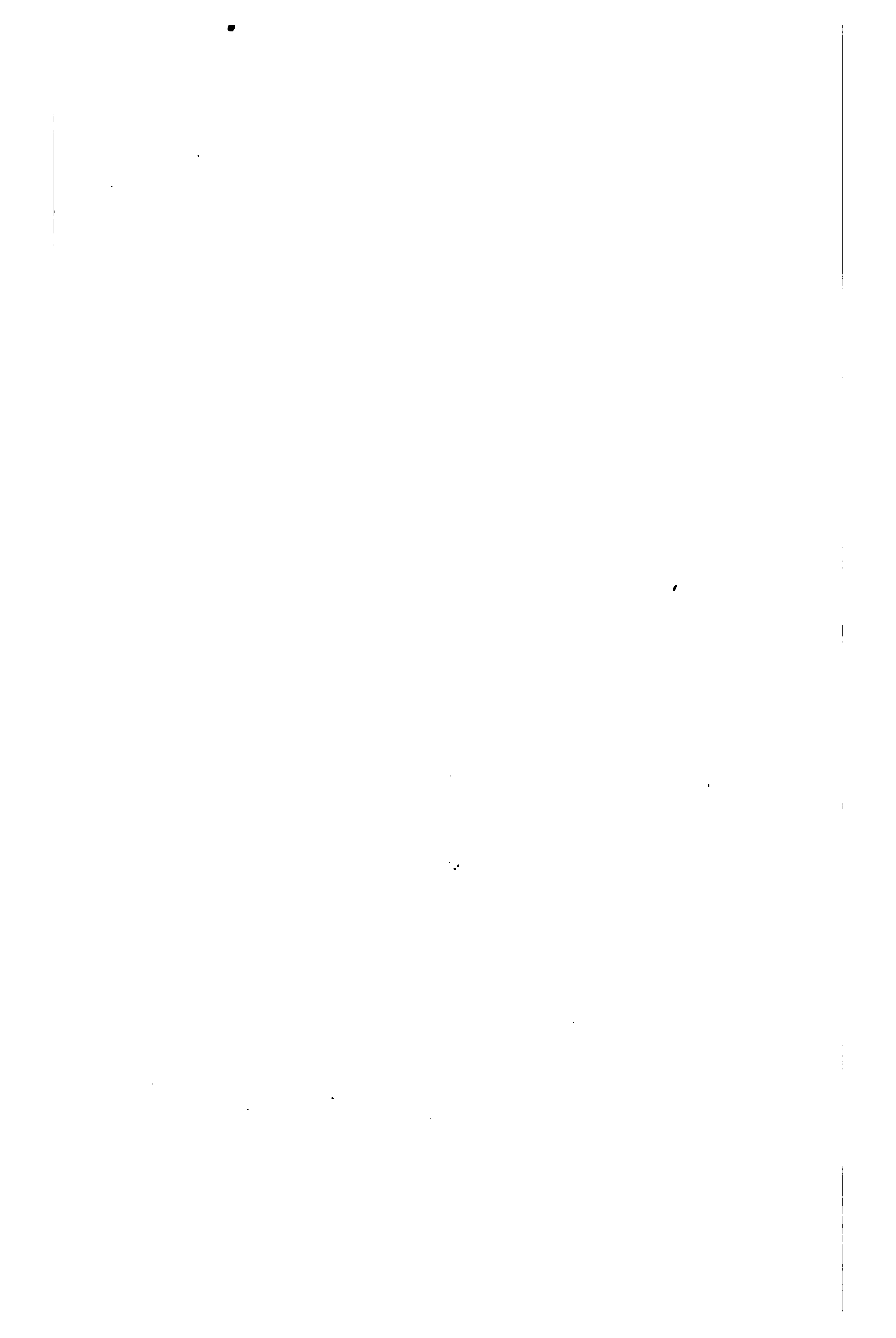


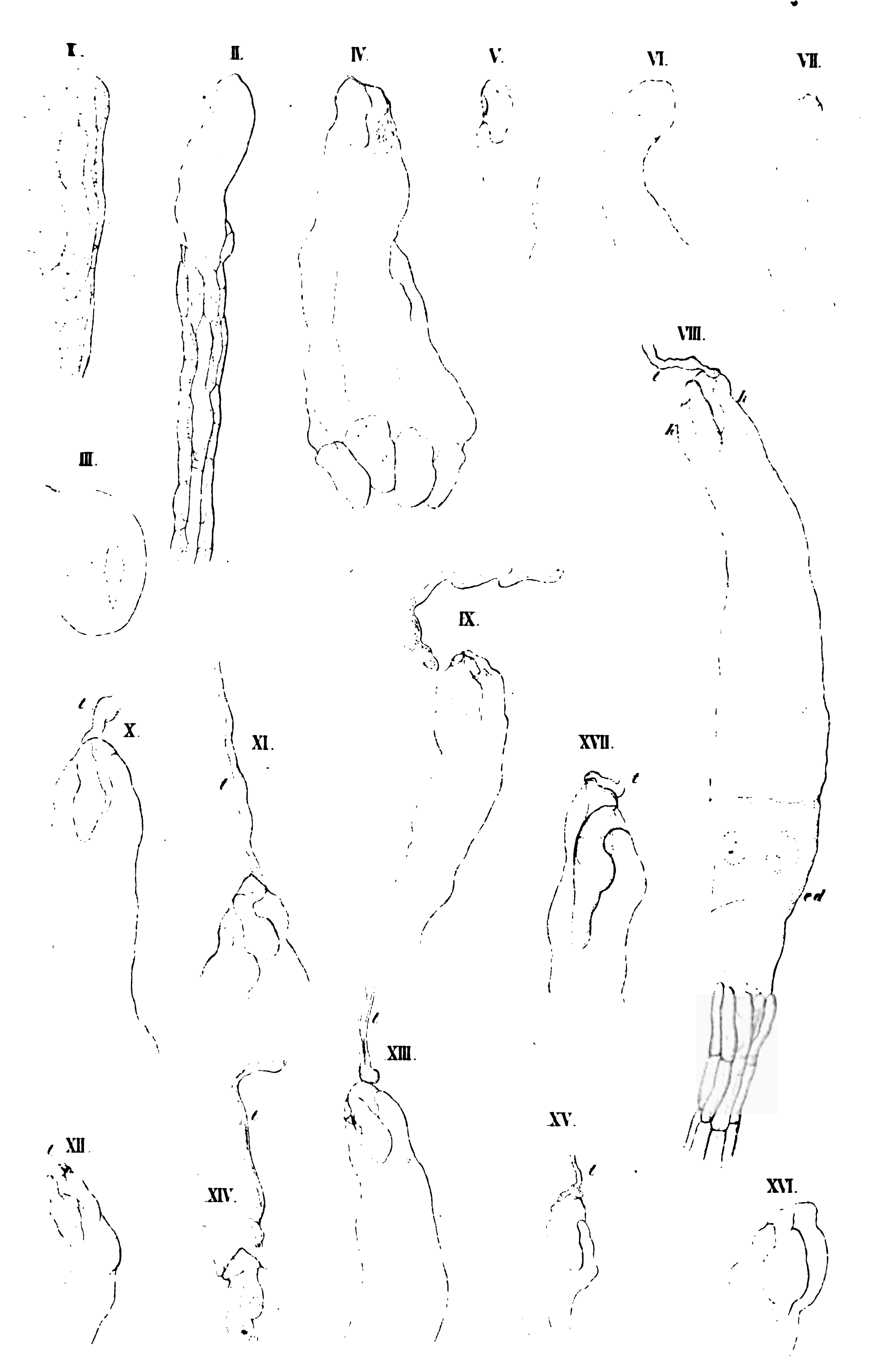

Lathraea squamaria.

XIX.

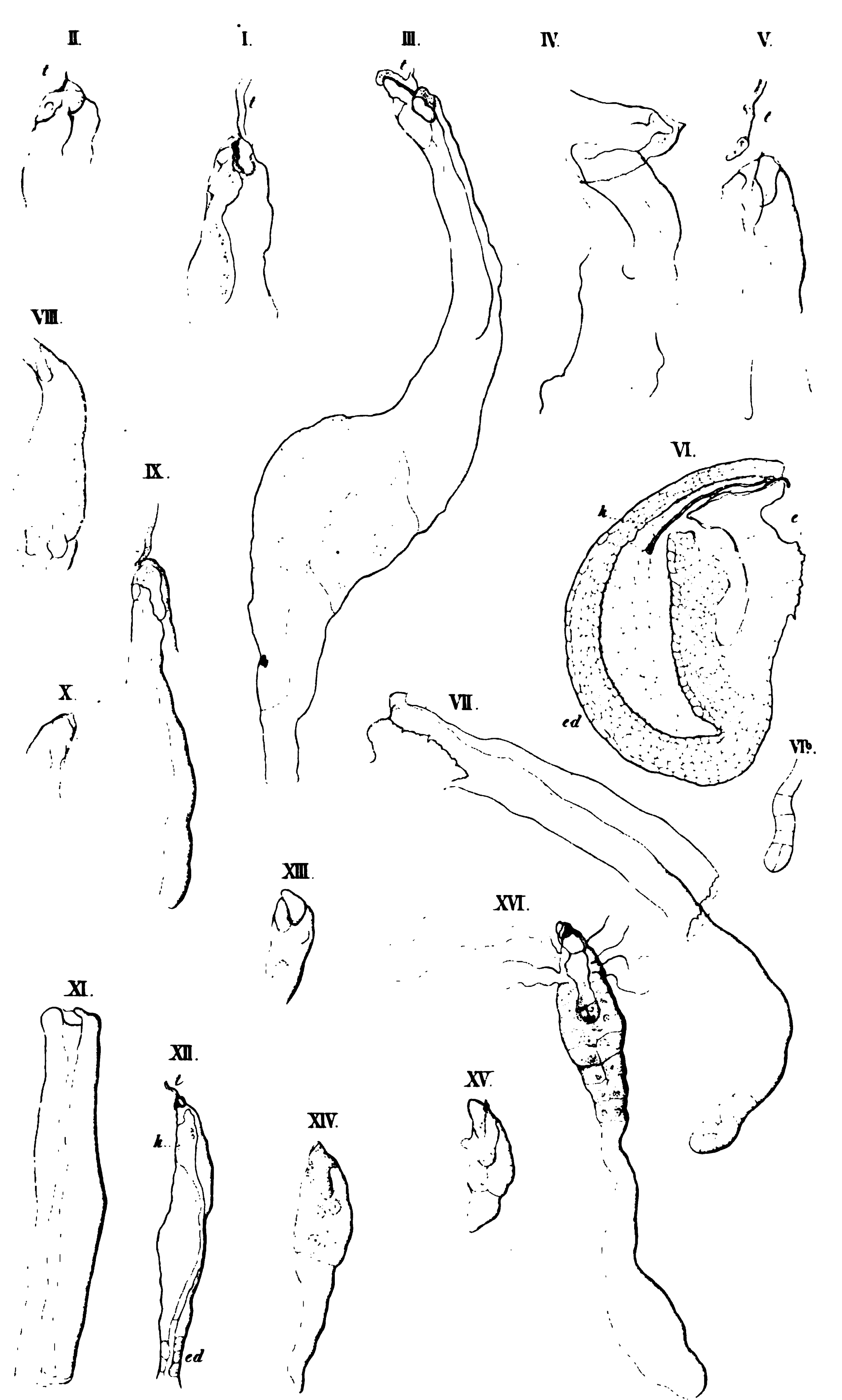



Lathraea squamaria.



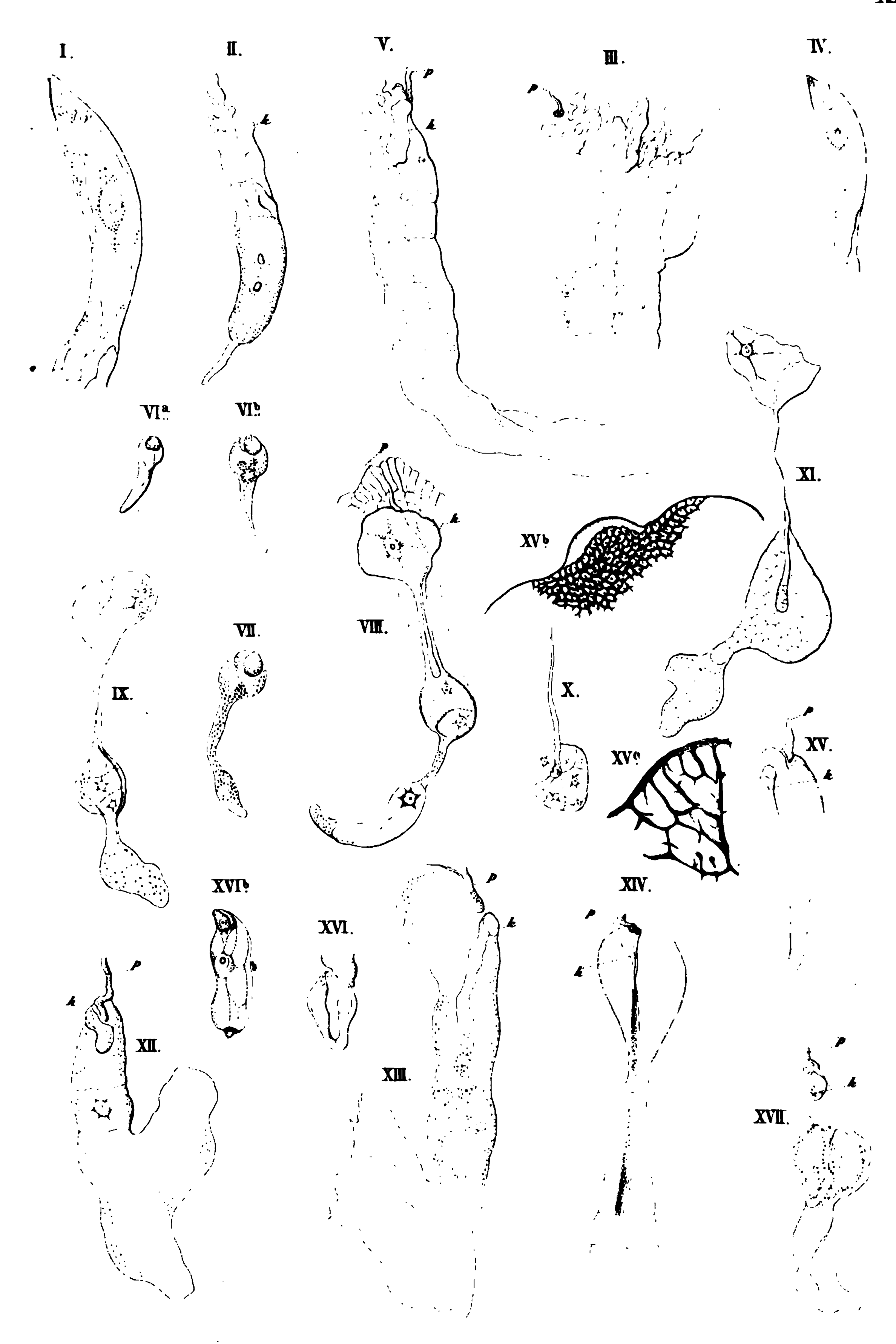



Pedicularis sylvatica.

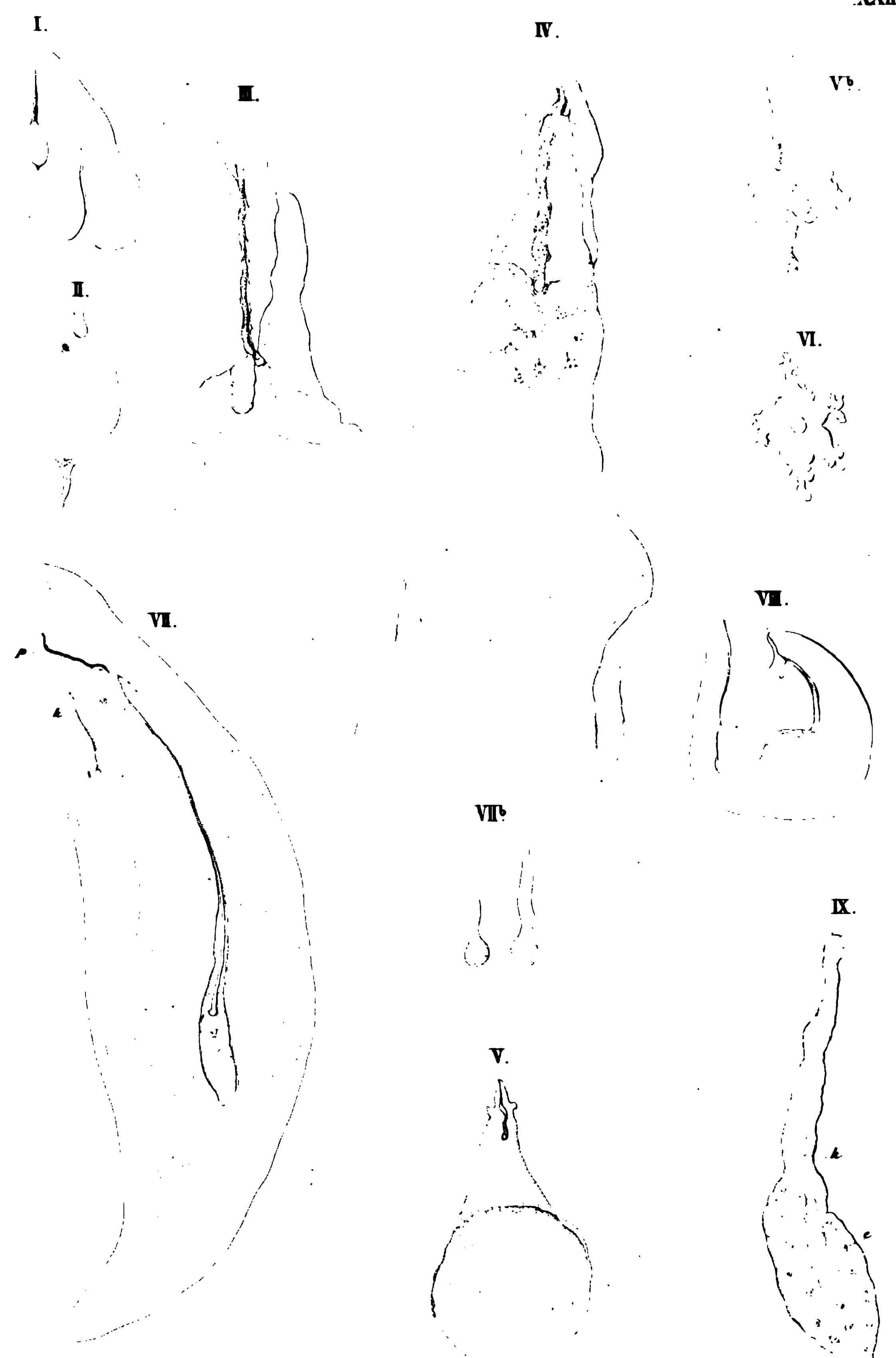



I-VII, Pedicularis sylvatica. VIII-XI, Pedicularis comosa. XII, Euphrasia officinalis. XIII-XVI, M...

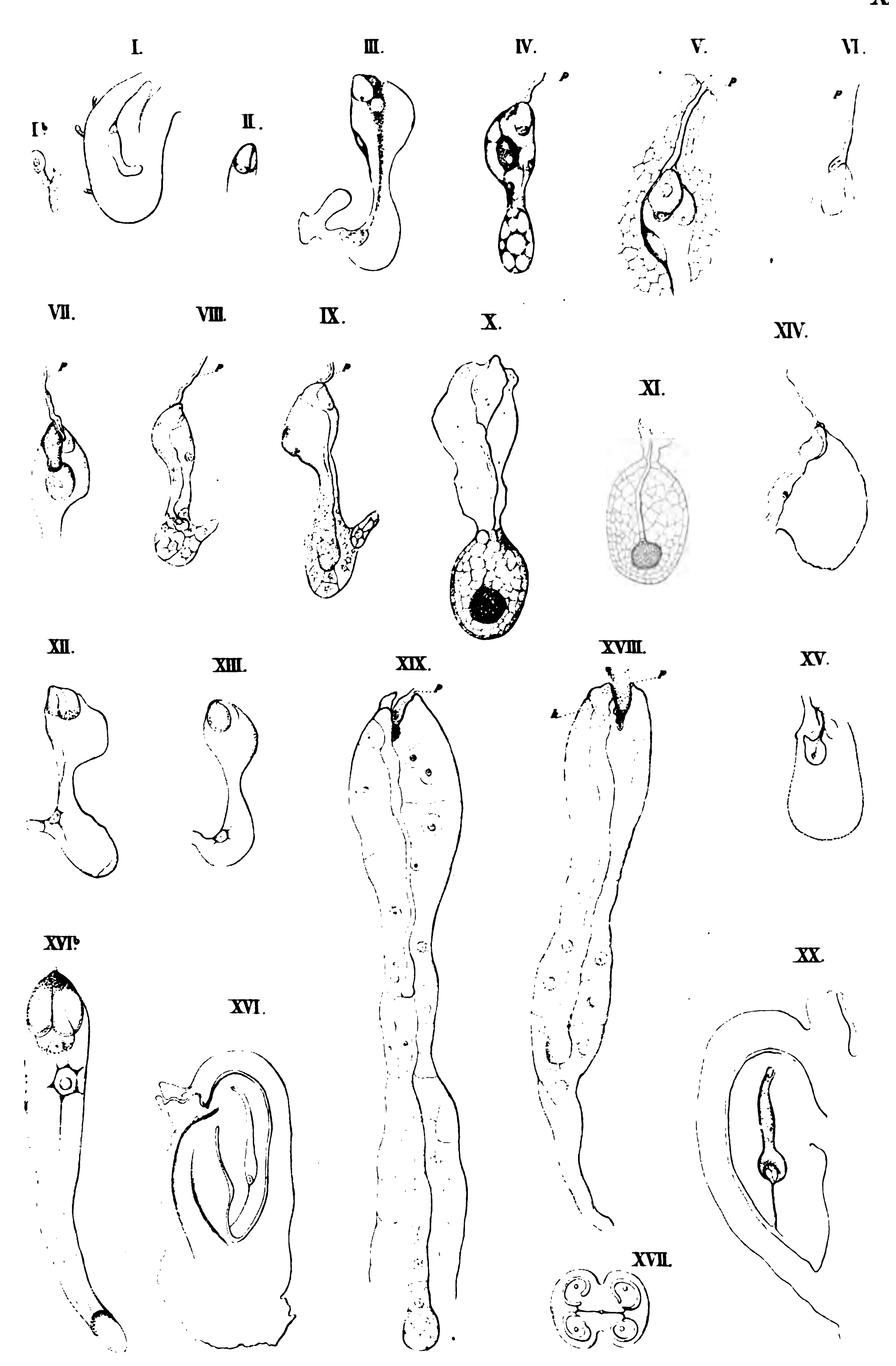




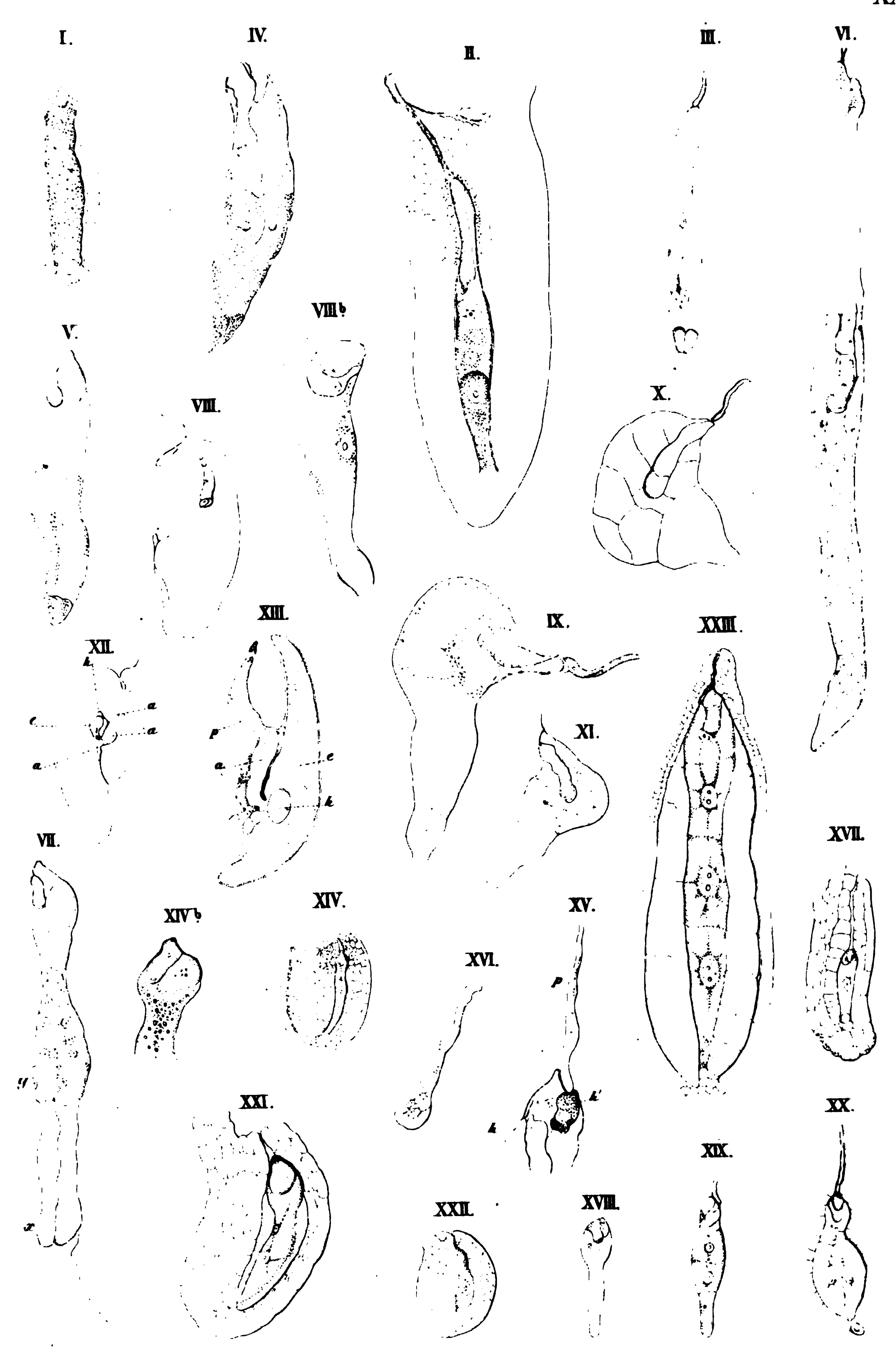

I–III Rhinanthus hirsutus. IV–V Rhinanthus minor. VI–XI Veronica Buxbaumii. XII. XIII. Veronica hederaefolia. XIV. XV Veronica triphyllos. XVI. XVII Nemophila insignis.



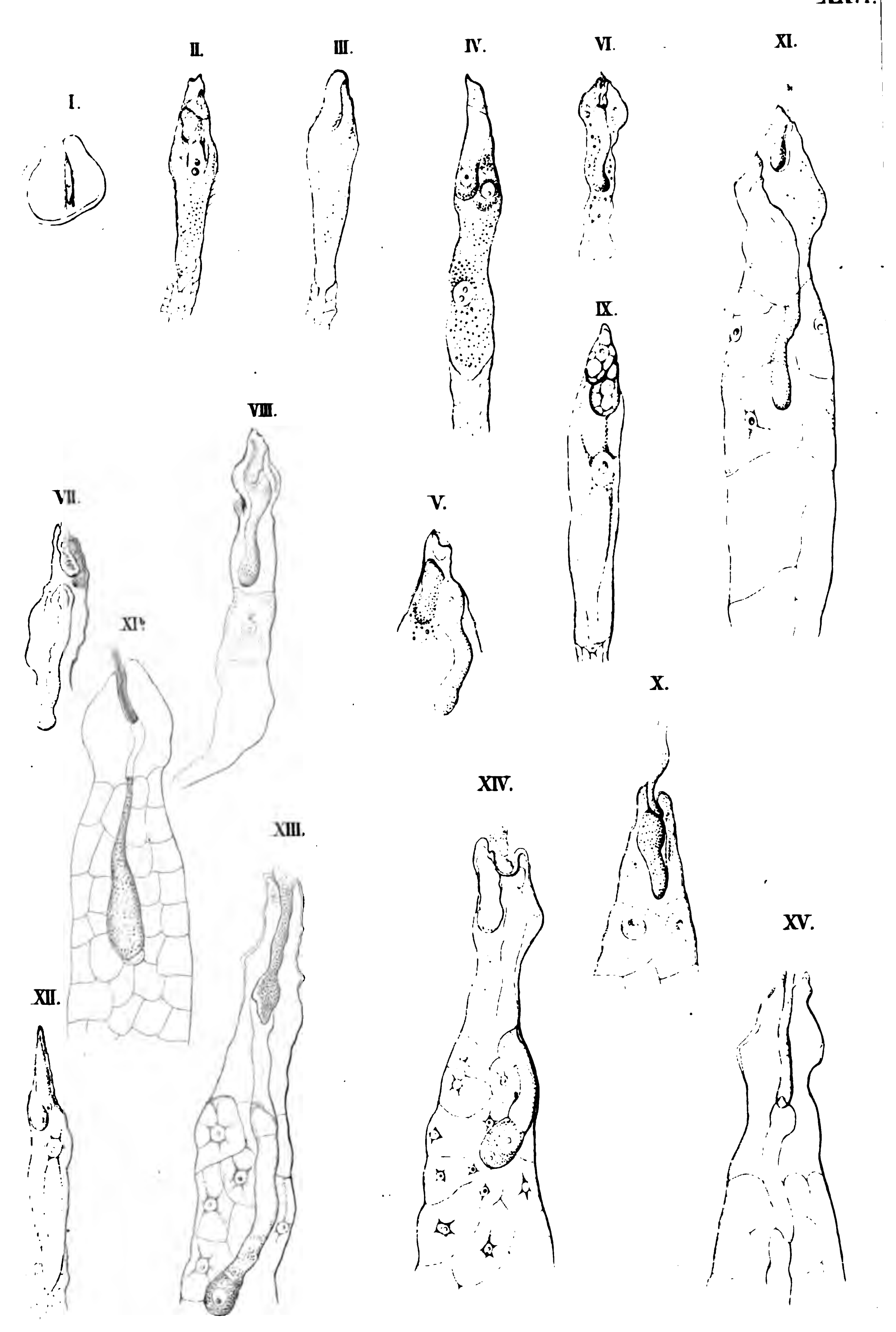

**I–VI. Melampyrum nemorosum. VII. Catalpa syringaefolia. VIII. IX. Acanthus spinosus.**



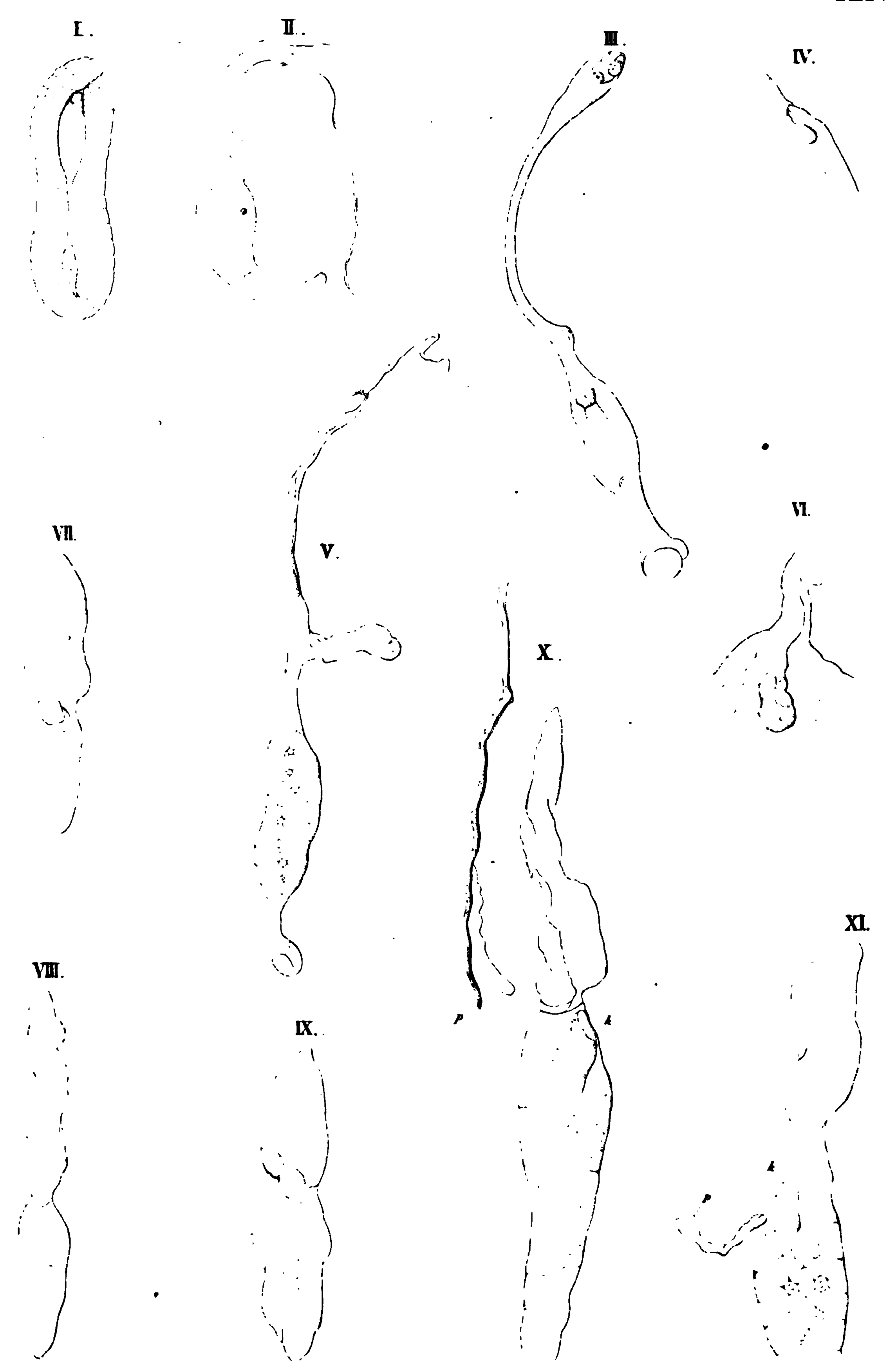

I–XI Lamium purpureum. XII–XV Lamium maculatum. XVI–XIX Prostanthera violacea. XX Ajuga reptans.



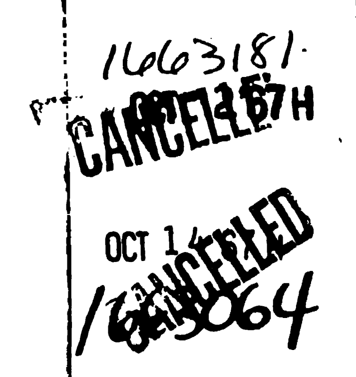

I–VI. Hebenstreitia dentat. VII Globularia vulgaris. VIII XIII Plantago lanceolata. XIV–XVI Vaccinium uliginosum. XVII–XX Pyrola rotundifolia. XXI. Epacris grandiflora. XXII Leiophyllum buxifolium. XXIII Drosera rotundifolia.

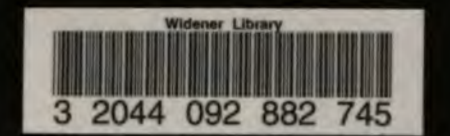



I-V. Campanula americana. VI-VIII Campanula medium. IX-XI Glossocomia. XII-XV Codonopsis viridiflora.




I. Cajophora lateritia. II–VI Loasa tricolor. VII–XI Bartonia aurea.




Widener Library
3 2044 092 882 745